

Lehrbuch

der

praktischen Geometrie,

nebst einem Anhange

über die Elemente der Markscheidekunst.

Von

Dr. Ignaz Lemoch,

ö. o. Professor der Mathematik an der k. k. Universität und der praktischen Geometrie an der k. k. technischen Akademie in Lemberg.

Erster Theil.

Enthaltend: Messung der Linien, Theorie, Beschreibung, Rektifikation und den Gebrauch der Winkelinstrumente.

Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage
mit 244 in den Text eingedruckten Figuren.

Wien 1857.
Wilhelm Braumüller,
k. k. Hofbuchhändler.

Vorrede zur ersten Auflage.

In neuester Zeit sind wohl schätzbare Abhandlungen über einzelne Instrumente und Theile der praktischen Geometrie, aber sehr wenige Schriften erschienen, welche den ganzen Umfang dieser Wissenschaft vollständig behandeln, und über viele, wesentliche Instrumente sucht der Praktiker jetzt noch vergebens eine erschöpfende Belehrung in unsern gewöhnlichen Lehrbüchern.

Ich glaube daher durch die Verfassung dieses Werkes keine überflüssige Arbeit unternommen zu haben, und war dabei bemüht, zunächst jenen Studierenden ein Lehrbuch in die Hand zu geben, die mit den nöthigen mathematischen Kenntnissen ausgerüstet, sich dem Studium der praktischen Geometrie widmen, ausübende Geometer aber mit den neuesten Fortschritten in diesem Fache bekannt zu machen.

Gleichzeitig war mein Augenmerk auch dahin gerichtet, das vorhandene Material von den fremden Stoffen zu läutern, das Beibehaltene so viel wie möglich in ein System zu bringen, und so der praktischen Geometrie das Siegel einer Wissenschaft aufzudrücken.

Zur Erreichung des letzteren Zweckes habe ich in der Einleitung die nöthigen Begriffe über den Umfang und Inhalt der praktischen Geometrie auf objektive Gründe zu stützen getrachtet, und diese — da ich in einigen Punkten von der Ansicht anderer Geometer abweichende Resultate erhielt — umständlich angegeben; daß aber eine feste Begründung der Begriffe in einer Wissenschaft nicht zu den unnützen Spitzfindigkeiten gehört, dies zu beweisen dürfte überflüssig sein.

Der zweite Abschnitt des ersten Bandes konnte Manchem für Anfänger als zu unverständlich scheinen, weil da von den Quellen der Fehler bei Winkelmessungen und ihrer Größe gesprochen wird, ohne noch die Instrumente selbst erklärt zu haben; doch meine mehrjährige Erfahrung hat mich von dem Gegentheile überzeugt, sobald man seinen Vortrag durch das Vorzeigen der eben erklärten Bestandtheile eines Winkelinstrumentes, z. B. des Astrolabiums, unterstützt.

Durch die in diesem Abschnitte aufgenommenen Sätze erreichte ich aber mehrere wesentliche Vortheile; durch jene nämlich wird in den folgenden zwei Abschnitten bei der detaillirten Beschreibung der Winkelinstrumente der Zweck jedes einzelnen Bestandtheiles und die Nothwendigkeit der angeführten Rektifikationen begründet; ich konnte mich sodann kürzer fassen, weil das allen Instrumenten Gemeinschaftliche in diesem Abschnitte zusammen gestellt ist; ferner wurde es dadurch möglich, alles was zur Kenntniß eines bestimmten Instrumentes erforderlich ist, als: Beschreibung, Rektifikation und Gebrauch desselben unmittelbar auf einander folgen lassen, ohne dazwischen durch andere Betrachtungen unterbrochen zu werden; bei dieser Anordnung bin ich überzeugt, daß die Sache dem Lernenden erleichtert und der Gebrauch des Buches für jene erhöht wird, welche über ein bestimmtes Instrument, mit dem sie eben operiren sollen, Belehrung suchen.

Daß jeder, der praktische Geometrie mit gutem Erfolge ausüben will, die Kenntniß der Lagarithmen und der Trigonometrie besitzen soll, ohne deshalb ein geübter Rechner zu sein, ist eine unumgänglich nöthige Forderung. Die vielen Beispiele, welche im ganzen Werke und besonders im zweiten Abschnitte aufgenommen sind, sollen zunächst die allgemeinen Regeln, zu welchen sie als spezielle Fälle gehören, beleuchten, ferner denen eine Gelegenheit darbieten, welche sich erst im Rechnen mit Logarithmen üben wollen, endlich jene Praktiker, die wegen Mangel an Vorkenntnissen durch die allgemeinen Formeln nicht überzeugt werden können, auf die Fälle aufmerksam machen, wo und wie ein Fehler begangen werden kann.

Bei der Ableitung einer Formel oder Rechnung eines Beispieles war ich desto umständlicher, je ungewöhnlicher der Gang war, weil ein Geometer oft in die Lage kommt, daß er nach einer bestimmten Formel rechnen soll, und nicht die Zeit hat, über ihre Richtigkeit oder die Art sie zu gebrauchen, viel nachdenken zu können.

Die Anordnung der Materie im ersten und zweiten Abschnitte des zweiten Bandes war durch die Aufeinanderfolge der Meßoperationen selbst bedingt; wollte ich da zur Erklärung der Aufnahme einer Gemeinde einen Anfang erhalten, so mußte ich bis zu dem ersten Gliede dieser Kette nämlich zur Messung der Basis gehen, und wenn auch die trigonometrische Triangulirung seltener vorkommt, so soll doch jeder gebildete Geometer wissen, wie man dabei zu verfahren hat; dies ein fernerer Grund, der mich veranlaßte, diesen Theil aufzunehmen; auch glaube ich da keinen Fehlgriff gethan zu haben, wenn ich denselben Gang beibehalte, welchen der k. k. Kataster gegenwärtig bei der Vermessung der Provinzen befolgt, somit durch vieljährige Erfahrung als zweckmäßig anerkannt hat.

Der Umstand, daß Galizien und eben die Stadt Lemberg durch den k. k. Kataster vermessen wird, war mir sehr günstig, denn durch das freund-

schaftliche Verhältniß, in welchem ich mit vielen Herren dieser Behörde stehe, hatte ich Gelegenheit, ihre vielen praktischen Erfahrungen und alle die Meßoperation betreffenden technischen Verordnungen kennen zu lernen.

Die Berechnung der Fläche jeder einzelnen Parzelle, dieser wichtige Theil der praktischen Geometrie, wird in unsern Lehrbüchern, mit Ausnahme jenes von Professor Winkler, noch immer sehr stiefmütterlich behandelt, und wie wenig auf die Flächenberechnung einer Aufnahme Gewicht gelegt wird, mag der Umstand beweisen, daß man nicht selten Situationsblätter findet, in welchen die Hauptsache: der Maßstab fehlt.

In dem betreffenden Abschnitte über die Flächenberechnung war ich bemüht, diese so zu geben, daß jeder mit Hilfe eines Planimeters im Stande sei, die Parzellen einer Gemeinde richtig zu berechnen.

Von den vielen Planimetern habe ich nur zwei, nämlich den Posener, der eigentlich eine Verbesserung des Fallon'schen ist, und den vom Herrn Inspektor Alder aufgenommen, weil diese unter den mir bekannten, die brauchbarsten und eben deshalb die gebräuchlichsten sind.

Für die Zweckmäßigkeit, Einfachheit und Genauigkeit des letzteren spricht am besten der Umstand, daß dieser Planimeter bei allen Inspektoraten des k. k. Katasters, obwohl gesetzlich nicht eingeführt, doch im Gebrauche ist, was gewiß nicht statt finden dürfte, wenn durch denselben die Berechnung nicht so wesentlich befördert wäre.

Der Alder'sche Planimeter hat allerdings viele Aehnlichkeit mit jenem von Oldendorp erfundenen und von dem Vereine zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen (1832) veröffentlichten Planimeter, den erstern aber für eine Nachahmung des letztern zu halten, wird durch die Thatsache widerlegt, daß der eine Bestandtheil dieser beiden Planimeter, der eingetheilte Rahmen nämlich, beim k. k. Kataster schon im Jahre 1824 aber nicht mit der gegenwärtigen Eintheilung und ohne den Maßstäben in Anwendung war.

Ich finde mich verpflichtet, Herrn Inspektor Alder für die große Gefälligkeit, seine Erfindung veröffentlichen zu dürfen, hier meinen Dank abzustatten.

Von den Nivellir-Instrumenten habe ich nicht nur die neueren, nämlich das von Reichenbach, Kraft, Stampfer, durch welches letztere eben dieser Theil der praktischen Geometrie auf eine so hohe Stufe der Genauigkeit gebracht worden ist, sondern auch einige ältere, als das Nivellirdiopter von Vega, das Instrument von Voigtländer aufgenommen; auch diese sind noch im Gebrauche und wegen ihrer stärkeren Bauart für Anfänger zu den ersten Versuchen im Rektifiziren der Nivellir-Instrumente besonders geeignet.

Will man praktische Geometer bilden, so ist eine der wesentlichsten Bedingungen, daß man den Studirenden Gelegenheit verschafft, die In-

strumente selbst zu rektifiziren; ein großer Theil der Fehler, welche in der Praxis begangen werden, ist der Unrichtigkeit der Instrumente zuzuschreiben.

In dem Werke selbst ist gewissenhaft jede Quelle angeführt, aus welcher ich geschöpft habe, daß aber dasselbe nicht durch eine bloße Zusammenstellung des schon Bekannten entstanden ist, wird, hoffe ich, jeder unbefangene Sachkenner bezeugen; und so wie von meiner Seite eine begründete Berichtigung und Rüge, männlich ausgesprochen, mit Dank aufgenommen werden wird, eben so würde mich eine freundliche Aufnahme dieses Werkes zum Weiterforschen in diesem Felde der Wissenschaft anregen.

Lemberg, den 1. Mai 1849.

Dr. Lemoch.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Plan und Anlage des ganzen Werkes wurden in der zweiten Auflage beibehalten, und zwar um so mehr, als das Buch in dieser Gestalt freundliche Aufnahme bei dem technischen Publikum gefunden und mehrere öffentliche Stimmen sich lobend darüber ausgesprochen haben. Die Vermehrung um einige Druckbogen wurde zum Theil durch die in den Text eingedruckten Figuren, welche den Gebrauch des Buches bequemer machen, größten Theiles aber durch das in neuerer Zeit sich anhäufende Materiale, insbesondere durch die ausführliche Darstellung der Spiegel-Instrumente herbeigeführt.

Diese Werkzeuge verdienen nach meiner Ansicht gegenwärtig wegen ihrer Mannigfaltigkeit, speziellen Brauchbarkeit und oft sinnreichen Konstruktion eine größere Beachtung, als man ihnen bisher geschenkt hat. Ich sah mich daher bei dieser Auflage veranlaßt, die Theorie der Spiegel-Instrumente, dann ihre Beschreibung, Rektifikation und Anwendung in besonderen Abschnitten zusammen zu stellen, wodurch natürlich der Umfang des Buches zugenommen hat.

Sollte es Manchem scheinen, daß die Spiegel-Instrumente zu weitläufig behandelt sind, so muß ich dagegen bemerken, daß bisher diese Instrumente sowohl der Zahl als der Erklärung nach sehr stiefmütterlich behandelt worden sind, wozu freilich nicht viel Theorie nöthig war, ferner, daß nach meiner Ansicht jedes Instrument, wenn es schon in ein Lehrbuch aufgenommen wird, derart erklärt sein soll, daß der Leser nicht erst andere Werke zum Nachschlagen benöthige, um über ein bestimmtes Instrument eine vollständige Kenntniß zu erlangen.

In der neuesten Zeit ist die praktische Geometrie durch ein sinnreich konstruirtes Planimeter bereichert worden; es dürfte manchem willkommen sein, die gegenwärtig im Gebrauche stehenden Planimeter, von denen jedes sein Eigenthümliches hat, hier vollständig zu finden.

Im Anhange habe ich in dieser Auflage aus dem österreichischen

Berggesetze das herausgehoben, was insbesondere dem Markscheider angeht, und von der Markscheidekunst das aufgenommen, was sich ohne nähere Kenntniß der Geognosie und Bergbaukunde erklären ließ; um aber den Geometer mit der Sprache der Bergleute einigermaßen vertraut zu machen, mußte ich auch die gewöhnlichen technischen Ausdrücke der Markscheidekunst aufnehmen. Der bei der Traßirung von Eisenbahnen beschäftigte Geometer findet hier alles, was er braucht, und vieles nach der eigenen Erfahrung niedergeschrieben. Das Gruben-Instrument vom k. k. Markscheider Wachtel dürfte einem Bedürfnisse der Markscheider abhelfen.

Mein Bestreben, die praktische Geometrie nach ihrem gegenwärtigen Standpunkte darzustellen, wird der unparteische Fachmann nicht verkennen, was mir bei der in wissenschaftlicher Beziehung isolirten Lage Lembergs nicht leicht und nur dadurch möglich war, daß Herr Starke, leitender Werkmeister am k. k. politechnischen Institute zu Wien, und Herr von Bretschneider, k. k. Ober-Ingenieur im Ministerium für Handel und öffentliche Bauten mir jede in mein Fach einschlagende Erfindung mit der größten Bereitwilligkeit zukommen ließen, wofür ich den beiden Herren meinen Dank auszusprechen nicht unterlassen kann.

So möge denn auch diese zweite Auflage eine günstige Aufnahme finden!

Der Verfasser kann die Versicherung geben, daß er redlich bemüht gewesen, den meisten billigen Anforderungen und Aufforderungen Genüge zu leisten. Es Allen recht machen — ist schwer.

Lemberg, im August 1856.

Dr. Lemoch.

Inhalt

des ersten Theiles.

Einleitung.

§.		Seite
1 — 3	Begriff der praktischen Geometrie	1 — 3
4	Inhalt und Umfang dieser Wissenschaft	3
5	Größe und Gestalt der Erde	4
6	Größe des Halbmessers der Erde	5
7	Wahrer und scheinbarer Horizont, Vertikale, horizontale Linien und Ebenen	5
8	Größe des Mittelpunktswinkels zwischen zwei Vertikalen	6
9	Unterschied zwischen der Sehne oder Tangente und dem zugehörigen Bogen	7
10	Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Horizont	8
11	Projektion eines Punktes oder einer Linie auf einen scheinbaren Horizont	9
12	Unterschied zwischen der Fläche eines Kugelabschnittes und ihrer Projektion auf einen scheinbaren Horizont	9
13	Zweck der Flächenmessung	10
14	Mittel die Fläche zu finden	11
15	Definition der Höhenmessung	12
16 — 17	Die Art geneigte Linien zu bestimmen	13
18	Die Art geneigte Linien auf dem Papiere darzustellen	14
19	Die Art geneigte Flächen darzustellen	15
20 — 21	Inhalt der höheren praktischen Geometrie	15
22	Ueberblick des ganzen Gebäudes der praktischen Geometrie	16

Erster Abschnitt.

Messung der Linien.

23	Mittel einen Punkt zu bestimmen	17
24	Begriff einer geraden Linie in der praktischen Geometrie	20
25	Abstecken einer geraden Linie	20
26	Angabe der verschiedenen Längeneinheiten	22
27	Ihre Unterabtheilung und Länge	23
28	Die Länge einer Einheit durch die einer anderen Einheit auszudrücken	25
29	Die mit einer Einheit gemessene Länge in einer anderen Einheit anzugeben	25

§. Seite

Unmittelbare Messung einer geraden Linie.

30 Durch Schritte 27
31 Mit Meßstäben 27
32 Mit der Meßkette 28
33 Mit dem Meßbande 29

Fehlerquellen bei der Messung der Linien mittelst der Kette.

34 Wenn die Glieder verbogen sind 30
35 Wegen der Ausdehnung durch die Wärme 30
36 Wenn die Kette nicht scharf in die zu messende Linie gelegt wird 31
37 Wenn die Kette nicht aufliegt 32
38 Wenn die Kettennägel nicht genau neben dem Inder der Kette gesteckt werden 33
39 Wenn die Kette zu viel gespannt wird 33
40 Prüfung der Kette 34
41 Mit einer unrichtigen Kette richtig zu messen 34

Messung der horizontalen Projektion einer Linie.

42 1. Art. die sogenannte Staffelmessung 35
43 Fehler die dabei begangen werden können 36
44 2. Art. Nebst der Länge der Linie ihren Neigungswinkel gegen den Horizont zu bestimmen, sodann die Projektion zu berechnen 38
45 Fehler die dabei begangen werden können 39
46 Die Art den Neigungswinkel einer Geraden zu messen (die Setzwage) 39
47 Aus mehreren gleich guten Messungen das richtige Resultat abzuleiten 40

Mittelbare Messung der Linien mittelst der Kette und den Stäben.

48 — 49 Winkel zu konstruiren (2 Auflösungen) 43
50 Eine Senkrechte zu errichten (3 Auflösungen) 44
51 Senkrechte zu fällen (2 Auflösungen) 45
52 Parallele Linien zu ziehen (4 Auflösungen) 45
53 Die Länge einer Linie zu bestimmen, die nur an ihren Endpunkten zugänglich ist (3 Auflösungen) 47
54 Die Länge einer Linie zu bestimmen, die nur an einem Endpunkte zugänglich ist (4 Auflösungen) 48
55 Die Länge einer Linie zu bestimmen die ganz unzugänglich ist (7 Auflösungen) 50
56 Schätzung der Entfernungen nach dem Augenmaße . . . 53

Messung der Linien auf dem Papiere.

57 Gerade Linien zu ziehen und die Richtigkeit eines Lineals zu prüfen 55
58 Verjüngte Maßstabe zu konstruiren (5 Beispiele) . . . 55
59 Zirkeln 58
60 Theorie des gradlinigen Nonius 59

Genauigkeit der Messung der Linien auf dem Papiere.

61 Welche Größen man noch mit freiem Auge sehen kann . . 60
62 Wie genau das Lineal an zwei Punkte angelegt werden kann, ferner der Fehler in der Verlängerung derselben . . . 61

§.		Seite
63	Fehler welche bei der Abnahme einer Linie von dem Maßstabe begangen werden können	62
—	Das Papier aufzuspannen	63
64	Konstruktion gegebener Winkel auf dem Papiere . . .	63
	Anwendung des Vorhergehenden auf die Vermessung einzelner Polygone.	
65	1. Art. Mittelst Abszissen und Ordynaten	65
—	2. Art. Durch Diagonalen und Seiten	66
—	3. Art. Mittelst eines umgeschriebenen Dreieckes . . .	67
—	4. Art. Nach dem Umfange	68
	Konstruktion eines Polygons auf dem Papiere, wenn nicht alle Seiten gemessen werden konnten.	69 — 72

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Winkelinstrumente.

§.		Seite
67	Eintheilung derselben	73
68 — 69	Bestandtheile der Winkelinstrumente ohne Spiegel . . .	73 — 74
70	Stative	75
71	Nonien	78
72	Klemm- und Mikrometerschrauben	81
	Untersuchung der Fehlerquellen bei der Winkelmessung.	
73	Voraussetzungen die gemacht worden sind	81
74	Fehler wegen der excentrischen Aufstellung des Instrumentes .	82
75	Fälle wo das Maximum des Fehlers eintritt	84
76	Einfluß der Aenderung des Direktionswinkels auf den Fehler	86
77	Einfluß des wegen der excentrischen Aufstellung begangenen Fehlers auf die gegen über liegenden Seiten	88
78	Einfluß einer fehlerhaften Bestimmung des Direktionswinkels bei der Reduktion auf das Centrum	90
79	Mittel diesen Fehler wegzubringen (die Lothgabel) . . .	92
80	Fehler wegen der Excentrizität der Alhidade	92
81	Mittel denselben bei ganzen Kreisen zu eliminiren . . .	94
82	Fehler wegen der nicht horizontalen Stellung des Limbus .	95
83	Mittel diesen Fehler zu beseitigen (Libelle)	101
84	Rektifikation der Libellen	102
85	Die Empfindlichkeit einer Libelle hängt von der Krümmung der Röhre und von der die Röhre füllenden Flüßigkeit ab	104
86	Dosenlibellen	107
87	Fehler wenn die Visirebene auf die Ebene des Limbus nicht senkrecht steht	108
88	Fehler wenn die Visirebene nicht durch den Mittelpunkt des Limbus geht	109
89	Fehler wenn das anvisirte Signal nicht vertikal steht . .	110
90	Die Visirebene soll eine mathematische Ebene seyn . . .	111
91	Vortheile wenn die Alhidade mit einem Fernrohr verbunden ist	112
92	Die gewöhnlichen Arten dem Fernrohre eine von der Alhidade unabhängige Bewegung in der vertikalen Ebene zu ertheilen	113
93	Untersuchung des Fehlers wenn die Drehungsachse des Fernrohrs nicht horizontal und die optische Achse auf jene nicht senkrecht steht	113
94	Fehler wenn die optische Achse und die Drehungsachse sich nicht schneiden	118

§. Seite
95 Genauigkeit des Visirens mit und ohne Fernröhre . . . 118
96 Aufsuchung der Bedingungen unter welchen die in der Messung der Distanzen und Winkel begangenen Fehler den kleinsten Einfluß auf die aus ihnen abgeleiteten Resultate haben . 121

Dritter Abschnitt.

Beschreibung, Rektifikation und Gebrauch der Winkelinstrumente ohne Spiegel.

97 Beschreibung des Meßtisches von Marinoni 128
98 Beschreibung des Meßtisches von Kraft 130
99 Prüfung und Berichtigung des Meßtisches 131
100 Den Meßtisch horizontal zu stellen 132
101 Beschreibung des Diopterlineals 132
102 Rektifikation des Diopterlineals 133
103 Rektifikation des Bergdiopters 135
104 Beschreibung des Perspektivlineals von Sadtler . . . 136
105 Beschreibung des Perspektivlineals von Kraft 137
106 Beschreibung des Perspektivlineals von Schablaß . . . 138
107 Rektifikation der vorhergehenden Perspektivlineale . . . 139
108 Gebrauch des Meßtisches. Einen Winkel zu konstruiren und den Meßtisch zu orientiren 143
109 Mit dem Meßtische ein ähnliches Dreieck zu konstruiren (4 Auflösungen) 145
110 Sätze zur Pothenotischen Aufgabe (4 Sätze) 148
111 Orientirung des Meßtisches nach Tobias Mayer . . . 152
112 Orientirung des Meßtisches nach Grunert 154
113 Orientirung des Meßtisches nach Lehmann 155
114 Orientirung des Meßtisches nach Netto 158
— Meine Methode (Anmerkung) 161
115 Rücksichten hinsichtlich der Wahl des Standpunktes . . . 161
116 Orientirung des Meßtisches mittelst der Magnetnadel . . 162
117 Auf dem Meßtische ein Viereck zu konstruiren (2 Fälle) . . 163
118 Den Meßtisch mittelst zweier Punkte zu orientiren von denen keiner ein Standpunkt ist 165
119 Gebrauch der Anschlagnadel und Untersuchung des Fehlers der durch jene veranlaßt wird 166
120 Einzelne Polygone mit dem Meßtisch aus einem Standpunkte aufzunehmen 168
121 Ein Polygon von zwei Standpunkten aufzunehmen . . . 169
122 Ein Polygon nach dem Umfange aufzunehmen 170
— Wenn ein Theil des Polygons außerhalb des Meßtisches fällt 172
123 Aufnahme eines Polygons, wenn das Tischblatt mit Quadraten überzogen ist 173
124 Ein Polygon mit Hilfe der Orientirungs-Boussole aufzunehmen 174
125 Ein nach dem Umfange aufgenommenes Polygon zum Schluße zu bringen 175
126 Das Winkelkreuz 178
127 Rektifikation des Winkelkreuzes 179
128 Gebrauch des Winkelkreuzes 180
129 Der Winkelkegel 181
130 Das Boussolen-Instrument 181
131 Rektifikation des Boussolen-Instrumentes 183
132 Gebrauch des Boussolen-Instrumentes 185
133 Mittelst dieses Instrumentes ein Polygon mit Springständen aufzunehmen 186

§.		Seite
134	Die Winkel mittelst der Boussole zu konstruiren . . .	187
135	Beschreibung des einfachen Astrolabiums	187
136	Beschreibung des Astrolabiums von Voigtländer . . .	189
137	Rektifikation desselben	190
138	Das Astrolabium von Kraft	193
139	Rektifikation desselben	193
140	Gebrauch des Astrolabiums	194
141—143	Vierecke aufzunehmen (3 Aufgaben)	196
144	Ein Polygon aus einem Standpunkte zu vermessen . .	198
145	Ein Polygon aus zwei Standpunkten zu vermessen . . .	199
146	Aus den gemessenen Seiten und Winkeln die fehlenden Stücke durch Rechnung zu finden	200
147	Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel sind zu berechnen	205
148	Wenn ein Winkel und zwei Seiten unbekannt sind . . .	206
—	Die Auflösung kann auch unmöglich werden	209
149	Wenn zwei Winkel und eine Seite unbekannt sind . . .	210
150	Wenn drei Winkel unbekannt sind	216
151	Zweck der Boussole wenn an das Astrolabium eine angebracht ist	221
152	Mit dem Astrolabium Höhen und Tiefenwinkel zu messen .	222
153	Der Reichenbach'sche Theodolit	222
154	Rektifikation des Theodoliten	226
155	Gebrauch des Theodoliten	231
156	Starkes Vorrichtung die Winkel bis auf 0.1 Sekunden abzulesen.	234

Vierter Abschnitt.

Theorie der Winkelmesser mit Spiegeln.

157	Theorie der Instrumente mit einem unbeweglichen Spiegel (1 und 2. Satz)	236
—	Theorie der Instrumente mit einem beweglichen Spiegel (3 und 4. Satz)	237
158	Wirkung eines gleichschenkligen rechtwinkligen Prisma . .	237
159	Untersuchung ob die Winkel an der Hypothenuse streng einander gleich sein müssen	238
160—161	Anwendung zweier rechtwinkligen unbeweglichen Prismen .	239
162	Wirkung eines sphärischen Prisma	241
163—164	Anwendung zweier unter einem rechten Winkel gegen einander geneigter Spiegel	242
165—166	Anwendung zweier Spiegel von denen einer beweglich ist .	243
167	Die drehende Bewegung der Limbusebene hat auf die Deckung der Bilder keinen Einfluß	245
168	Zwei vertikale Linien erscheinen gegen einander geneigt wenn der Limbus nicht horizontal ist	246
169	Anwendung zweier Spiegel wenn beide beweglich sind . .	248
170	Bedingungen denen ein rektifizirtes Spiegelinstrument entsprechen muß	249
171	Der Einfluß wenn die Flächen eines Spiegels nicht eben sind	249
172	Fehler wenn die Ebenen eines Glases nicht parallel sind .	250
173	Mittel um zu prüfen ob ein Glas von parallelen Ebenen begränzt ist	253
174	Untersuchung des Fehlers wenn die Spiegel auf die Limbusebene nicht senkrecht stehen	255
175	Mittel um zu untersuchen ob ein Spiegel auf die Limbusebene senkrecht steht	261
176	Untersuchung des Fehlers, wenn der Spiegel nicht centrisch gestellt ist	262

§.		Seite
177	Untersuchung des Fehlers, wenn die reflektirende Ebene keine konstante ist	267
178	Untersuchung des Fehlers, wenn die Strahlen nicht parallel mit der Limbusebene in das Auge kommen	

Fünfter Abschnitt.

Beschreibung, Rektifikation und Gebrauch der Winkelinstrumente mit Spiegeln.

179	Das Prismenkreuz	271
180	Der Winkelspiegel	272
181	Das katoptrische Winkelrohr	274
182	Rektifikation desselben	274
183	Gebrauch des Winkelrohres	275
184	Das Winkelrohr mit beweglichem Okulare	276
185	Dessen Rektifikation	277
186	Gebrauch des Winkelrohres	278
187	Das Spiegeldiopter von Romershausen	279
188	Das Spiegellineal	280
189	Rektifikation des Spiegellineals	280
190	Gebrauch des Spiegellineals	282
191	Boussole von Schmalkalder	283
192	Der Kathetometer von Pezelt	284
193	Rektifikation desselben	287
194	Gebrauch des Kathetometers	289
195	Der Reflektor von Douglas	290
196	Gebrauch dieses Instrumentes	291
197	Rektifikation des Reflektors	292
198	Der Spiegelsextant	293
199	Den Winkel zwischen den parallelen Fäden des Fernrohres zu bestimmen	296
200	Rektifikation des Spiegelsextanten	296
201	Messung der Höhenwinkel mittelst des Sextanten	301
202	Fehler wenn die reflektirende Ebene nicht horizontal ist	302
203	Gebrauch des Sextanten	303
204	Der Spiegelzirkel	303
205	Mayer-Borda'scher Reflexionskreis	305
206	Gebrauch des Reflexionskreises	306
207	Das patentirte Reflexions-Instrument von Pistor und Martins	307
208	Der Heliotrop von Gauß	309
209	Rektifikation des Heliotrops	310
210	Vor und Nachtheile der Spiegelinstrumente	315.

Einleitung.

§. 1. Die Länge eines Weges, den Flächeninhalt eines Feldes zu bestimmen und andere ähnliche Aufgaben, mögen wohl der Anfang jener Wissenschaft gewesen sein, welche die Griechen mit dem Namen Geometrie (Erdmessung) bezeichnet haben. Daß aber nicht erst die Griechen, sondern schon viel frühere Völker von der Geometrie Kenntnisse hatten, dies bestätiget unter vielen Andern auch Herodot durch die Nachricht, daß der ägyptische König Sesostris (etwa 1000 Jahre v. Ch. G.) jedem seiner Unterthanen gleich viel Land gab, damit jeder gleich viel Abgaben zu leisten hätte, und wenn einer derselben durch die Ueberschwemmung des Nils etwas von seinem Antheile verloren hatte, so mußte ein Feldmesser untersuchen, wie viel dies betrage, um die Abgaben darnach zu vermindern; auch soll Sesostris von allen seinen eroberten Ländern eine Landkarte haben anfertigen lassen.

Waren die Karten noch so ungenau gearbeitet, so muß man doch über die bedeutenden Fortschritte erstaunen, welche diese Wissenschaft schon zu jener Zeit gemacht hat.

Der menschliche Verstand mag aber bald an den zu bestimmenden Größen auch solche Eigenschaften oder Formen bemerkt haben, die allgemein gültig sind, auch wenn man dabei von den eigenthümlichen Stoffen der Gegenstände absieht oder abstrahirt; z. B. daß die Größe eines Winkels von der Länge der Schenkel nicht abhänge, oder daß die Summe zweier Seiten eines Dreiecks größer als die dritte sein müsse ꝛc., und fand sich somit durch die Erdmessung veranlaßt, die Eigenschaften der Linien, Winkel und Flächen ohne Rücksicht auf den Stoff oder die Materie des Objektes, an dem sie vorkommen, zu untersuchen.

So entstand aus Veranlassung dieser Geometrie eine neue Wissenschaft, welche die Eigenschaften und Beziehungen der räumlich ausgedehnten Größen in abstracto untersuchte, und so nothdürftig auch anfangs die erhaltenen Resultate sein mochten, dennoch durch dieselben die Erdmessung (Geometrie) wesentlich unterstützte, und da auf diese Art beide Wissenschaften die räumlich ausgedehnten Größen zum Gegenstande hatten (die erstere an den wirklichen Objekten der Erde, die letztere aber im Allgemeinen oder in abstracto), so hatte man beide mit dem gemeinschaftlichen Namen Geometrie bezeichnet. Als sich aber beide Wissenschaften ausbildeten, sonderte man sie auch dem Namen nach von einander, wodurch die letztere zu einer selbstständigen Wissenschaft wurde und den Namen Geometrie, der ihren Ursprung aus der eigentlichen Erdmessung andeutet, behielt; die wirkliche Erdmessung wurde aber im Unterschiede von jener praktische Geometrie benannt; dieß ist aber ein Pleonasmus, indem das Wort Erdmessung selbst eine Thätigkeit anzeigt. Mit der Zeit hat sich also das

Verhältniß beider Wissenschaften wesentlich geändert, die theoretische Geometrie ist die Führerin der praktischen geworden. Jene hat somit den Zweck durch die Abstraktion die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen räumlich ausgedehnte Größen im Allgemeinen also nicht blos auf der Oberfläche der Erde bestimmt sind; die praktische Geometrie dagegen hat die Mittel anzugeben, die theoretischen Sätze in der Wirklichkeit zu realisiren, sie hat zu zeigen, wie die Messung jeder Art räumlich ausgedehnter Größen auszuführen sei; in diesem Sinne hat die praktische Geometrie den größten Umfang und wird die allgemeine Vermessungskunde genannt.

In diesem Werke wird jedoch die praktische Geometrie in der ersten beschränkteren Bedeutung genommen und zwar als die Wissenschaft, welche die räumlich ausgedehnten Größen des Erdkörpers zu messen lehrt.

§. 2. Bekanntlich werden die Größen in extensive und intensive, die extensiven in abgesonderte (diskrete) und stätige (kontinuirliche), die stätigen Größen hingegen wieder in räumliche und zeitliche eingetheilt.

Was die abgesonderten Größen betrifft, so ist jeder einzelne Theil derselben für sich selbstständig, demnach ihre Menge (Quantität) blos durch das Zählen bestimmbar; die intensiven und extensiv stätigen Größen dagegen bestehen aus gleichartigen Theilen, welche in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, und können nur mit Rücksicht auf diesen betrachtet werden.

Soll nun eine der intensiven oder extensiv kontinuirlichen Größen bestimmt werden, so muß man vorerst eine andere gleichartige, aber bekannte Größe annehmen und untersuchen oder vergleichen, wie oft diese letztere in der zu bestimmenden Größe enthalten ist. Diese Untersuchung nennt man das Messen, die angenommene Größe wird bei extensiven Größen die Einheit, das Maß (bei Längen auch der Maßstab), bei intensiven Größen der Grad, bei Farben der Ton genannt; so spricht man von einer Längen-, Flächen-, Zeiteinheit, dagegen von einem Grade der Schärfe einer Messung, vom Grade der Wärme, Dichte rc.

Anmerkung. Daß der Name eines Bogen- oder Winkelgrades mit der obigen Bedeutung des Wortes nicht im Widerspruche steht, das zu untersuchen gehört nicht hieher.

Stehen einige Eigenschaften zweier ungleichartiger Größen in einer regelmäßigen Verbindung mit einander, d. h. wenn die eine Eigenschaft sich ändert, daß auch die andere sich ändern muß, so läßt sich die Größe der einen Art durch die Größe der andern Art messen, und ein solches Messen durch eine ungleichartige Größe nennt man das indirekte, mittelbare; das Messen durch eine gleichartige Größe das direkte oder unmittelbare. So wird z. B. die Zeit durch die gleichförmige Bewegung irgend eines Körpers, der Flächeninhalt eines ebenen Polygons durch die Seiten und Winkel bestimmt.

Beispiele von direkten Messungen werden wir in der Folge hinreichend viele haben.

§. 3. Da die räumlich ausgedehnten stätigen Größen nicht immer direkt meßbar sind, und zu ihrer mittelbaren Messung mathematische Kenntnisse erforderlich sind, so ist die praktische Geometrie eine der sogenannten angewandten mathematischen Wissenschaften, und wird insbesondere, da sie zu der Ableitung ihrer Resultate größtentheils die theoretische Geometrie mit Inbegriff

der Trigonometrie anwendet, aus diesem Grunde die angewandte Geometrie (Geometria applicata) genannt.

Der Umfang der angewandten Mathematik überhaupt ist wegen den so heterogenen Wissenschaften, die da in ein Ganzes zusammengestellt werden, ganz unbegränzt; man rechnet hieher außer der praktischen Geometrie noch die praktische Arithmetik, als: Rechnen mit benannten Zahlen, die kaufmännische, technische, kameralistische Arithmetik; alle sogenannten mathematischen Naturwissenschaften: Mechanik im ganzen Umfange, Physik in so weit als die Gegenstände derselben einer mathematischen Behandlung fähig sind; die theoretische Astronomie, mathematische Geographie, die bürgerliche und Kriegs-Baukunst, die Schiffahrtskunde, die darstellende Geometrie (Geometrie descriptive) und noch mehrere andere.

Die praktische Geometrie steht ferner, wie jede andere Wissenschaft, mit allen übrigen in einer mehr oder weniger engen Verbindung und mit jenen in einer sehr nahen Verwandtschaft, welche ebenfalls die Erde zu ihrem Gegenstande haben; z. B. Oekonomie, Geographie etc.

Endlich ist noch zu bemerken, daß einzelne Theile der praktischen Geometrie, welche speziell im Bergbau angewendet werden, zusammen mit einem eigenen Namen: Markscheidekunst oder bergmännische Geometrie (Geometria subterrena) bezeichnet werden.

§. 4. Die praktische Geometrie hat zu zeigen, wie die räumlich ausgedehnten Größen des Erdkörpers, nämlich: Linien, Winkel, Flächen und endlich der Erdkörper selbst zu messen sind.

Betrachtet man die Linien an der Oberfläche der Erde, so findet man in ihren Krümmungen eine sehr große Verschiedenheit; wollte man bei der direkten Messung für jede einzelne eine gleichartige, d. h. gleich gekrümmte Linie als Einheit annehmen, so würde man die Anzahl der verschiedenen Einheiten gar nicht übersehen können, aus diesem Grunde ist man genöthiget, die zu messende krumme Linie in eine so große Anzahl Stücke zu theilen, daß jedes einzelne als eine gerade Linie betrachtet werden kann, wobei der jedesmalige Zweck der Messung bestimmen wird, wie weit man sich dem Begriffe einer geraden Linie zu nähern hat; durch diese Zerlegung der krummen Linie wird ihre Messung auf jene der Geraden zurückgeführt und somit durch eine und dieselbe Einheit möglich.

Nicht minder verschieden sind die Krümmungen der Erdfläche; um hier allen Weitläufigkeiten auszuweichen und die einfachen Regeln für die Berechnung der ebenen Figuren in Anwendung bringen zu können, wird jener Theil der Erde, dessen Fläche gesucht wird, in so viele Theile zerlegt, daß jeder einzelne als ein ebenes Polygon betrachtet und als solches gemessen werden kann.

Bedenkt man also, daß der Inhalt jeder von geraden Linien begränzten ebenen Figur durch die Seiten und durch die von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt ist, so sieht man, daß durch die eben besprochene Zerlegung der krummen Linien und Flächen der Umfang der Meßkunde ungemein klein und nur auf die Messung gerader Linien und ebener Winkel reduzirt wird,

Weil nun wie oben erwähnt wurde, in der Bezeichnung praktische Geometrie ein Pleonasmus enthalten ist, so hat diese Wissenschaft von dem Umstande, daß die Linien und Flächen zum Behufe der Messung getheilt werden, noch einen

zweiten, nämlich Geodäsie (Erdtheilung), erhalten. Diese Bezeichnung wird in neuester Zeit zwar oft gebraucht, ich finde mich jedoch nicht veranlaßt, von dem eingebürgerten Namen praktische Geometrie abzugehen, und zwar aus dem einzigen Grunde, weil das Wort Geodäsie das Wesen der Erdmessung gar nicht ausdrückt, da die Theilung der Größen nur ein Mittel und das Messen derselben die Hauptsache ist. Auch stehe ich in diesem Punkte nicht einzeln da, indem noch andere (Gerling, Weiler und mehrere andere) sich des Ausdruckes bedienen. Die richtige deutsche Benennung für diese Wissenschaft wäre Erdmessung, doch diese ist nicht im Gebrauche.

§. 5. Da die praktische Geometrie es ausschließlich mit den Größen der Erde zu thun hat, so ist es nöthig, vorerst diesen Körper selbst, und zwar als Ganzes näher zu betrachten.

Die vielfachen Messungen, welche an verschiedenen Orten zur Erforschung der Größe und Gestalt der Erde vorgenommen worden sind, zeigen, daß diese als ein Körper zu betrachten ist, dessen Fläche durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstanden ist, deren halbe große Achse 3362518·66 und die halbe kleine Achse 3351278·52 Wiener Klafter beträgt.

So bedeutend auch der Unterschied der beiden Achsen ist, so folgt doch aus ihrem Verhältniß, daß die Gestalt der Erde eben so wenig von einer Kugel abweicht, als ein Globus, dessen Halbmesser in einem seiner größten Kreise eine Klafter lang, der auf diesem Kreise senkrecht stehende Halbmesser aber um 3 Linien kürzer ist.

Zusatz. Die Peripherie jenes Kreises, den die halbe große Achse bei der Umdrehung beschrieben hat, nennt man den Aequator der Erde, die Endpunkte der kleinen Achse ihre Pole; den Durchschnitt einer durch die beiden Pole gelegten Ebene mit der Oberfläche der Erde nennt man einen Erd-Meridian und die mit dem Aequator parallelen Kreise Breitenkreise; der Bogen eines Meridians vom Aequator bis zu einem bestimmten Punkte ihrer Oberfläche heißt die geographische Breite des Punktes, und der Bogen am Aequator von einem willkürlich angenommenen ersten Meridian bis zu jenem, in welchem ein bestimmter Punkt liegt, heißt des letzteren geographische Länge.

Wird von den Unebenheiten der Erdoberfläche abstrahirt, so ist durch die geographische Breite und Länge die Position eines Punktes derselben bestimmt.

Die auf der Oberfläche vorkommenden Unebenheiten (Hügel und Berge) ändern die Kugelgestalt nicht wesentlich, denn erstens sind die Berge nicht auf der ganzen Oberfläche vertheilt, da $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ derselben vom Wasser bedeckt sind, zweitens ist die Höhe der Berge im Verhältniß zu dem Halbmesser der Erde, wenn man diesen näherungsweise als das arithmetische Mittel zwischen den beiden halben Achsen, also = 3356898 Wiener Klafter annimmt, zu unbedeutend; denn nehmen wir einen der höchsten Berge der Erde, z. B. den Chimboraco, so ist seine höchste Spitze *) 3442·53 W. Klafter über die Meeresfläche erhoben, für sich betrachtet eine bedeutende Höhe. Würde aber dieser Berg auf einer Kugel, deren Halbmesser eine W. Klafter lang ist, in demselben Verhältnisse dargestellt, in welchem er in seiner wahren Höhe zu dem Halbmesser der Erde steht, so würde er nur 0·9 Linie betragen.

So wenig also die Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser einer Klafter durch einen Körper von 0·9 Linie Höhe der Gestalt nach geändert wird, so wenig

*) Humboldt's Cosmos.

verliert die Erde im Ganzen betrachtet selbst durch die auf ihr vorkommenden höchsten Berge die Form einer Kugel.

Wir können somit bei den meisten Messungen, wo die Gestalt der Erde in Betrachtung kommt, diese als eine Kugel annehmen, und nur dann die wahre elliptische Gestalt der Erde berücksichtigen, wo das Resultat der Messung mit der größten Schärfe erfordert wird.

§. 6. Vermöge der wahren Gestalt der Erde ist die Krümmung im Meridiane am Aequator von jener an den beiden Polen verschieden, und zwar ist der Krümmungshalbmesser am Aequator kleiner als jener an den Polen; um sich nun hinsichtlich des Halbmessers der Wahrheit möglichst zu nähern, wird als Erdhalbmesser die Entfernung eines Punktes an der Meeresfläche im 45. Breitengrade vom Mittelpunkt der Erde angenommen.

Enke hat im Berliner astronomischen Jahrbuche für das Jahr 1852 über die Dimensionen des Erdkörpers einen für die praktische Geometrie höchst wichtigen Aufsatz geliefert, aus welchem wir Folgendes entnehmen:

Bezeichnen wir die geographische Breite, d. i. den Winkel, welchen die Normale eines Ortes mit der Ebene des Aequators macht, mit φ, die halbe große Achse der Ellipse mit a, die halbe kleine mit b, die Entfernung eines Punktes ihrer Oberfläche vom Mittelpunkt der Erde, dessen Breite φ ist, mit r, und den Krümmungshalbmesser im Meridiane der Ellipse ebenfalls unter dem Breitengrade φ mit ρ, setzen wir ferner $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$, $\tang \varphi^1=\frac{b^2}{a^2}\tang \varphi$, so ist

$$r=a\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi^1\cos(\varphi^1-\varphi)}}\ \ldots\ 1) \text{ und } \rho=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\ \ldots\ 2)$$

Nach Bessel's neuesten Bestimmungen ist a = 3272077·14 b = 3261139·33 Pariser Toisen; berechnen wir mit diesen Daten die Größen r und ρ für den 45. Breitengrad, so finden wir r = 3266631·124 und ρ = 3266076·21 Toisen.

Der Krümmungshalbmesser am Aequator ist = 3250238·08 und am Pole = 3283051·64 Toisen.

Nach den neuesten Bestimmungen ist ein Toise	= 1·0276404	W. Klft.
demnach die halbe große Achse	= 3362518·66	„
„ „ kleine Achse	= 3351278·52	„
der Halbmesser der Erde	= 3356922·11	„
der Krümmungshalbmesser im 45. Breitegrade . .	= 3356351·85	„
„ am Aequator	= 3340075·96	„
„ am Pole	= 3373796·50	„

Bezeichnen wir den Halbmesser der Erde mit r, so ist demnach r = 3356922·11 W.-Klft. und log r = 6·5259413. Dieser Halbmesser differirt von dem arithmetischen Mittel beider Achsen nur um 24 Klft.

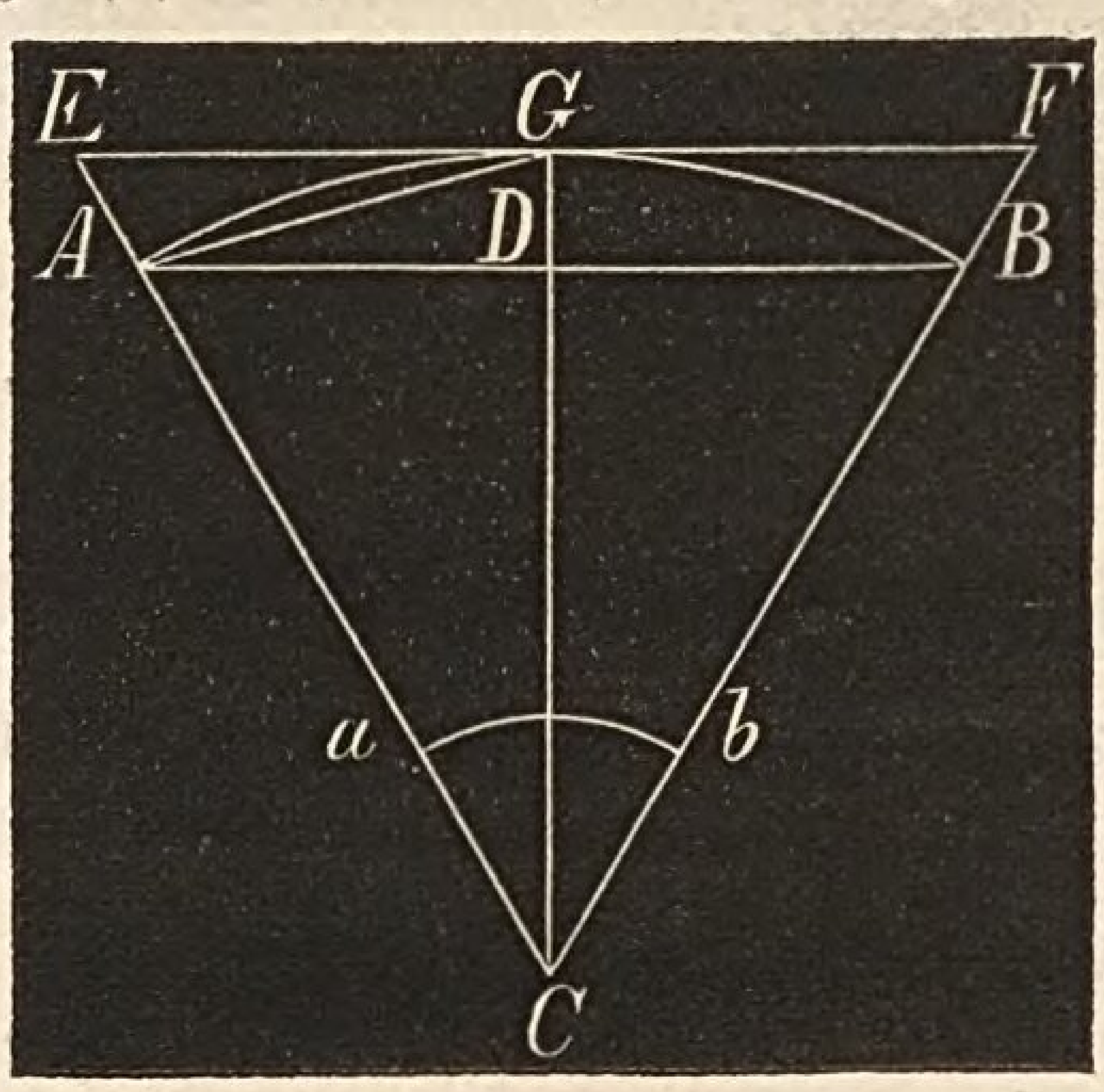
§. 7. Jede mit der Erde (diese als Kugel von obigem Halbmesser betrachtet) konzentrische Kugelfläche wird in der praktischen Geometrie der wahre Horizont und jede einzelne diese Kugelfläche berührende Ebene der scheinbare Horizont

des Berührungspunktes genannt. Zu einem wahren Horizonte sind also unendlich viele scheinbare Horizonte möglich.

Anmerkung. Demnach sind der wahre Horizont in der Astronomie und jener in der praktischen Geometrie zwei verschiedene Größen und von einander zu unterscheiden.

Bekanntlich werden alle Körper gegen den Mittelpunkt der Erde angezogen, diese Anziehungskraft kann benützt werden, um ihre Richtung, die man vertikale nennt, ersichtlich zu machen, und da der scheinbare Horizont die entsprechende Kugelfläche berührt, so steht der zu dem Berührungspunkte gezogene Halbmesser und seine Verlängerung auf dem scheinbaren Horizonte vertikal, und umgekehrt jede auf die vertikale Richtung senkrechte Ebene ist wieder scheinbar horizontal; dagegen steht jede Ebene, welche durch einen verlängerten Erdhalbmesser gelegt ist, auf dem entsprechenden Horizont vertikal, und wird deßhalb eine vertikale Ebene genannt.

§. 8. Die vertikalen Richtungen der Halbmesser sind zwar unter sich nicht parallel, denn sie schneiden sich im Mittelpunkt der Erde, allein wegen der Größe der Erdhalbmesser werden die Winkel am Mittelpunkte doch sehr klein, wenn auch der zwischen ihnen enthaltene Bogen auf der Oberfläche mehrere hundert Klafter beträgt.



Es sei Fig. 1, C der Mittelpunkt, AC=r der Halbmesser der Erde, AGB=D der Bogen zwischen zwei Punkten der Oberfläche und r so auch D in Klaftermaß gegeben.

Der Winkel ACB=C wird durch den Bogen ab gemessen, welcher zwischen den Schenkeln AC und BC mit dem Halbmesser Ca=1 beschrieben ist, und da ab : AB=1 : r sich verhält, so folgt:

$$ab = \frac{AB}{r} = \frac{D}{r} \quad \ldots\ldots 1)$$

Weil aber der Winkel ACB in den meisten Fällen sehr klein ist, so findet man die Anzahl Sekunden des Bogens ab, wenn man seine Länge durch die Länge des Bogens einer Sekunde dividirt, und da der letztere mit dem sinus einer Sekunde als gleich betrachtet werden kann, so findet man die Anzahl Sekunden, die einem Bogen entsprechen, wenn man denselben durch den sin. 1'' dividirt; demnach ist der Winkel C in Sekunden ausgedrückt

$$C'' = \frac{D}{r \sin. 1''} \quad \ldots\ldots 2).$$

Werden für r und sin. 1'' die bekannten Werthe substituirt, so ist

$$\frac{1}{r \sin. 1''} = 0{\cdot}061445, \text{ somit}$$

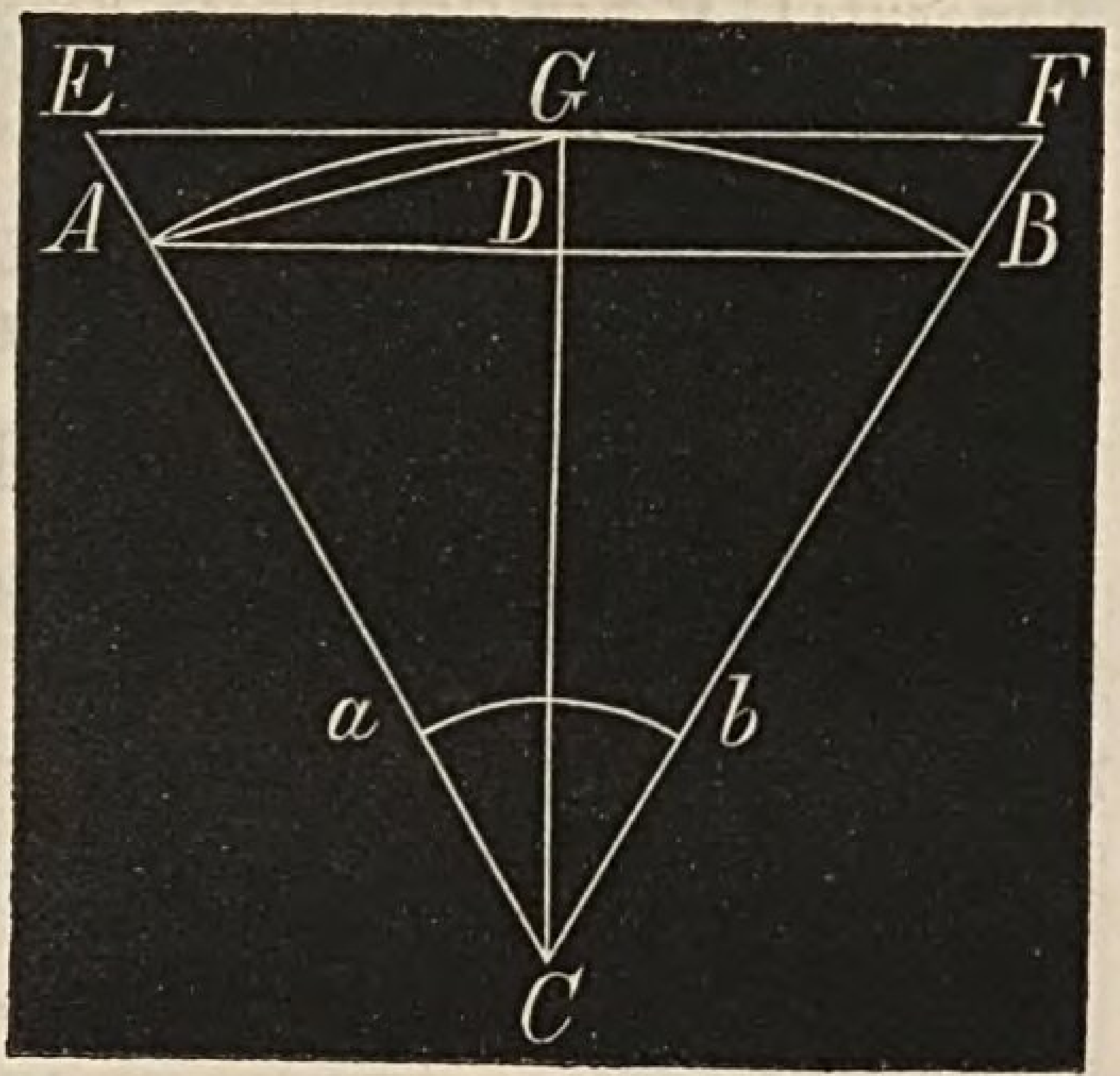
$$C'' = 0{\cdot}06144\ D \quad \ldots\ldots 3).$$

Für D = 8000 Klft. folgt C'' = 491''.56 = 8'11''.56.

Hat der Parallelismus der vertikalen Linien auf die Genauigkeit der Messung einen Einfluß, so wird es auf den Grad der Schärfe ankommen, den man bei der Messung erreichen soll, ob man zwei vertikale Linien in einer gegebenen Distanz als parallel annehmen kann oder nicht.

Nachdem der scheinbare Horizont auf den zu dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht steht, so läßt sich leicht aus dem Vorhergehenden zeigen, daß zwei zu demselben wahren Horizonte gelegte scheinbare Horizonte streng genommen nicht parallel sind, sondern gegen einander unter demselben Winkel geneigt sind, unter welchem sich die betreffenden Halbmesser der Erde schneiden.

§. 9. Bei so großer Ausdehnung der Erde, wo der Halbmesser 3356922 W. Klft. beträgt, wird offenbar ein, im Verhältniß der ganzen Peripherien, kleiner Bogen eines größten Kreises als eine Gerade betrachtet werden können; denn ist Fig. 1 der bekannte Bogen AB=D, der Erdhalbhalbmesser AC=r, der halbe Winkel am Mittelpunkte $\frac{ACB}{2} = \alpha$, die dem ganzen Bogen AB entsprechende Sehne=S, so ist vermöge des vorhergehenden Paragraphes Gleich. 1) $\alpha = \frac{D}{2r}$ und wie die Figur zeigt, $DB = \frac{S}{2} = r \sin. \alpha$, somit $S = 2r \sin. \alpha$ . . . 1).



Nun ist bekanntlich $\sin. \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120}$ . ., und für den vorliegenden Fall $\alpha = \frac{D}{2r}$ ein sehr kleiner Bruch, daher aus 1) $S = 2r \left[\frac{D}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{D}{2r}\right)^3\right]$ da die übrigen Glieder vernachlässigt werden können.

Werden die angezeigten Rechnungsoperationen verrichtet, so erhält man

$$S = D - \frac{D^3}{24r^2} \quad . . . . 2),$$

d. h. der Unterschied zwischen dem Bogen D und der zugehörigen Sehne S ist $D - S = \frac{D^3}{24r^2}$ . . . . 3).

Für D = 8000 und r = 3356922 Klft. gesetzt, ist D — S = 0·0019 Wiener Klafter.

Für D — S = 0·001 angenommen wird D = 6466·86 W. Klft.

Behält man die angenommene Bezeichnung bei, und setzt die mit der Sehne parallele Tangente EF = T, so ist mit der vorigen Rechnung analog $GF = \frac{T}{2} = r$ tang. α; $T = 2r$ tang. α und weil

$$\text{tang} = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} \ldots \text{so ist } T = 2r\left[\frac{D}{2r} + {}^1/_3 \left(\frac{D}{2r}\right)^3\right]$$

nach verrichteter Rechnung $T = D + \frac{D^3}{12r^2}$ . . . . 4),

somit der Unterschied zwischen der Tangente E F und dem Bogen A B

$$T - D = \frac{D^3}{12r^2} \quad . . . . 5).$$

Hat D und r die obigen Werthe, so ist dieser Unterschied $=0\cdot00379$ W. Klft. Für $T-D=0\cdot001$ angenommen wird $D=5132\cdot75$ Klft. Wird aber $D=1000$ Klft. gesetzt, so ist der Unterschied zwischen dem Bogen und der Sehne, ferner zwischen der Tangente und dem Bogen beinahe Null, er hat erst in der 5. Dezimalstelle eine bedeutende Ziffer, woraus folgt, daß bei dieser Länge des Bogens statt seiner auch die Tangente oder die Sehne gesetzt, somit der Bogen als eine gerade Linie betrachtet werden kann.

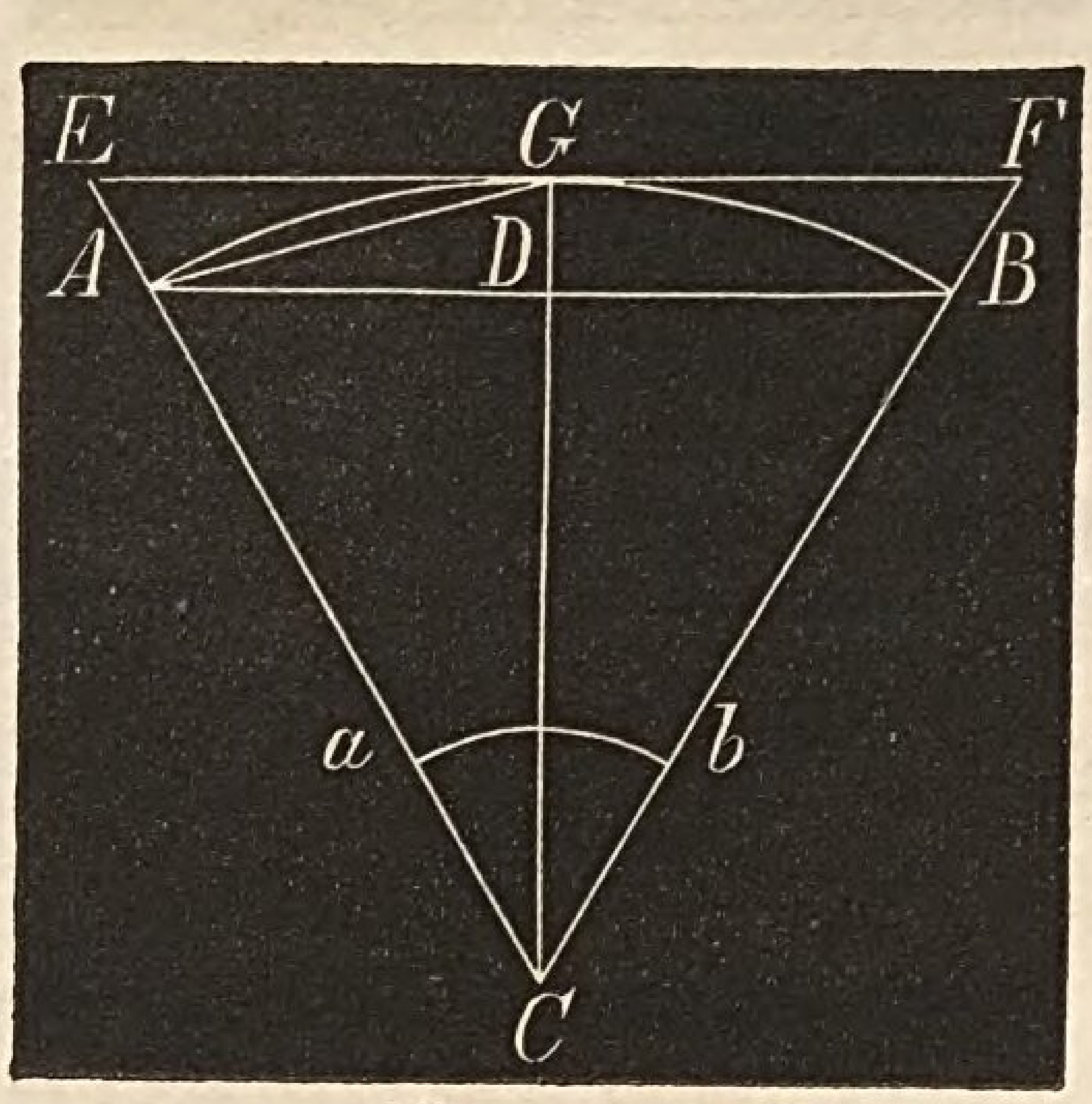
Wollte man nur zwischen dem halben Bogen BG und der entsprechenden Tangente GF den Unterschied berechnen, so bezeichne man GB mit d, und GF mit t, so ist $T=2t$, $D=2d$, somit aus der Gleichung 5)

$$t-d=\frac{d^3}{3r^2} \;\ldots\; 6).$$

Für $t-d=0\cdot001$ angenommen, wird $d=3233\cdot44$ Klft.

§. 10. Man darf aber durch den Umstand, daß die Länge der Sehne, des Bogens und der Tangente wenig differirt, sich nicht veranlaßt finden zu schließen, daß diese drei Linien identisch sind, denn wie die Fig. 1 zeigt, entfernt sich die Tangente immer mehr und mehr von dem zugehörigen Bogen.

Betrachtet man EF und AGB als den Durchschnitt des scheinbaren und wahren Horizontes mit der Ebene ECF, so ist FB der Abstand beider in der Entfernung BG. Zufolge eines bekannten Satzes ist $FB:FG=FG:(2\,BC+FB)$, oder wenn die zu suchende Größe $FB=w$, $GF=t$ und $BC=r$ gesetzt wird, $w:t=t:(2r+w)$, woraus $w=r\pm\sqrt{t^2+r^2}$, und wenn die Wurzelgröße auf drei Glieder entwickelt, ferner weil w nicht negativ sein kann, nur das obere Zeichen beibehalten wird, so ist $w=\frac{t^2}{2r}-\frac{t^4}{8r^3}$, nun ist §. 9 gleich 6)



$$t=d+\frac{d^3}{3r^2},\ \text{daher}\ w=\frac{1}{2r}\left[\left(d+\frac{d^3}{3r^2}\right)^2-\frac{1}{4r^2}\left(d+\frac{d^3}{3r^2}\right)^4\right];$$ werden die angezeigten Potenzen entwickelt, und weil d gegen r klein ist, nur die 2. und 4. Potenz von d beibehalten, so folgt

$$w=\frac{d^2}{2r}+\frac{5}{24}\frac{d^4}{r^3} \;\ldots\; 1),$$

wobei d den Bogen BG oder AG bedeutet.

Wird $d=4000$ Klft. und für r der bekannte Werth gesetzt, so ist $w=2\cdot383$ W. Klft.; $d=200$ Klft. gesetzt, ist $w=0\cdot43$ W. Zoll.

Obschon also, wie in §. 9 gezeigt worden ist, die Sehne, der Bogen und die Tangente nahe gleich lang sind, so sind sie doch nicht eine und dieselbe Linie; weil aber der Bogen AG mit AD und EG als gleich zu betrachten ist, so können AGD und AGE als zwei gleichschenkliche kongruente Dreiecke angesehen werden.

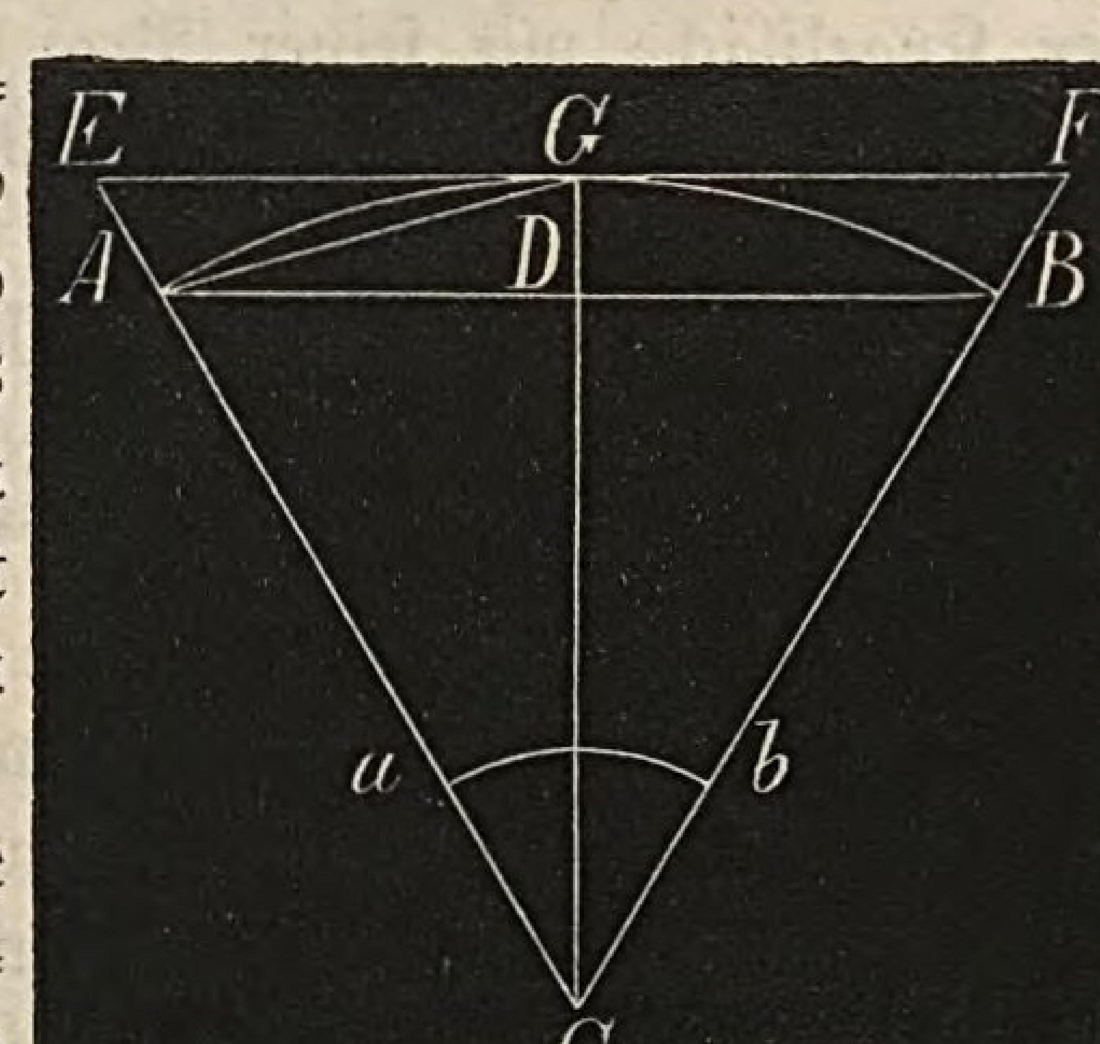
Die Größe FB = w wird der Abstand des scheinbaren Horizontes von dem wahren genannt; und weil die Erhöhungen über die Meeresfläche im Verhältniß des Erdhalbmessers zu unbedeutend sind, so ann dieser Abstand, wenn der wahre Horizont durch einen noch so hohen Punkt der Erde gelegt werden sollte, aus der Formel 1) mit hinreichender Schärfe berechnet werden, wenn in dieser der Halbmesser der Erde belassen wird. Auch ist leicht einzusehen, daß dieser Abstand beider Horizonte bei derselben Entfernung vom Berührungspunkte nach allen Seiten gleich ist; und daß bei kurzen Distanzen zwischen dem wahren und scheinbaren Horizonte kein Unterschied zu machen, also beide für identisch zu betrachten sind.



§. 11. Es sei Fig. 2 A ein Punkt der Erdoberfläche, C ihr Mittelpunkt und FD ein scheinbarer Horizont durch den Punkt D; wird nun der Halbmesser AC so weit verlängert, bis er den scheinbaren Horizont in F trifft, so nennt man F die Projektion von A auf den scheinbaren Horizont von D; da aber der Punkt, durch welchen der scheinbare Horizont gelegt ist, gewöhnlich auf eine andere Art unter der Benennung Standpunkt bekannt gemacht wird, so sagt man der Kürze halber: F ist die horizontale Projektion von A.

Bestimmt man bei geraden Linien die Projektion der Endepunkte, bei krummen Linien so viele Punkte, daß jedes einzelne Stück derselben als eine Gerade betrachtet werden kann, so erhält man die horizontale Projektion von geraden oder krummen Linien, zugleich auch die Projektion der von den Linien begränzten Fläche.

Durch die horizontale Projektion einer Linie, die mit der projizirten immer in einer vertikalen Ebene liegt, ist die horizontale Entfernung ihrer Endepunkte bestimmt; so ist EF die horizontale Distanz für alle Linien, die ihre Endepunkte in den Geraden CF und CE haben. Die im §. 9 abgeleitete Formel 6) enthält auch die Antwort auf die Frage: um wie viel differirt der Bogen eines größten Kreises der Erde von seiner Projektion auf den durch einen seiner Endepunkte gelegten scheinbaren Horizont? denn wie die Fig. 1 zeigt. ist GF die horizontale Projektion von GB, und wie aus dem §. 9 angeführten Beispiele zu ersehen, ist dieser Unterschied nicht bedeutend; ein Bogen von 3233·43 Klft. ist von seiner Projektion nur um 0·001 Klft. verschieden.



§. 12. Nachdem vermöge des obigen Paragraphes der Unterschied zwischen einem Bogen und seiner horizontalen Projektion so gering ist, so läßt sich auch vermuthen, daß die Fläche eines sphärischen Polygons von ihrer Projektion auf einen scheinbaren Horizont, welcher durch einen Punkt des Polygons selbst gelegt ist, nicht bedeutend sein könne.

Um aber diesen für die praktische Geometrie wichtigen Gegenstand nicht mit einer bloßen Vermuthung abzufertigen, wollen wir der Einfachheit halber annehmen, in der Fig. 1 sei G ein Punkt der Erdkugel, zu welchen ein

scheinbarer Horizont EF gelegt worden ist; parallel mit diesem Horizonte sei die Kugelfläche durch eine Ebene ADB geschnitten, und die Fläche des Kugelabschnittes AGB auf die tangirende Ebene projizirt worden.

Die Projektion des Abschnittes ist die Fläche eines Kreises vom Halbmesser EG; bezeichnet man den Bogen AG mit d, seine Sehne mit a, die Tangente EG mit t, den Halbmesser der Erde mit r, die Oberfläche des Kugelabschnittes mit f, die ihrer Projektion mit F, so ist (Gleich. 2 §. 9) $a = d - \frac{d^3}{24r^3}$; und nach einem bekannten Satze $f = a^2\pi$, daher wenn für a der Werth substituirt wird, $f = \left(d - \frac{d^3}{24r^2}\right)^2\pi$. Vermöge Gleichung 6, §. 9 ist $t = d + \frac{d^3}{3r^2}$ und $F = t^2\pi$, daher $F = \left(d + \frac{d^3}{dr^2}\right)^2\pi$ und $F - f = \left(d + \frac{d^3}{3r^2}\right)^2\pi - \left(d - \frac{d^3}{24r}\right)^2\pi$; nach verrichteter Rechnung $F - f = \frac{3d^4\pi}{4r^2}$ ..... 1).

Wird d zu 6000 Klft. angenommen, so ist F — f = 271·0 Quad. Klaft. Würde die Fläche des Kugelabschnittes nicht auf den durch ihren Mittelpunkt gelegten Horizont, sondern auf eine um 400 Klaft. höhere, aber mit diesem parallele Ebene projizirt, so würde der Unterschied F — f = 271·32 Quad. Klaft. sein. Die wahre Fläche f (wenn d = 6000 Klft. ist) beträgt 7·0686 Quad. Meilen, der oben ausgewiesene Unterschied ist somit nahe zwei Milliontel des Ganzen; daher folgt, daß ein Stück der Kugelfläche der Erde von nahe 7 Quad. Meilen auf einen durch ihre Mitte gelegten scheinbaren Horizont projizirt, mit der Projektion als gleich groß angenommen werden kann; da aber diese Differenz von der 4. Potenz des Bogens abhängt, so nimmt dieser Unterschied für größere Bögen bedeutend zu.

§. 13. Die Absicht, in welcher eine Messung der Erdfläche vorgenommen wird, kann sehr verschieden sein. Sehr häufig wird der Flächeninhalt eines Theiles zum Behufe ökonomischer Zwecke gesucht. Z. B. zur Ausmittlung des Bodenertrages; in diesem Falle geht man von dem Erfahrungssatze aus, daß alle größeren Gewächse in vertikaler Richtung wachsen, und schließt aus diesem, daß der Ertrag eines Hügels unter gleichen Umständen eben derselbe ist, wie der jenes Theiles der Kugelfläche, welchen dieser Hügel einnimmt, und da ein solches Stück der Kugelfläche mit seiner Projektion als gleich groß angenommen werden kann, so wird der Werth eines Grundstückes größten Theils nach der Ausdehnung seiner Projektion auf einen scheinbaren Horizont beurtheilt. In Folge obiger Annahme wird in jenen Fällen, wo die Messung eines Theiles der Erdfläche im Auftrage der Oekonomie Statt findet, von den Unebenheiten des Bodens abstrahirt, und nur die horizontale Projektion dieses Theiles der Erdfläche gesucht.

Es könnte aber die Aufgabe gestellt werden, den Flächeninhalt eines größeren, übrigens wie immer begränzten Theiles der Erdfläche zu bestimmen (die Erde als Kugel von dem §. 6 erwähnten Halbmesser betrachtet); in diesem Falle wird abermals von den Unebenheiten der Erde abstrahirt, und nur die horizontale Projektion der zu bestimmenden Fläche gesucht, die man dann auf die Horizonte von mehreren Punkten bestimmt.

In beiden Fällen erreicht man also den Zweck, wenn nur die horizontale Projektion der einzelnen Theile dieser Fläche gefunden ist.

§. 14. Die Resultate einer Messung werden in der Praxis selten sogleich, als sie gefunden wurden, benützt, sondern fast immer auf irgend eine Art für den nachfolgenden Gebrauch aufbewahrt. Das einfachste Mittel besteht darin, die Resultate in derselben Ordnung aufzuschreiben, als sie erhalten werden; allein das bloße Aufschreiben der Daten gewährt keine Uebersicht der gemessenen Größe, diese Art ist also mit einigen Unbequemlichkeiten und Unzulänglichkeiten verbunden und höchstens dann anwendbar, wenn nur einige Linien oder Winkel gemessen werden.

Jener Uebelstand wird größten Theils beseitiget, sobald man zu der Tabelle, in welcher die Quantität der unmittelbar gemessenen Größen aufgezeichnet ist, noch einen Entwurf beilegt, aus welchem die gegenseitige Lage derselben ersichtlich wird.

Diesen, der Wirklichkeit sich nur nähernden Entwurf nennt man Skizze, Croquis oder Brouillon.

Soll der Flächeninhalt eines Theiles der Erdkugel bestimmt werden, so ist vermöge des vorhergehenden Paragraphes die größte Schwierigkeit überwunden, sobald die horizontale Projektion dieses Theiles gefunden ist; oder sobald nur ein der horizontalen Projektion des zu vermessenden Theiles ähnliches Polygon auf einer Ebene (das Papier) konstruirt ist. Zweckmäßig ist es, schon bei der Messung darauf bedacht zu sein, die Daten so zu erhalten, daß sie sogleich zu der Konstruktion des ähnlichen Polygons geeignet sind.

Da dieses verjüngte Polygon und die horizontale Projektion des zu vermessenden Theiles der Erdfläche einander ähnlich, somit die Winkel bei beiden wechselweise gleich sind, so können diese bei dem nachfolgenden Gebrauche aus der Konstruktion entnommen werden, man braucht somit in dieser nur die Längen der gemessenen Linien anzugeben; und dieß kann auf eine zweifache Art geschehen; entweder dadurch, daß die wahren Längen unmittelbar auf die Seiten des verjüngten oder konstruirten Polygons aufgeschrieben werden, diese Zahlen nennt man Koten (Coté, Seite) oder dadurch, daß auf die Ebene, auf welcher das Polygon konstruirt ist, zugleich auch der bei der Messung der Linien gebrauchte Maßstab sammt aliquoten und vielfachen Theilen in demselben Verhältnisse aufgezeichnet wird, in welchem die Linien des Polygons aufgetragen worden sind.

Diesen aufgezeichneten Maßstab, der natürlich nur ein bekannter aliquoter Theil des bei der Messung gebrauchten ist, nennt man den verjüngten Maßstab.

Ist also von der horizontalen Projektion des zu vermessenden Theiles ein ähnliches Polygon konstruirt und der verjüngte Maßstab hingezeichnet, so brauchen die Seiten nicht kotirt zu werden, da sodann die Polygonseiten mit Hilfe dieses Maßstabes gefunden werden.

Dieses verjüngte Polygon vereinigt in sich mehrere Vortheile; die wesentlichsten davon sind: aus ihm ist nicht nur die Verbindung oder der Zusammenhang der gemessenen Stücke ersichtlich, aus ihm kann auch die Quantität der Größen wieder entnommen werden; überdieß können einige Stücke, die vielleicht nicht direkt gemessen werden konnten, durch die Konstruktion bestimmt werden, ferner, da das konstruirte Polygon und die horizontale Projektion der zu bestimmenden

Fläche einander ähnlich sind, so können durch dieses Mittel auch jene Personen von der gemessenen Fläche eine Vorstellung erhalten, welche dieselbe in natürlicher Größe nicht gesehen haben, insbesondere wird das verjüngte Polygon bei der Berechnung des Flächeninhaltes gute Dienste leisten, und endlich können in dieser Zeichnung alle jene Veränderungen ersichtlich gemacht werden, die man in der natürlichen Fläche vorzunehmen beabsichtiget.

Wir haben hier vorausgesetzt, daß die horizontale Projektion der einzelnen Flächen mittelst der gemessenen Daten konstruirt werde, was auch oft wirklich Statt findet, da aber diese Konstruktion so häufig vorkommt, so war man auf Mittel bedacht, die horizontale Projektion der Flächen ohne vorhergegangene Messung, also unmittelbar zu erhalten, und bestimmt erst aus der Projektion nach Erforderniß entweder die Quantität der Linien, Winkel oder den Flächeninhalt selbst.

Bei der Konstruktion der horizontalen Projektion der Flächen begnügt man sich nicht, blos die Gränzen der einzelnen Theile (als die Gränzen der Felder, Waldungen, Häuser ꝛc. mit einem Worte der Parzellen, projizirt zu haben, sondern ist bemüht, um die Uebersicht möglichst zu erleichtern, auch die eben stattfindende Benützung des Bodens (Kulturgattung), die merkwürdigen daselbst vorkommenden Objekte ꝛc. durch konventionelle Zeichen ersichtlich zu machen und gewöhnlich auch noch durch Farben zu unterscheiden.

Eine im verjüngten Maßstabe detaillirt gezeichnete horizontale Projektion eines Theiles der Erdfläche nennt man einen Grundriß, Mappe, Situationsplan, und macht noch bei den Plänen einen Unterschied hinsichtlich der Kulturgattung, theilt sie in ökonomische und Stadtpläne, Forstkarten ꝛc.

Zusatz. In dem Situationsplane muß also die Gränze jedes einzelnen Grundstückes, jedes Hauses ꝛc. ersichtlich sein; und dies ist das charakteristische Merkmal eines Situationsplanes, nicht aber die Anzahl Blätter, welche zu einem Ganzen gehören.

Der Theil der praktischen Geometrie, welcher einen größeren oder kleineren Theil der Erdoberfläche zu bestimmen und zu diesem Behufe von den gesammten Parzellen einen Situationsplan zu konstruiren lehrt, nennt man die Flächenmessung, oder mit dem althergebrachten Worte Feldmeßkunst.

Die Flächenmessung ist also das Resultat der Linien- und Winkelmessung.

§. 15. Wie bereits im §. 5 nachgewiesen worden ist, wird die Kugelgestalt der Erde, diese als Ganzes betrachtet, durch die auf ihr vorkommenden Erhöhungen nicht wesentlich geändert und man kann in diesem Falle annehmen, daß alle Punkte ihrer Oberfläche von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind; dies ist aber nicht der Fall, sobald man einen Theil der Erdfläche für sich, also abgesondert von dem Ganzen, betrachtet, dieser weicht — die Meeresfläche ausgenommen — oft bedeutend von der Kugelfläche ab.

Die Entfernung eines Punktes der Erde von ihrem Mittelpunkte wird seine absolute Höhe genannt, demnach sind gleich weit vom Mittelpunkte entfernte Punkte auch gleich hoch, und bei zwei Punkten heißt der weiter entfernte der höhere oder obere, der andere dem Mittelpunkte näher gelegene der untere, tiefere, manchesmal auch der Fußpunkt.

Der Unterschied zwischen den absoluten Höhen zweier Punkte (diese mögen in einer vertikalen Linie liegen oder nicht) wird die relative Höhe der beiden Punkte genannt, und es versteht sich von selbst, daß die einzelnen Unterschiede groß oder klein sein können.

Da wegen der Größe des Erdhalbmessers die absolute Höhe eines Punktes stets durch große Zahlen — also für die Praxis unbequem — anzugeben wäre, so wird immer nur die relative Höhe zweier Punkte bestimmt und schlechthin die Höhe des oberen Punktes genannt, dabei ist der andere Punkt entweder willkürlich gewählt oder durch Umstände bestimmt.

Weil ferner der Unterschied zwischen zwei Größen positiv oder negativ sein kann, so spricht man auch von einer positiven oder negativen Höhe, und versteht darunter die vertikale Richtung im ersten Falle von dem untern Punkte nach aufwärts (auch Höhe im engeren Sinne), im zweiten von dem oberen Punkte nach abwärts (auch die Tiefe genannt).

Der Winkel, welchen eine Linie mit ihrer horizontalen Projektion bildet, heißt ein Höhen- oder Tiefenwinkel, je nachdem die Linie oberhalb oder unterhalb ihrer Projektion liegt; gewöhnlich liegt der Scheitel eines solchen Winkels in dem Berührungspunkte des scheinbaren und wahren Horizontes. Das Komplement eines Höhenwinkels wird die Zenith-Distanz genannt, bei dem Höhenwinkel ist also der eine Schenkel horizontal, bei der Zenith-Distanz dagegen vertikal; die Zenith-Distanz eines Tiefenwinkels ist daher größer als ein rechter Winkel.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Höhe zweier Punkte von ihrer horizontalen Entfernung unabhängig ist, was auch der Sprachgebrauch bestätiget; so z. B. sagt man: der Gipfel des Watzmann ist 6750 Pariser Fuß über dem Universitätsplatz von Salzburg; der Jwahir 24160 Pariser Fuß über der Meeresfläche, oder ein Punkt A ist um 2 Fuß tiefer als ein anderer B, ohne die Entfernung des Watzmann von Salzburg, des Jwahir von der Meeresfläche oder A von B als bekannt vorauszusetzen oder anzugeben.

Der Theil der praktischen Geometrie, in welchem die Höhe zweier Punkte zu finden gelehrt wird, nennt man die Theorie des Höhenmessens.

§. 16. Der Zweck der praktischen Geometrie besteht darin, uns eine vollkommene Kenntniß von den räumlich ausgedehnten Größen der Erde zu verschaffen.

Zu diesen Größen gehören auch die verschiedenen Unebenheiten eines größeren oder kleineren Theiles der Erdfläche, und ihre genaue Bestimmung ist oft von höchster Wichtigkeit, da sie auf manche Unternehmungen fördernd oder hindernd einwirken.

Zur genauen Bestimmung der Unebenheiten eines größeren oder kleineren Theiles der Fläche reicht die bloße Angabe der Höhen einzelner Punkte nicht aus, da es nicht gleichgültig ist, ob zwei Punkte, deren Höhe z. B. 10 Fuß beträgt, eine oder 1000 Klafter von einander entfernt sind; aber selbst durch die Angabe der Höhen und der horizontalen Entfernung einzelner Punkte sind die Unebenheiten nicht vollkommen bestimmt, außer dann, wenn die Punkte so nahe aneinander liegen, daß die zwischen ihnen an der Erdfläche gezogene Linie eine gerade ist.

§. 17. Soll auf den Unebenheiten der Erde eine wie immer gekrümmte

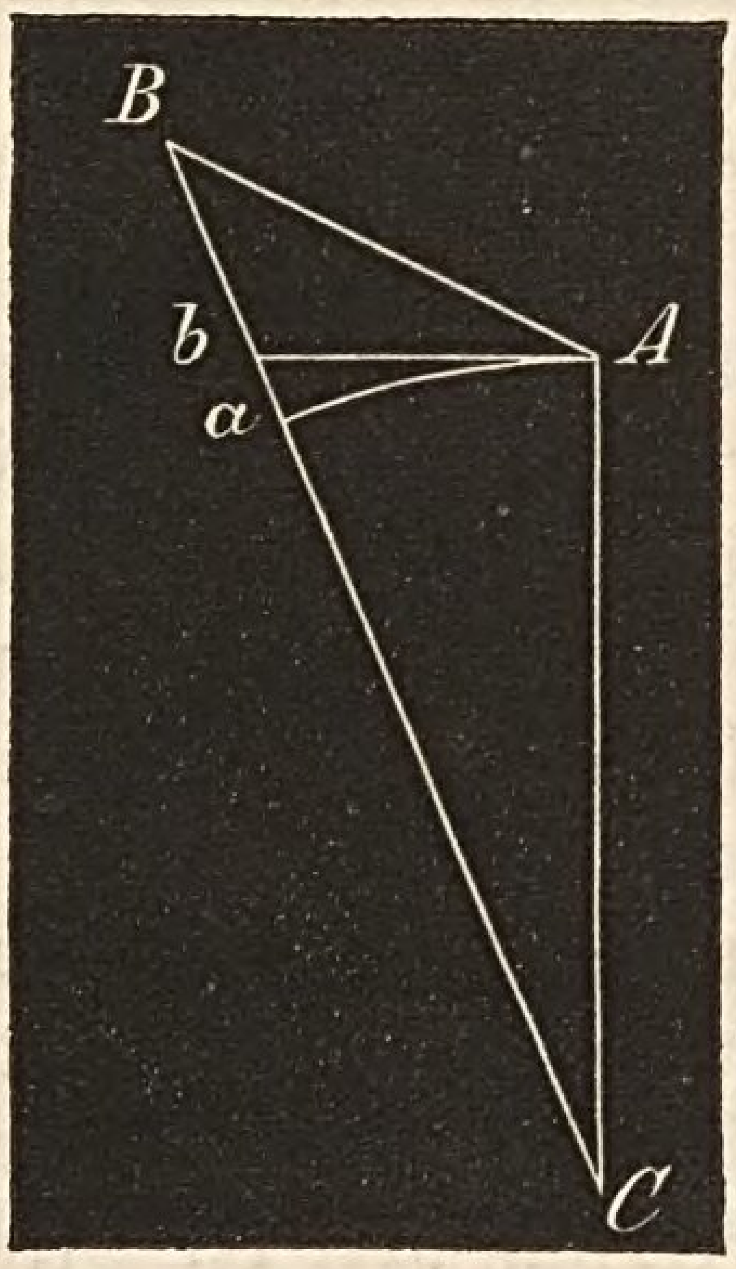
Linie (Trace) bestimmt werden, so muß diese vorerst in so viele Stücke getheilt sein, daß jedes einzelne als eine Gerade betrachtet werden kann (wobei es wieder von dem Zwecke der Messung abhängen wird, wie weit man sich bei der Theilung dem Begriffe einer geraden Linie nähern soll), und hat sodann die ganze Trace bestimmt, sobald bekannt ist:

1. Die Länge jedes einzelnen Stückes.

2. Der Neigungswinkel dieses Stückes gegen den durch einen seiner Endepunkte gelegten wahren Horizont.

3. Die horizontale Projektion jener Winkel, unter welchen sich zwei aufeinander folgende Stücke der Trace schneiden.

Hinsichtlich des zweiten Punktes muß noch eine Bemerkung beigefügt werden. Ist Fig. 3 AB ein solches Stück der Trace, Aa der wahre, Ab der scheinbare Horizont durch den Punkt A, so kann die Linie AB nie eine solche Länge haben, daß ihre Projektion auf den wahren Horizont, nämlich Aa nicht als eine gerade Linie betrachtet werden dürfte, und dann ist BAa ihr Neigungswinkel gegen den wahren Horizont; dieser Winkel ist etwas verschieden von jenem, welchen AB mit dem scheinbaren Horizonte Ab bildet.



Nachdem Ba die Höhe des Punktes B über A ist, so liegt dieser Neigungs-Winkel BAa in einem rechtwinklichen Dreiecke, von welchem die vertikale Kathete die Höhe, die andere Kathete die horizontale Distanz und die Hypothenuse die wahre Entfernung der Endpunkte ist.

Jeder einzelne Neigungswinkel wird selten nach Geraden, sondern gewöhnlich durch die Höhe und horizontale Entfernung der Endpunkte eines Stückes bestimmt. Das Verhältniß der Höhe zur Entfernung oder was dasselbe ist, die Tangente des Neigungswinkels, wird das Gefäll dieser Linie genannt und entweder durch einen gemeinen Bruch oder in Prozenten der Länge ausgedrückt.

Da die Tangente des Neigungswinkels von der Höhe beider Punkte abhängt, und diese (§. 15) positiv oder negativ sein kann, während man die horizontale Entfernung immer als positiv betrachtet, so folgt, daß das Gefälle und die Höhe stets gleiche Bezeichnung haben, also zugleich positiv oder negativ sind.

§. 18. Sind die nöthigen Bestimmungsstücke der krummen Linie gemessen worden, so wird des nachfolgenden Gebrauches wegen gefordert, die Linie mittelst der gefundenen Daten durch Zeichnung zu versinnlichen; um nun diese in verschiedenen Ebenen liegenden Stücke auf eine Ebene zu bringen, denkt man sich durch jedes einzelne eine vertikale Ebene gelegt, und diese auf eine Ebene ausgebreitet (umgelegt). Hiedurch erhält man ein ebenes Polygon, dessen Seiten die einzelnen Theile der darzustellenden Trace in ihrer wahren Länge sind, und die Neigungswinkel gegen den wahren Horizont beibehalten haben.

Die Zeichnung einer, in eine vertikale Ebene umgelegten krummen Linie in verjüngtem Maßstabe nennt man das Längenprofil oder den vertikalen Längendurchschnitt.

§. 19. Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß eine krumme Linie auf eine einfache Art bestimmt und dargestellt werden kann, vorausgesetzt, daß die Höhe und Entfernung der einzelnen Punkte leicht zu messen ist; etwas umständlicher ist die Bestimmung der Unebenheiten einer Gegend und würde es noch in einem höheren Grade sein, wenn die Oberfläche mit der größten Schärfe angegeben werden sollte.

Jedenfalls ist der Zweck der Messung erreicht, wenn man

1. die horizontale Projektion der Unebenheiten im verjüngten Maßstabe, und

2. die Neigungswinkel der verschiedenen Flächen gegen einen willkürlich gewählten wahren Horizont bestimmt hat, und da man, wie wir in der Folge sehen werden, Mittel ersonnen hat, die Neigungswinkel der Flächen auf einer Ebene (dem Papiere) ersichtlich zu machen, so werden beide Erfordernisse zur Bestimmung der Unebenheiten durch einen Situationsplan erreicht, in welchem die Neigungswinkel der Flächen auf irgend eine Art angegeben sind, wobei es der Willkür unbenommen ist, auch noch die Gränzen und Kultursgattung der einzelnen Parzellen in diesem Grundrisse anzuzeigen.

Die im verjüngten Maßstabe gezeichnete horizontale Projektion der Unebenheiten, in welcher auch noch die Neigungswinkel der projizirten Flächen gegen einen wahren Horizont ersichtlich gemacht sind, nennt man eine topographische Karte (von τοπος Ort, Gegend, Land, und γραφειν schreiben).

Das charakteristische Merkmahl einer topographischen Karte ist die Angabe der Neigungswinkel der dargestellten Flächen.

Der Theil der praktischen Geometrie, welcher die Unebenheiten der Erdoberfläche zu bestimmen und zu diesem Zwecke die Profile und topographische Karten zu verfertigen lehrt, wird „Theorie des Nivellirens" genannt.

§. 20. Durch die bisher erklärten drei Theile ist der Umfang der Geodäsie noch nicht erschöpft, denn keine von ihnen ist geeignet, die Dimensionen der ganzen Erde, diese entweder als Kugel oder als Ellipsoid betrachtet, und den geographischen Ort eines Punktes auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, und doch wird man leicht einsehen, daß zur vollständigen Bestimmung der Erde außer ihren Dimensionen auch die Position eines Ortes angeben werden müsse.

Die Beantwortung der zwei Fragen: wie die Dimensionen der Erde und wie die Position irgend eines Punktes ihrer Oberfläche zu bestimmen sind, bildet einen eigenen Theil der praktischen Geometrie, welchen man höhere praktische Geometrie nennt, während man das Flächenmessen, Höhenmessen und Nivelliren zu der niederen Geometrie zählt.

Die höhere praktische Geometrie wird nicht etwa deshalb so genannt, weil sie sich zur Ableitung ihrer Resultate der höheren Mathematik bedient, dies geschieht in der niederen auch; sondern weil die richtige Lösung obiger Aufgaben eine höhere mathematische und astronomische Bildung überhaupt voraussetzt, die ein gewöhnlicher Geometer nicht in diesem Grade braucht; denn sind die Dimensionen der Erde einmal bestimmt, so bedient man sich der erhaltenen Resultate, ohne

darnach zu fragen, wie sie gefunden worden sind, und was die Angabe der Position eines Punktes betrifft, so wird um dieselbe, weil sie auf die Dimensionen der Parzellen ohne Einfluß ist, der Geometer selten gefragt, und geschieht es auch, so genügt eine beiläufige Angabe, die er aus andern bereits bestimmten Positionen durch Schätzung erhält.

§. 21. So wie man die gemessene Fläche durch einen Situationsplan, die Unebenheiten der Erde durch eine topographische Karte versinnlichen kann, eben so kann verlangt werden, einen Theil der Erdfläche in der Art durch Zeichnung darzustellen, daß in dieser die geographische Länge und Breite der Punkte ersichtlich ist, oder umgekehrt aus dieser die Länge und Breite der Punkte entnommen werden kann. Da man, des bequemen Gebrauches halber, einen sehr großen Theil der Fläche auf ein Blatt darzustellen trachtet, somit den verjüngten Maßstab so wählt, daß selbst die Flächeninhalte der größten Städte im Verhältniß der dargestellten Fläche als Punkte erscheinen, so verschwinden um so mehr die einzelnen Parzellen; die Kulturgattung (Wälder, Sümpfe etc.) kann nur dann ersichtlich gemacht werden, wenn sie in großen Parthien vorkommt, von den merkwürdigen Objekten eines Landes können somit nur die wichtigsten aufgenommen werden.

Die Darstellung eines Theiles der Erdoberfläche, aus welchen die geographische Breite und Länge der Punkte entnommen werden kann, nennt man eine geographische Karte, und unterscheidet, je nachdem diese oder jene Objekte für besondere Zwecke die wichtigsten sind, die Karten unter sich durch Bestimmungsworte, als: Land-, See-, Flußkarten.

Weil aber die dargestellten Punkte auf der Oberfläche der Kugel liegen, und diese auf eine Ebene (dem Papier) nicht genau dargestellt werden kann, so hat man Mittel ersonnen, diesen oder jenen nachtheiligen Umstand so viel wie möglich zu beseitigen, dadurch entstanden verschiedene Methoden, einen Theil der Kugelfläche mehr oder weniger genau auf einer Ebene darzustellen, die geordnet unter dem Namen: Theorie der Kartenkonstruktion oder Chorographie einen Theil der praktischen Geometrie und zwar der höheren ausmachen.

Dieser Paragraph, so auch der §. 14 und §. 19, zeigen, daß es bei der Darstellung der Flächen auf einer Ebene nicht darauf ankommt, wie groß die dargestellte Fläche ist, sondern in welcher Art sie dargestellt wird, und es kann von einem Lande eben so gut ein Situationsplan als eine topographische oder eine Landkarte angefertigt werden.

§. 22. Wenn man das ganze Gebäude der praktischen Geometrie übersichtlich betrachtet, so findet man, daß die Messung der geraden Linien und ebenen Winkel ohne Rücksicht ihrer Lage oder des Zweckes, zu welchem sie gemessen werden, die Basis ist, auf welcher das ganze Gebäude beruht, und man könnte den Theil der praktischen Geometrie, in welchem die Messung dieser Größen gelehrt wird, füglich den vorbereitenden oder theoretischen Theil nennen; die übrigen Theile sind schon das Produkt dieser Elemente.

Ferner folgt aus den §§. 14, 19 und 21, daß das Zeichen kein heterogener, sondern mit dieser Wissenschaft eng verwebter Gegenstand ist.

Erster Abschnitt.

Mittel einen Punkt zu bezeichnen.

§. 23. Die Flächen werden durch Linien, diese durch Punkte begränzt, somit kommt es nur darauf an, Mittel anzugeben, einzelne Punkte der Erde von andern zu unterscheiden, d. i. zu bestimmen.

Einige dieser Punkte sind bereits durch Objekte der Kunst oder der Natur so ausgezeichnet, daß sie sich von allen andern unterscheiden, z. B. die Spitzen der Thürme, Blitzableiter, die Gipfel einzeln stehender Bäume; andere müssen erst durch ein sichtbares Zeichen kenntlich gemacht werden.

Bei der Wahl eines Zeichens hat man hauptsächlich auf die Entfernung Rücksicht zu nehmen, aus welcher es noch gut sichtbar sein soll.

Die gewöhnlichen Mittel, einzelne Punkte auf der Oberfläche der Erde zu bezeichnen, sind folgende:

1. Pflöcke oder Piquets, sie können klein sein, weil sie für eine größere Entfernung durch ein anderes Zeichen sichtbar gemacht werden. Da ihrer oft eine große Anzahl erforderlich ist, so erhält man sie am billigsten aus den gewöhnlichen Dachschindeln. Zur Vermeidung jeder Irrung mit andern ähnlich bezeichneten Punkten werden die Pflöcke nummerirt, und der Punkt, wo ein solcher Pflock eingeschlagen ist, nach der Zahl des Pflockes benannt.

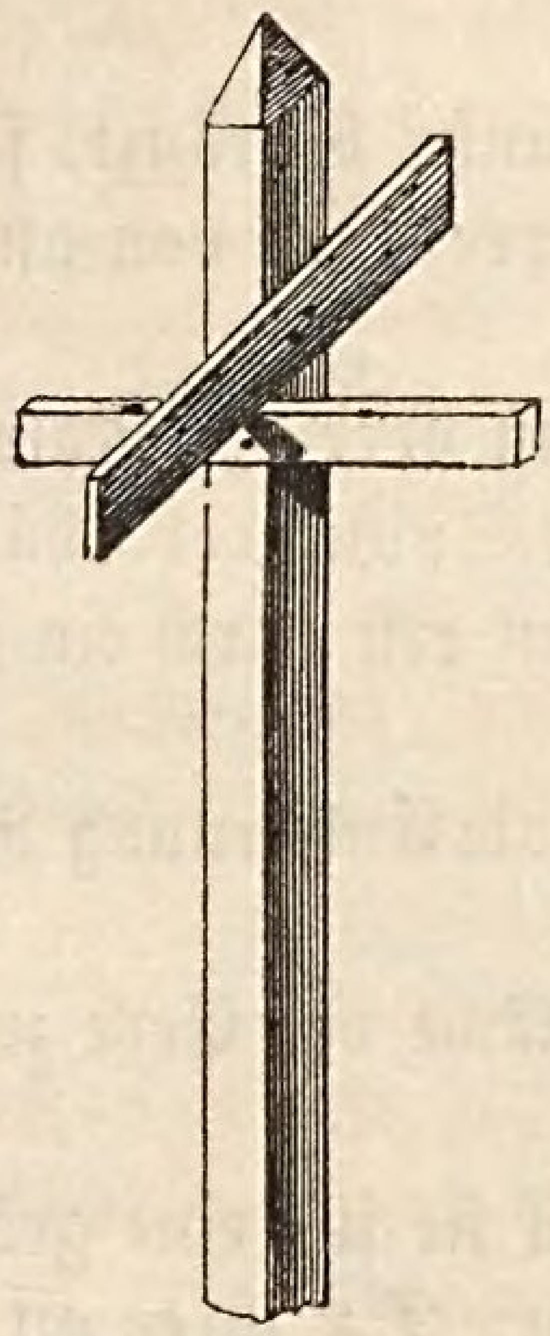
2. Absteckstäbe. Diese sind ungefähr 6 bis 8 Fuß lange und 1 Zoll dicke Stäbe. Um sie leichter in den Boden zu stecken, gibt man ihnen an dem einen Ende eiserne Spitzen. Sie haben die Bestimmung, die so bezeichneten Punkte auf eine kurze Entfernung sichtbar zu machen, und um diesen Zweck vollkommen zu erreichen, werden die Stäbe mit weißer und zinnoberrother Oelfarbe angestrichen, diese zwei Farben reflektiren unter den übrigen das meiste Licht, sind somit in einer größeren Entfernung sichtbar; auch ist der Kontrast zwischen der einen oder der andern dieser Farben und ihrem Hintergrunde bedeutend, wodurch das Sichtbarsein ebenfalls unterstützt wird. Gewöhnlich werden die beiden Farben spiralförmig aufgetragen, besser ist es, sie entweder von Fuß zu Fuß oder von $^1/_{10}$ zu $^1/_{10}$ Klafter zylinderförmig abwechseln zu lassen, weil die so angestrichenen Stäbe zugleich als Maßstäbe benützt werden können.

3. Meßfahnen, oder wegen eines andern Gebrauches, den man von ihnen macht, auch Figurirfahnen genannt; diese sind gewöhnlich 18 bis 24 Fuß lang, 1 bis 2 Zoll dick, unten wie die Absteckstäbe beschlagen, und auf die eben erwähnte Art roth und weiß angestrichen. Sie werden entweder zur Sichtbarmachung der Pflöcke oder zur selbstständigen Bezeichnung der Punkte benützt. Da sie auf eine größere Entfernung sichtbar sein sollen, so bindet man auf jede ein Tuch (Fahnentuch) auf, welches aus zwei gleich großen Stücken weißen und rothen Zeuges zusammengesetzt ist.

Oefters leisten Figurirfahnen von 4 bis 5 Klafter Länge gute Dienste, diese sind des bequemeren Transportes wegen aus zwei Theilen zusammengesetzt.

Das einfachste Mittel dazu sind zwei eiserne Ringe in der Form eines Achters.

4. Signale. Zwar bedeutet das Wort Signal ein Zeichen, somit sind die vorhergehenden Mittel, einen Punkt zu bezeichnen, auch Signale und werden im Allgemeinen auch so genannt; insbesondere versteht man aber unter Signal 3 bis 5 Klafter hohe, 3 bis 4 Zoll dicke Sparren; ihre Bestimmung ist, die Punkte für längere Zeit zu bezeichnen und auf größere Distanzen sichtbar zu machen. Jedes dieser Signale muß, wenn es von seiner Stelle weggenommen worden ist, wieder genau auf denselben Ort gestellt werden können, deßhalb wird das eine Ende nicht in die Erde unmittelbar, sondern in eine 3 bis 4 Fuß lange Verschallung, die in dem Boden vertikal eingegraben ist, eingesetzt, und mit Keilen befestiget. Damit dieses Signal auf bedeutende Entfernungen sichtbar werde, sind oben zwei Bretchen etwa $2 \frac{1}{2}$ Fuß lang und 10 Zoll breit, unter rechten Winkel gegen einander, wie die Fig. 4 zeigt, angenagelt, und das ganze Signal mit Kalk angestrichen.



Um einen Punkt von allen andern auf dieselbe Art bezeichneten zu unterscheiden, werden auf die erwähnten Bretchen arabische oder römische Ziffern mit schwarzer Oehlfarbe in einer Größe (beiläufig 6 Zoll) geschrieben.

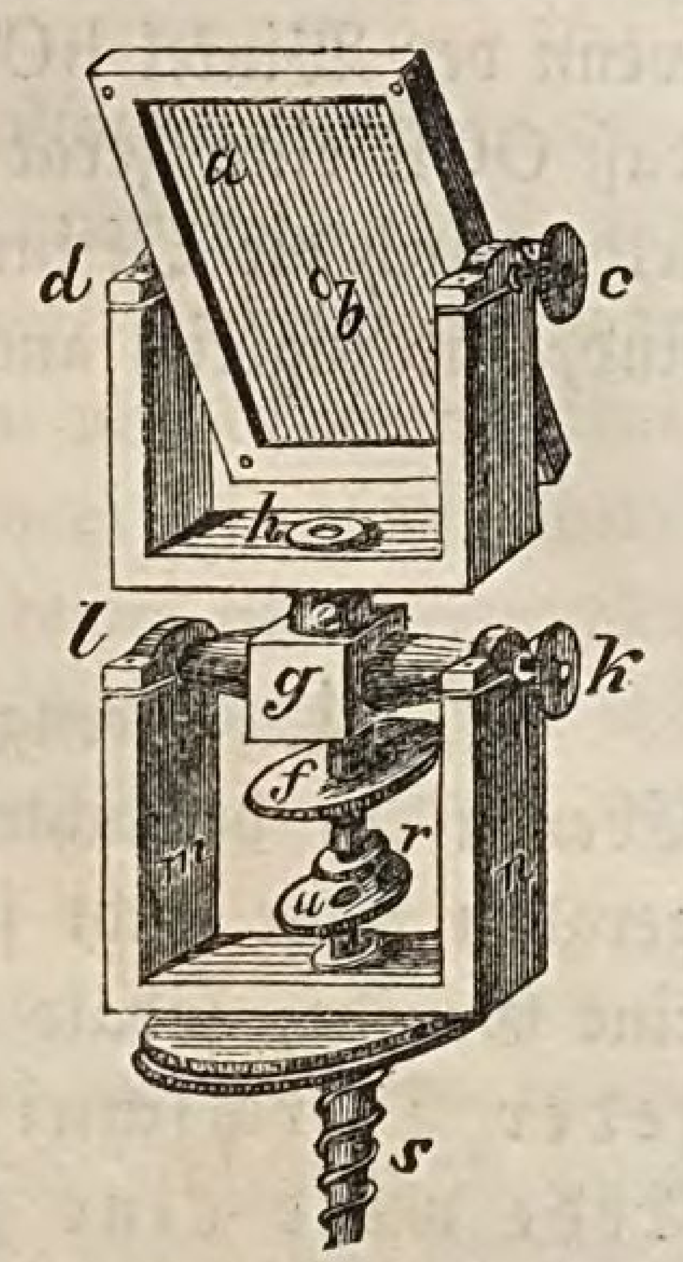
5. Soll das Signal noch für größere Entfernungen sichtbar sein, so wird aus Baumstämmen die Form einer vierkantigen geraden Pyramide errichtet, die Basis ist gewöhnlich zwei Quadratklafter, die Höhe 4 bei Gerüstpyramiden auch über 6 Klafter, der obere Theil mit Brettern verschallt.

Das Signal selbst besteht aus einem Stück eines Baumstammes, etwa 5 Fuß Länge, 1 Fuß im Durchmesser, und wird mittelst eines Senkbleies so gestellt, daß die Achse desselben in der vertikalen Linie liegt, die von dem Scheitel der Pyramide auf die Grundebene gefällt ist, indem (bei allen Signalen) der Fußpunkt der Achse als der bezeichnete Punkt zu betrachten ist. Da die Pyramide durch die ganze Zeit der Messung den festgesetzten Ort nicht zu verlassen hat, so wird der Baumstamm auf 2 bis 3 Fuß unmittelbar in die Erde eingegraben, manchesmal sogar eingemauert.

6. Der Heliotrop. Dieses Instrument reflektirt die Sonnenstrahlen von dem Orte seiner Aufstellung nach einem beliebig gewählten Punkte und dient somit ebenfalls einen Punkt und zwar auf eine große Entfernung sichtbar zu machen. Einen Punkt auf diese Art zu bezeichnen hat zuerst Gauß in Anwendung gebracht, die Einrichtung des hier beschriebenen sehr sinnreichen Instrumentes ist von Steinheil angegeben, den Gauß'schen Heliotrop findet man im 4. Abschnitte beschrieben.

In der Fig. 5 (siehe nächste Seite) ist a ein ebener Glasspiegel etwa 1 Zoll breit und 2 Zoll hoch, der in der Mitte eine vom Amalgam freie kleine Oeffnung b hat, durch welche die auffallenden Strahlen durchgelassen werden. Der Spiegel hat eine von den übrigen Theilen unabhängige Bewegung um die Axe cd; bei c ist die Klemmschraube dieser Bewegung; eine zweite Bewegung hat der Spiegel

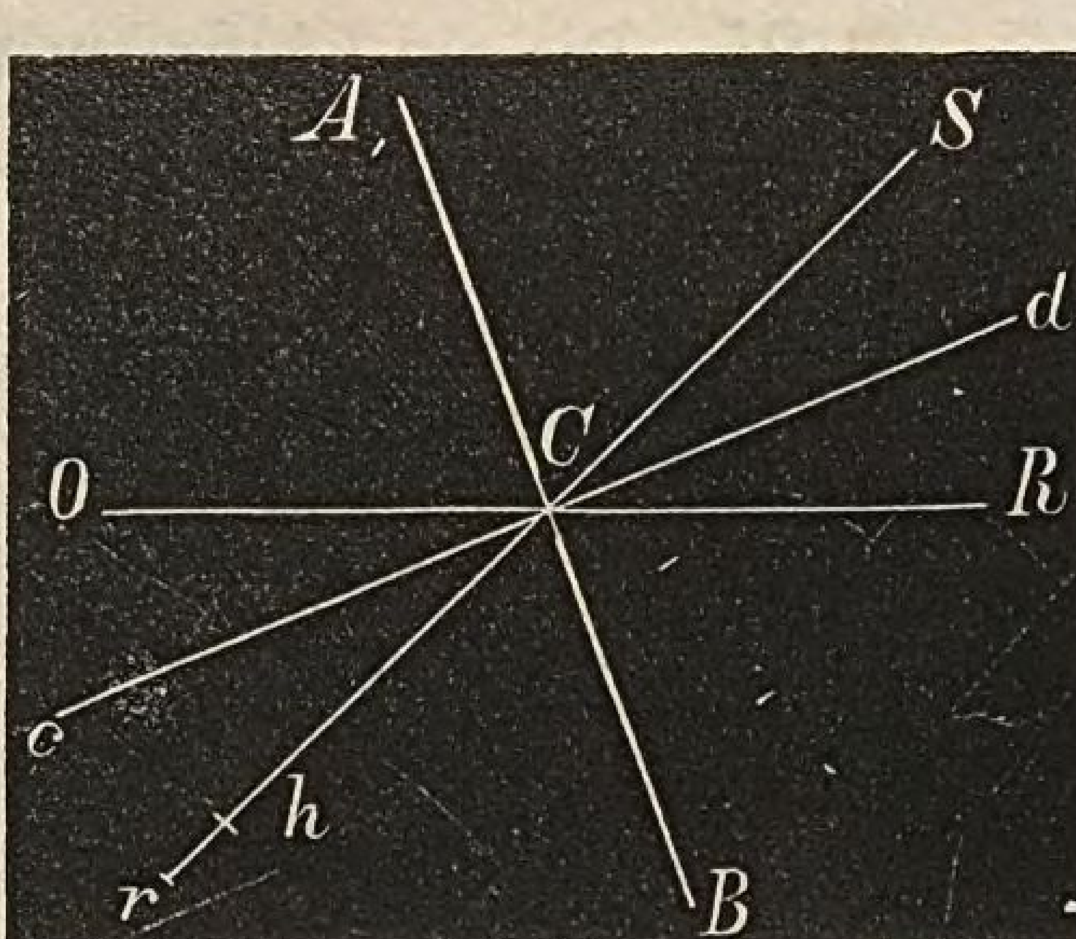
sammt dem Träger cde um die Axe c, diese Axe geht durch den Würfel g und hat bei f ihre Klemmschraube; derselbe Träger cde sammt dem Spiegel läßt sich um die Axe lk drehen und durch die Schraube k nach jeder Drehung feststellen; endlich kann dem ganzen Instrumente acdelkmn noch eine drehende Bewegung ertheilt und durch die Schraube u erhalten werden; s ist eine Baumschraube zur Feststellung des Instrumentes, die letzte erwähnte Bewegung sammt dem Träger mn geht also parallel mit dem Kopfe der Baumschraube von sich.



Die Axe e so auch der Würfel g sind hohl, bei h ist eine Sammellinse von der Größe der Oeffnung b, die Brennweite derselben hr; bei r (im innern) ist eine weiße Ebene. Wird nun der Spiegel so gestellt, daß die Sonnenstrahlen durch die Oeffnung b in der Axe der Sammellinse auffallen, so werden sie auf der Ebene r zu einem Bilde vereint, ein Theil dieser Strahlen wird von der Ebene zurück auf die Linse reflektirt, tritt unter sich parallel aus und erzeugt auf dem Spiegel in b durch Reflexion ein weißes Bild.

Will man nun dieses Instrument gebrauchen, so befestigt man es an dem Punkt, von welchem die Sonnenstrahlen reflektirt werden sollen, lüftet die Klemmschraube u und k und ertheilt dem etwas geneigten Spiegel durch die beiden Bewegungen, einmal um die Axe lk und sammt dem Träger mn um die Axe der Schraube u eine solche Stellung, daß die Sonnenstrahlen, welche auf den belegten Theil des Spiegels auffallen, aber durch die Oeffnung b durchgehen, genau in der Axe der Linse h liegen; diese werden nun bei r zu einem Bilde vereinigt und nach der Reflexion abermals in b an der Rückseite betrachtet ein weißes Bild erzeugen. Ist dieses erreicht, so werden die Schrauben u und k geklemmt, und man hat die Richtung der auffallenden Strahlen festgestellt. Nun werden die Klemmschrauben f und c gelüftet, von der rückwärtigen also belegten Seite des Spiegels durch die Mitte der Oeffnung b der Punkt, wohin die Strahlen reflektirt werden sollen, anvisirt, und der Spiegel a so geneigt, daß der anvisirte Punkt in der Mitte der von r reflektirten Strahlen erscheint, welche letzteren als eine runde weiße Scheibe leicht zu erkennen sind.

Die Theorie, worauf dieses Instrument gegründet ist, ist folgende: Es sei Fig. 6 AB ein Spiegel, der bei C eine von Amalgam freie Oeffnung hat, SC sei die Axe der parallel auffallenden Sonnenstrahlen, Cd das Einfallsloth, SCd der Einfalls- und dCR der Reflexionswinkel; die auf den belegten Theil des Spiegels auffallenden Strahlen werden somit nach R reflektirt. Wenn nun h eine Sammellinse und Cr ihre Axe ist, so wird der Theil, welcher auf die Oeffnung bei C trifft, hier durchgehen durch die Linse zu einem Bilde in r vereinigt und zurück auf die Linse reflektirt werden, tritt somit als ein Strahlenzilinder, dessen Axe hC



ist aus, kommt auf die Glasebene bei C unter dem Einfallswinkel hCe und wird, wenn der Winkel hCe=eCO ist, nach O reflektirt. Nun ist leicht nachzuweisen, daß OCR eine gerade Linie ist; befindet sich somit in O ein Auge, so sieht dasselbe durch die Oeffnung bei C den Punkt R, wohin die Strahlen reflektirt worden sind, und zugleich auch die Strahlen, welche von r durch die Linse h kommen.

Begriff einer geraden Linie.

§. 24. Streng genommen ist eine gerade Linie als der Durchschnitt zweier Ebenen zu betrachten, in der Geodäsie nimmt man jedoch den Begriff einer geraden Linie nicht so genau, und nennt jede auf der Erdoberfläche liegende Linie eine Gerade, sobald durch sie eine vertikale Ebene gelegt werden kann, d. h. jeder Durchschnitt einer vertikalen Ebene mit der Oberfläche der Erde wird eine gerade Linie genannt.

Sind also zwei Punkte einer Linie gegeben, so braucht man nur eine vertikale Ebene durch diese zwei Punkte zu legen, und ihr Durchschnitt mit der Oberfläche der Erde ist die verlangte gerade Linie.

Diese eben erwähnte Operation, eine vertikale Ebene durch zwei gegebene Punkte der Erde zu legen, und ihren Durchschnitt zu bestimmen, nennt man eine gerade Linie abstecken.

Der Umstand, daß jede Linie, sobald sie nur in einer vertikalen Ebene liegt, schon als eine Gerade betrachtet wird, dürfte Manchen zu der Vermuthung veranlassen, daß hiedurch jenen Resultaten jede Genauigkeit mangelt, welche die gerade Linie als ein Element in sich enthalten; für diese wird bemerkt:

1. Daß es dem Geometer in vielen Fällen frei steht, sich ein zu seinen Zwecken taugliches Terrain, nämlich von ziemlich gleichem Gefälle, aufzusuchen, auf welchem er die Linie absteckt, die sich sodann einer Geraden sehr nähert.

2. Daß in vielen Fällen nicht die Länge der abgesteckten Linie, selbst wenn sie auch wirklich eine Gerade wäre, sondern die ihrer Projektion auf einen scheinbaren Horizont gesucht wird, wozu die vertikale Ebene nur als Mittel dient, indem in ihr die gesuchte Projektion liegt, und der Geometer sodann unter der geraden Linie nicht die abgesteckte selbst, sondern die ihrer Projektion versteht.

Abstecken einer geraden Linie.

§. 25. Die am häufigsten vorkommenden Fälle, eine Gerade abzustecken, sind:

1. wenn beide Endpunkte zugänglich sind,
2. wenn der eine Punkt zugänglich, der andere zwar unzugänglich, aber von dem ersten aus sichtbar ist, und
3. wenn beide Punkte unzugänglich sind, aber das zwischen ihnen liegende Terrain frei ist, das heißt zu der beabsichtigten Operation kein Hinderniß darbietet.

Auflösung des ersten Falles.

Stellt man in jedem dieser Punkte einen Absteckstab oder eine Figurirfahne vertikal auf, so ist die Ebene, welche diese zwei Stäbe auf der einen Seite tangirt,

jene Ebene, durch deren Durchschnitt mit der Oberfläche der Erde die verlangte Gerade erhalten wird.

Ist aber die abgesteckte Linie näher zu bezeichnen, sind also in derselben vertikalen Ebene mehrere Punkte anzugeben, so stellt sich der Geometer zwei bis drei Schritte von der einen Fahne so auf, daß er beide vor sich hat, das eine Auge in die bereits dargestellte Ebene (dieß erkennt er dadurch, daß er von beiden Stäben nur die Berührungslinie sieht) und läßt von einem Gehilfen, dem er mit der Hand die nöthige Weisung gibt, einen dritten Stab so stellen, daß dieser dem Geometer der Länge nach sichtbar wird, ohne den vordersten Stab zu decken; dann steht der dritte mit den beiden andern Stäben in derselben vertikalen Ebene, somit der durch den dritten Stab bezeichnete Punkt in derselben Linie.

Zusatz. Die eben vorgekommene und in der Geodäsie sich häufig wiederholende Aufgabe: einen gegebenen beweglichen Punkt im Raume in eine bestimmte unbewegliche Ebene zu bringen, oder umgekehrt eine bestimmte bewegliche Ebene durch einen gegebenen unbeweglichen Punkt zu legen, nennt man visiren, oder, und insbesondere in dem letzteren Falle, auch pointiren; die bewegliche oder unbewegliche Ebene heißt die Visirebene.

Um beurtheilen zu können, ob ein gegebener Punkt im Raume auch in der Visirebene liege oder nicht, muß man sein Auge selbst in der Ebene haben; und die von dem Auge nach dem gesehenen Punkte in der Visirebene gezogene gerade Linie nennt man die Visur.

Liegt der anvisirte Punkt in einer vertikalen oder horizontalen Linie, und ist die Visirebene selbst im ersten Falle vertikal, im zweiten horizontal, so wird, sobald der Punkt anvisirt ist, auch die ganze Linie in der Visirebene liegen; in solchen Fällen ist es also gleichgültig, welcher Punkt der Linie avisirt wird.

In der vorigen Aufgabe ist die Visirebene unbeweglich, jeder Punkt des zu stellenden dritten Stabes aber beweglich.

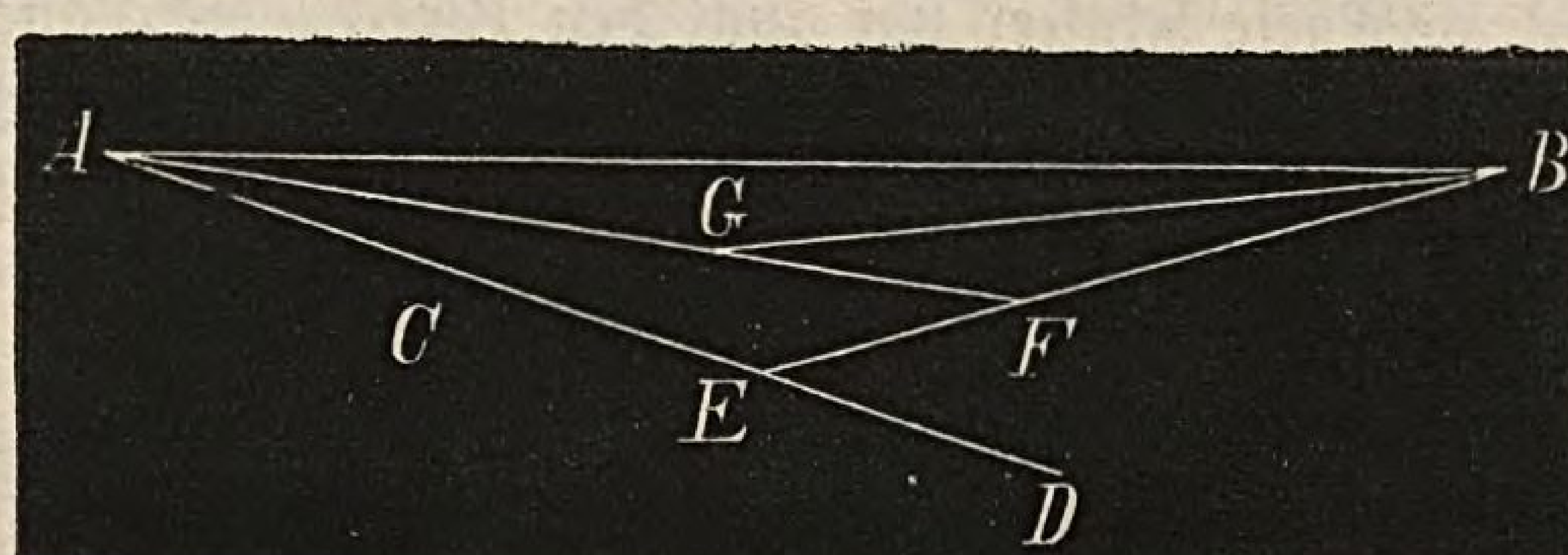
Auflösung des zweiten Falles.

Wird in dem zugänglichen Punkte ein Stab vertikal gestellt, so ist die diesen Stab tangirende und durch den sichtbaren Punkt gelegte Ebene die gesuchte Visirebene, und der Geometer kann nach der vorhergehenden Auflösung beliebig viele Punkte der abgesteckten Linie bestimmen.

Zusatz. In dem Archiv für Mathematik und Physik von Grunert, 4. Theil, 2. Heft, ist ein Spiegelinstrument angegeben, mittelst dessen der Geometer allein, also ohne einen Gehilfen, nicht nur mehrere Zwischenpunkte bestimmen, sondern die Genauigkeit der bereits abgesteckten Punkte auch prüfen kann.

Auflösung des dritten Falles.

Diese wollen wir durch die Fig. 7 versinnlichen. Sind A und B die zwei sichtbaren, aber unzugänglichen Punkte, zwischen welchen eine gerade Linie abgesteckt werden soll, so stellt sich der Geometer und sein Gehilfe, jeder einen Stab vertikal haltend, zwischen den beiden Punkten auf, z. B.



in C und D. Nun visirt der z. B. von D über seinen Stab nach A und winkt dem andern von C in die Visirebene, z. B. nach E; hierauf visirt der

von E nach B und winkt dem in D Stehenden in die Visirebene, z. B. nach F, so wiederholt der F stehende die Operation und bringt den Stab von E nach G u. s. w. Man sieht, daß auf diese Art sich beide Stäbe der Linie AB nähern, und daß endlich der Fall eintreten muß, wo beide Stäbe mit A und B in eine gerade Linie kommen, somit durch die Anwendung der ersten Aufgabe sodann beliebig viele Punkte dieser Linie bestimmt werden können.

Angabe der verschiedenen Längeneinheiten.

§. 26. Daß die Maße der verschiedenen Längeneinheiten ursprünglich von dem menschlichen Körper entnommen worden sind, das bezeugen ihre Benennungen fast in allen Sprachen; daß aber hierdurch keine feste Bestimmung der Längeneinheiten möglich war, dieß erhellt aus der großen Verschiedenheit der, unter denselben Namen vorkommenden Längen, und daß man erst in der jüngsten Zeit diesen bedeutenden Uebelstand zu beseitigen bemüht ist, das ersieht man aus den Jahreszahlen der hierüber erlassenen Verordnungen.

Zur Erzielung einer bestimmten Längeneinheit hat man verschiedene Wege eingeschlagen. Die Gelehrten Frankreichs waren in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts bemüht, die Längeneinheit in der Natur zu finden, und haben dafür unter andern auch die Länge des Sekundenpendels in einer bestimmten geographischen Breite vorgeschlagen; weil aber die Ansichten über den zu wählenden Breitengrad sehr getheilt waren, kam dieser Vorschlag nicht zur Ausführung.

Dieselben Gelehrten haben hierauf ein anderes Mittel in Anwendung gebracht und haben mit der bis dahin üblichen Längeneinheit T o i s e (Klafter) ungefähr $\frac{1}{10}$ des nördlichen Meridianquadranten mit aller möglichen Schärfe gemessen, daraus die Länge des Quadranten abgeleitet, von diesem Resultate den zehnmillionsten Theil als Einheit für die Länge angenommen (Dekret vom 12. Februar 1842) und M e t e r genannt.

Obschon diese Maßeinheit auch in andern Ländern (in Belgien, lombardisch-venetianischen Königreiche) eingeführt ist, so hat sie in Frankreich selbst die alte Toise nicht ganz verdrängt, so daß man daselbst zweierlei Einheiten für die Länge, nämlich die Toise und den Meter, hat.

In Oesterreich wurde mit Dekret der k. k. n. österr. Landesregierung vom 20. April 1816 eine gegenwärtig im k. k. polytechnischen Institute in Wien befindliche Klafter als das Original der Längeneinheit erklärt *).

Diese Klafter hat auch den Zweck, die Länge eines andern Maßstabes mit der größten Schärfe zu bestimmen, und auf diese Art die Längen zweier Maßstäbe unter sich zu vergleichen, weßhalb diese Originalklafter gewöhnlich der C o m p a r a t o r genannt wird.

Preußen hat in der vom 10. Mai 1816 herausgegebenen Maß- und Gewichts-Ordnung die Ruthe als Einheit des Längenmaßes angenommen.

---

*) Siehe deren Beschreibung in den Wiener polytechnischen Jahrbüchern 18. Band, Seite 149, und 20. Band Seite 145.

§. 27. Bei jeder Längeneinheit ist zu merken:

A. ihre Abtheilung in aliquote Theile (Untertheilung), mittelst deren man im Stande ist, jene Längen, die selbst kürzer sind als die Einheit, zu messen.

B. Das Verhältniß ihrer Länge zu andern Einheiten, damit man, falls es nöthig wird, die durch eine bestimmte Einheit gemessene Länge sogleich durch eine andere Einheit ausdrücken kann, ohne die Messung wiederholen zu müssen.

ad A. Die Unterabtheilung der Klafter geschieht auf eine zweifache Art:

a. sie wird entweder in 6 gleiche Theile (Fuß), jeder Fuß in 12 Theile (Zoll), jeder Zoll in 12 Linien; oder

b. in 10 gleiche Theile (Zehntel), jedes Zehntel in 10 Theile (Hundertel), jedes Hundertel in 10 Tausendtel 2c. abgetheilt.

Die erste Eintheilung heißt die Duodezimal-Eintheilung und wird mit ddc, die besonderen Zahlen aber für die Klafter mit (°), für die Fuße mit ('), für die Zolle mit (''), für die Linien mit (''') bezeichnet. Z. B. 4° 3' 8'' heißt 4 Klafter 3 Fuß 8 Zoll.

Die zweite heißt Dezimal-Eintheilung und wird mit dc bezeichnet; die für dc gewählte Bezeichnung der besonderen Zahlen wird der Ziffer an der Stelle der Einheiten beigesetzt, z. B. 3''1487.

In Rußland wird die Klafter in drei Arschin, die Arschin in $2\frac{1}{2}$ Fuß, die Klafter somit in 7 Fuß eingetheilt, die weitere Eintheilung ist ddc.

Die Unterabtheilung der Ruthe ist ebenfalls zweifach:

a. Die Ruthe wird in 12 oder 15 (in Sachsen auch in $15\frac{1}{2}$ Fuß), jeder Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien, jede Linie in 12 Skrupel eingetheilt. Diese Eintheilung heißt das Werkmaß, z. B. Werkfuß, Werklinie.

b. Die Ruthe wird auch in 10 Fuß (Feldfuß), jeder Feldfuß in 10 Feldzoll 2c. eingetheilt; die erstere ist also eine ddc, die letztere eine dc Eintheilung. Die Bezeichnung der besonderen Zahlen ist sowohl bei dem Werk- als Feldmaß, wie bei der Klafter; 4° 3' 8'' heißt 4 Ruthen 3 Fuß 8 Zoll Werk- oder Feldmaß.

Eine Ausnahme von der gewöhnlichen Untertheilung macht

1. die Londonerruthe (Dole); sie wird in $5\frac{1}{2}$ Yards, jeder Yard in 3 Fuß, die Ruthe somit in $16\frac{1}{2}$ Fuß, der Fuß in 12 Zoll, der Zoll in 10 Linien eingetheilt.

2. Die in Russisch-Polen gebräuchliche Ruthe; ihre Untertheilung ist folgende:

Ruthe Pręt	Klafter Sążnie	Ellen Łokcie	Fuß Stóp	Zolle Cale	Linien Linije	Skrupel Punkta
1	$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	15	180	2160	25920

Die Untertheilung des Meters ist in dc, und hier tritt der eigenthümliche Fall ein, daß die aliquoten Theile des Meters mit lateinischen

und die Produkte desselben mit einer Potenz von zehn mit griechischen Namen bezeichnet werden, man nennt nämlich

10 Meter einen Decameter.	$\frac{1}{10}$ Meter einen Dezimeter.
10 Dekameter einen Hektometer.	$\frac{1}{10}$ Dezimeter einen Centimeter.
10 Hektometer einen Kilometer.	$\frac{1}{10}$ Centimeter einen Millimeter.

Die besonderen Zahlen werden für die Meters mit m, für die Dezimeter mit dm, für die Centimeter mit cm, für die Millimeter mit mm bezeichnet, z. B. $63^{mm}28$ heißt 63·28 Millimeter.

In dem lombardisch-venetianischen Königreiche hat die Untertheilung des Meters andere Namen, es ist nämlich 1 Meter = 10, Palmi = 100, Diti = 1000 Atomi.

ad B. Das Verhältniß der Längeneinheiten unter sich ergibt sich am einfachsten, wenn sämmtliche durch eine und dieselbe Länge ausgedrückt werden; und da ist es gebräuchlich, die Länge des Fußes durch Pariser Linien anzugeben.

In der nachfolgenden Tabelle sind einige Längen sammt der Angabe, in wie viel Fuße die Klafter oder die Ruthe getheilt wird, zusammen gestellt, und in der letzten Kolonne die sämmtlichen Längen durch die Wiener Klafter ausgedrückt.

Namen des Landes oder der Stadt	Wie viel Fuß auf die Einheit gehen	Die Länge eines Fußes in Pariser Linien	Logarithmus der Pariser Linien	Die Länge der Einheit in W. Klaft. ausgedrückt
Baiern	10 auf die Ruthe	129·380	2·1118671	1·538844
Breslau	15 auf die Ruthe	127·6513	2·1060252	2·277424
England	16½ auf die Ruthe	135·11415	2.1307008	2·651626
Frankreich . . .	6 auf die Klafter	144·00	2·1583625	1·0276404
Krakau	15 auf die Ruthe	158·00	2·1986571	2.8237
Mainz	12 auf die Ruthe	133·50	2·1254813	1·9054
Oesterreich . . .	6 auf die Klafter	140·126832	2·1465213	1·00000
Preußen	12 10 } auf die Ruthe	139·1300 166·9559	2·1434208 2·2226017	} 1·985772
Russisch-Polen . .	15 auf die Ruthe	144·00	2·1583625	2·569104
Rußland	7 auf die Klafter	135·11415	2·1307003	1·124932
Sachsen	15½ 10 } auf die Ruthe	125·5371 194·5825	2·0987721 2·2891038	} 2·314362

Eine Wiener Klafter = 0·973103 Toisen = 1·8966134 Meter, daraus ergibt sich

die Länge eines Wiener Fußes = 0·3161022 Meter = 316·^{mm}1022,

" " " " Zolles = 26·^{mm}3418,

" " " " Linie = 2·^{mm}1951.

1 Meter = 3·163536 W. Fuß = 443·295936 Pariser Linien.

1 Dezimeter = 0·3163536 W. Fuß = 44·3295936 Pariser Linien = 3''7962432 W. Maß.

1 Centimeter = 0·03163536 W. Fuß = 4·43295936 Pariser Linien = 4'''555492 W. Maß.

1 Millimeter = 0·003163536 W. Fuß = 0·443295936 Pr. Linien = 0''''4555492 W. Linien.

Anmerkung. Außer diesen Längen dürfen noch folgende Daten bemerkenswerth sein: Die österreichische sogenannte Fortifikationsklafter ist der Pariser Toise ganz gleich.

1 Wiener Elle = 29·58 W. Zoll,
1 Lemberger Elle = 22·56 W. Zoll,
1 Arschin = 2·251 W. Fuß = 2 Fuß 3 Zoll,
1 Knoten bei der Schifffahrt = 48·932 W. Fuß *),
1 österreichische Meile = 4000 W. Klafter.

§. 28. Mittelst der vorhergehenden Tabelle kann man nicht nur das Verhältniß zwischen Fuß-, sondern auch zwischen Längeneinheiten selbst finden, vorausgesetzt, daß diese entweder zwei in gleiche Anzahl Fuße getheilte Klafter oder Ruthen sind; denn bezeichnet man mit l und l′ die Länge zweier Fuße; mit n und m die ihnen entsprechende Anzahl Pariser Linien, mit α die Länge einer solchen Linie, so ist $l = n\alpha$; $l' = m\alpha$, daher $l : l' = n : m$ ..... 1).

Wird nun das erste Verhältniß mit 6, 10, 12 oder 15 multiplizirt, das zweite aber ungeändert gelassen, so bekommt man nach der Multiplikation die Länge einer Klafter oder Ruthe durch dasselbe Verhältniß der Anzahl Pariser Linien eines Fußes ausgedrückt. Wird aber das erste Verhältniß durch 12 oder 144 dividirt, so bedeuten dann die Quotienten einzelne Zolle oder Linien, welche wieder in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Fuße selbst; also ist das Verhältniß der Klafter, Ruthen, Zolle und Linien immer gleich dem Verhältnisse der Fuße und wird durch das Verhältniß der Pariser Linien ausgedrückt; wobei jedoch die Anzahl Fuße, in welche eine Klafter oder Ruthe getheilt wird, nicht zu übersehen ist.

§. 29. Aus dem §. 27 folgt, daß folgende Reduktionen der Maße vorkommen können.

A. Eine in ddcMaß gegebene Länge in dcMaß derselben Einheit; und umgekehrt

B. eine in dcMaß gegebene Länge in ddcMaß derselben Längeneinheit, und endlich

C. die einer bestimmten Einheit gegebene Länge durch eine andere Einheit auszudrücken.

ad A. Da die Fuße, Zolle und Linien nur Bruchtheile der Haupteinheit sind, so verwandle man zuerst die Einheiten der kleinsten Benennung in einen Dezimalbruch der nächst höheren Benennung, und addire zu dem Dezimalbruche die vorhandenen Einheiten derselben Benennung; nun verwandle man diesen unechten Dezimalbruch von der nächst höheren Benennung u. s. f. bis zu der Haupteinheit selbst.

Z. B. 6° 8′ 10″ 7‴ preußisches Werkmaß in Feldmaß anzugeben; hier sind

$$7''' = 0{\cdot}583 \text{ Zoll};\ 10''{\cdot}583 = \frac{10{\cdot}583}{12} \text{ Werkfuß} = 0{\cdot}882 \text{ Werkfuß};$$

$$8{\cdot}882 = \frac{8{\cdot}882}{12} \text{ Werkruthe} = 0{\cdot}740 \text{ Werkruthe},$$ somit 6° 8′ 10″ 7‴ Werkmaß = 6°740 Feldmaß = 6° 7′ 4″ Feldmaß.

---

*) Littrow's Chorographie.

2. Beispiel. Es sind $7^0\ 5'\ 6''$ W. Klafter in dcMaß zu verwandeln; nun sind

$$6'' = \frac{6}{12}\text{ Fuß} = 0{\cdot}5\text{ W. Fuß};\ 5{\cdot}5\text{ W. Fuß} = \frac{5{\cdot}5}{6}\text{ W. Klafter} = 0{\cdot}916,$$

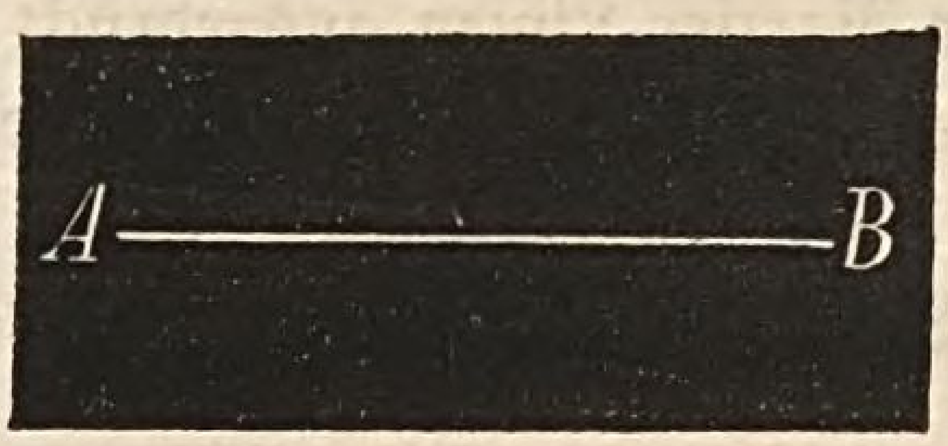
somit $7^0\ 5'\ 6'' = 7{\cdot}916$ Wien. Klafter.

ad B. Die Einheiten jener Zahl, welche eine in dcMaß gegebene Länge ausdrückt, bleiben unverändert auch für die Einheiten der in ddc auszudrückenden Länge; der gegebene echte Dezimalbruch aber wird mit jener Zahl multiplizirt, welche anzeigt, wie viel Fuße in der Haupteinheit enthalten sind; nach gehöriger Multiplikation sind die Einheiten des Produktes die gesuchten Fuße, der Dezimalbruch aber durch wird die Multiplikation mit 12 auf Zolle gebracht und so beliebig weit fortgefahren.

Diese Regel folgt aus der Multiplikation der Dezimalbrüche, braucht also nicht weiter erklärt zu werden.

Anmerkung. Wer die unter A und B angeführten Reduktionen häufig vorzunehmen hat, der kann die sich wiederholenden Rechnungen durch die Benützung der eigens zu diesem Zwecke vorhandenen Tabellen vermeiden, die sich jedoch jeder leicht selbst verfassen und nach seiner Gewohnheit einrichten kann.

ad C. Denken wir uns eine Länge AB Fig. 8 mit zwei verschiedenen Fuß l und l' gemessen, und nehmen wir an, bei der ersten Messung sei AB=ml, bei der zweiten AB=nl', wo m und n die Zahlen bedeuten, wie vielmal der entsprechende Fuß in der zu messenden Länge enthalten ist, so ist



$$ml = nl' \ldots\ 1) \text{ oder } l : l' = n : m \ldots\ 2).$$

Da nun l und l' bereits durch Pariser Linien ausgedrückt, somit bekannt sind, so kann aus der Gleichung 1) eine der Größen n oder m gefunden werden, wenn die andere gegeben ist; auch folgt aus der Proportion, daß sich die Längen der Fuße verkehrt wie die Zahlen verhalten, welche die gemessene Länge ausdrücken.

Um die obige Gleichung durch Beispiele zu erläutern, wollen wir annehmen:

1. Beispiel. $4^0\ 5'\ 8''$ Wiener Maß sei in das preußische Werkmaß zu verwandeln.

Lassen wir l für das Wiener, l' für das preußische Maß gelten, so folgt aus der Tabelle §. 27 $l = 140{\cdot}13$; $l' = 139{\cdot}13$ und weil $4^0\ 5'\ 8'' = 29{\cdot}666$ W. Fuß sind, so ist $m = 29{\cdot}666$ daher Gleich. 1) $n = 29{\cdot}8685$ preußische Werkfuß oder (nach B) $4^0\ 5'\ 8''$ W. Klafter sind $= 2^0\ 5'\ 10'''4$ preußisches Werkmaß.

Hätte man nicht preußisches Werkmaß, sondern Feldmaß verlangt, so müßte man $l' = 166{\cdot}956$ gesetzt haben.

2. Beispiel. $5^0\ 14'\ 8''\ 6'''$ Londoner Maß in das alte Pariser Maß zu verwandeln.

Lassen wir l und m für das Londoner Maß, so ist (§. 27) $l = 135{\cdot}11$, $l' = 144$, $m = 97{\cdot}216$, somit aus der Gleich. 1) $n = 91{\cdot}228$ Pariser Fuß $= 15^0\ 1'\ 2''\ 8'''{\cdot}8$ Pariser Maß.

3. Beispiel. $8^0\ 4'\ 3''$ Wiener Maß in Meter auszudrücken.

Diese Länge in Fuß ausgedrückt ist $= 52{\cdot}25$; lassen wir also $l = 140{\cdot}13$, $l_{,} = 443{\cdot}296$ und $m = 52{\cdot}25$ bedeuten, so ist $n = 16{\cdot}5167$ Meter.

In manchen Fällen kann man sich die Verwandlung der Maße durch die oben §. 27 angegebenen Längen des Meters sehr erleichtern; wären z. B. $790^{\cdot mm}278$ in Wiener Linien zu verwandeln, so kann diese Aufgabe durch eine einfache Multiplikation aufgelöst werden; denn da ein Millimeter $=0\cdot4555$ W. Linien ist, so ist $790^{mm\cdot}278=360$ Wiener Linien $=30''$.

Anmerkung. Daß diese Rechnung mittelst Logarithmen sehr einfach verrichtet werde, dürfte bekannt sein; aus diesem Grunde sind in der obigen Tabelle §. 27 die den Zahlen entsprechenden Logarithmen aufgenommen worden.

Unmittelbare Messung einer geraden Linie.

§. 30. Ohne Zweifel hat man zuerst eine Länge durch das Abschreiten gemessen, aber auch bald gesehen, daß diese Art des Messens keine große Genauigkeit gewähre, und war somit veranlaßt, bestimmte Längeneinheiten anzunehmen.

Zu höchst oberflächlichen Messungen, als: zur Beurtheilung ob eine erst zu messende Linie eine bestimmte Länge haben werde, oder ob bei einer bereits ausgeführten Messung kein auffallender Irrthum unterlaufen sei, wird das Abschreiten noch jetzt angewendet, wobei man 5 gewöhnliche Schritte gleich 2 W. Klafter, oder, wegen der Einfachheit der Rechnung, 10 Schritte = 4 Klft. rechnet.

Anmerkung. An den österreichischen Landstraßen ist die Länge von 100 zu 100 Klaftern durch Steine oder Pflöcke bezeichnet; diese gemessenen Längen bieten für Jeden ein geeignetes Mittel, die Länge seines gewöhnlichen Schrittes auszumitteln.

Bei großen Distanzen ist das Schrittzählen sehr lästig; wo es also auf einige hundert Schritte mehr oder weniger nicht ankommt, kann das Zählen durch die Zeit ersetzt werden, die man zu ihrer Abschreitung gebraucht hat; dabei muß natürlich ausgemittelt werden, wie viel Schritte man zu einer bestimmten Zeit macht. Auf diese Art pflegt der gemeine Mann die Entfernung zweier Orte anzugeben.

Da jedoch diese Art, die Zahl der Schritte nach der hiezu verwendeten Zeit zu schätzen, sehr ungenau ist, so bedient man sich beim Abschreiten großer Längen (z. B. bei Fußreisen) der sogenannten Schrittzähler, deren Konstruktion viele Aehnlichkeit mit den Taschenuhren hat.

Zusatz. Auf einem Zifferblatte nämlich sind drei eingetheilte Kreise mit ihren Zeigern, der erste Zeiger geht bei jedem Schritte um ein Intervall weiter und durchläuft bei 50 Schritten seine Peripherie, der zweite Zeiger gibt die einzelnen Hunderte und zwar bis 1000, der letzte Zeiger geht nach 1000 Schritten um ein Intervall vorwärts, und durchläuft seine Peripherie bei 25,000 Schritten, also bei $2\frac{1}{2}$ Meilen. Wie der Schrittzähler beim Gebrauche zu befestigen ist, kann Jeder leicht herausbringen.

§. 31. Ein bedeutender Fortschritt in der Genauigkeit der Messung einer geraden Linie ist geschehen, als man eine bestimmte Längeneinheit angenommen, nämlich das erste Instrument der praktischen Geometrie: den Maßstab erfunden hat.

Die Maßstäbe sind von gradfaserigem Tannenholze angefertigt, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Quadratzoll dick, eine oder zwei Klafter, in andern Ländern auch eine Ruthe lang, in die einzelnen Fuße, der erste und letzte Fuß noch in Zolle abgetheilt. Die Enden der Maßstäbe sind mit Blech (Kappen) beschlagen, um die Zersplitterung der Fasern beim fortgesetzten Gebrauche zu vermeiden. Zweckdienlich ist es, die hölzernen Maßstäbe mit Oelfarbe anzustreichen.

Mit den Maßstäben können Linien von jeder beliebigen Länge gemessen werden, bei großen Distanzen ist es nöthig, daß man mehrere Stäbe hat (am besten 5, jeden zu 2 Klafter), deren Länge nach einer als richtig anerkannten Längeneinheit bestimmt worden ist.

Die zu messende Linie wird vorerst abgesteckt, sodann durch eine Schnur, die von einem Absteckstabe zum andern gespannt ist, näher bezeichnet, neben dieser die einzelnen Stäbe in einer festgesetzten Ordnung und zwar von dem einen Punkte der Linie angefangen, gelegt. Sind nun die 5 Meßlatten gelegt (dies nennt man eine Lage), so wird der erste Stab allein aufgehoben, an den letzten angelegt, und so fortgefahren, bis die Länge bestimmt ist.

Daß man wissen müsse, wie oft jeder Stab angelegt worden ist, folgt aus dem Begriffe des Messens, und um nicht so leicht einen Irrthum in der Aufeinanderfolge eintreten zu lassen, ist es gut, die Stäbe zu nummeriren, oder durch verschiedene Farben zu unterscheiden.

Einen harten und ebenen Boden und die gehörige Aufmerksamkeit vorausgesetzt, wird die Genauigkeit, welche man bei der Messung mittelst Meßlatten erreichen kann, von den Praktikern auf $\frac{1}{10000}$ angenommen; hat man also eine Länge von 400 Klaftern auf diese Art gemessen, so ist man ungewiß, das Resultat um 0·04 zu groß oder zu klein gefunden zu haben.

§. 32. Die Stangen sind zur Messung großer Längen etwas unbequem, deshalb wendet man, wenn es die Schärfe der Messung zuläßt, statt ihrer die Meßkette an.

Diese ist eigentlich ein, mehre Einheiten langer Stab, der wegen der Bequemlichkeit des Transportes aus beweglichen Theilen (Gliedern) zusammengesetzt ist. Die einzelnen Glieder bestehen aus Eisendraht von der Dicke eines Gänsekieles, sind $\frac{1}{2}$ oder 1 Fuß oder $\frac{1}{10}$ Klafter lang, und durch eiserne Ringe mit einander verbunden; die ganze Kette ist nach der landesüblichen Einheit entweder 10 Klftr. oder 2 Ruthen, in Frankreich 20 Meter lang, die einzelnen Klftr. durch messingene Ringe, die fünfte und sechste Klafter durch einen Achter (∞) verbunden.

An beiden Enden der Kette sind eiserne Ringe von 2 bis 3 Zoll Durchmesser und an diesen das Ende der ganzen Kette durch eingefeilte Striche (Index) ersichtlich.

Um das Unbequeme des Messens mit den Stangen bei der Kette zu vermeiden, werden durch die Endringe der Kette 4 bis 5 Fuß hohe Stäbe (Kettenstäbe) gesteckt, die unten Querriegel haben, auf welche die Kettenringe aufsitzen.

Die Kettenstäbe haben einen doppelten Zweck: erstens gewähren sie den Vortheil, daß man bei der Messung aufrecht stehen kann, zweitens, daß man mittelst ihrer jedesmal das Ende der Kette in die abgesteckte Linie bringen kann.

Zu jeder Kette gehören noch eine Anzahl (gewöhnlich 10) eiserne Nägel (Kettennägel), diese sind 12 Zoll lang und 0·4 Zoll dick und dienen die Endpunkte der ausgespannten Kette zu bezeichnen.

Durch die Beschreibung der Kette und des Zugehörs ist schon auch die Art angedeutet, wie mittelst derselben die Länge einer Linie bestimmt wird.

Bei der Messung legt selten der Geometer selbst die Hand an, sondern er bedient sich hiezu zweier gemeiner Handlanger, denen er die erforderliche Weisung gibt, und sieht nur nach, ob alles nach dieser ausgeführt wird.

Die Operation der Messung ist folgende: Nachdem die zu messende Linie abgesteckt und wo es nöthig ist, durch Zwischenpunkte näher bezeichnet ist, werden die Endringe auf die Kettenstäbe gesteckt und die Meßkette ausgespannt, wobei man Acht haben muß, daß jeder Ring die gehörige Lage hat; hierauf stellt der eine (erste) Handlanger den Index der Kette auf den Anfangspunkt der zu messenden Linie und visirt (wenn er schon abgerichtet ist, wo nicht, so visirt der Geometer) den Kettenstab des zweiten Handlangers bei mäßig gespannter Kette in die Linie ein; den Ort in der Linie bezeichnet sich der zweite Handlanger durch einen mit der Spitze des Kettenstabes gemachten Strich und spannt jetzt die Kette so, daß sie der Länge nach in die zu messende Linie, somit durch den eben gemachten Strich zu liegen kommt, steckt einen der 10 Kettennägel genau neben den Index der Kette und gibt dem ersten Handlanger ein Zeichen, daß die Operation, nämlich die Messung der ersten 10 Klafter, die man einen Kettenzug nennt, geendet ist. Nun gehen die beiden Handlanger mit der Kette, bis der erste zu dem gesteckten Kettennagel kommt, hier stellt er seinen Stab so, daß der Index neben dem Nagel zu liegen kommt, richtet den Kettenstab des zweiten Handlangers in die Linie ein, und zieht den ersten Kettennagel erst dann aus, wenn der zweite bereits gesteckt worden ist, und so bei jedem folgenden Kettenzuge.

Ist eine Linie sehr lang, so gibt der erste Handlanger nach gemessenen 100 Klaftern die gesammelten 10 Nägel dem zweiten zurück, der Geometer aber bemerkt, wie oft dieses Wechseln der Nägel vorgekommen ist; die gemessene Linie hat dann so oftmal hundert Klafter als Nägel gewechselt wurden, mehr so vielmal zehn Klafter als der erste Kettenzieher am Ende der Messung Nägel hat, und wenn das Ende der Kette nicht mit dem Endpunkte der zu messenden Linie übereintrifft, mehr dem Theile der Kette, von dem letztgesteckten Nagel bis zu dem Ende der Linie.

Ein zur Messung günstiges Terrain (harter ebener Boden) und gehörige nicht übertriebene Aufmerksamkeit vorausgesetzt, wird die Genauigkeit, die man bei der Messung mit der Kette erreichen kann, auf $\frac{1}{1000}$ angenommen, d. h. bei einer Länge von 1000 Klafter ist man im Durchschnitte um eine Klafter das Resultat zu groß oder zu klein gefunden zu haben unsicher; bei ungünstigem Terrain aber kann der Fehler bis auf $\frac{1}{500}$ wachsen.

Zusatz. Grunerts Archiv enthält im 6. Theile 4. Hefte eine interessante Untersuchung über die Genauigkeit der Kettenmessungen.

Die Messungen (200 an der Zahl) sind vom Geometer Handschuh vorgenommen worden und zwar mit einer fünfruthigen, dreiruthigen und zweiruthigen Kette, überdieß noch mit zwei Stäben, jeder eine Ruthe lang.

Aus diesen Messungen leitet Professor Gerling folgende Thatsachen ab:

1. Die Messungen zeigen, daß die Genauigkeit im Allgemeinen abnimmt, wenn man mit einer längern Kette mißt.

2. Daß der Fehler bei der Messung längerer Linien geringer sein kann, als bei kürzern.

3. Daß ein gleichgeübter Geometer mit dem Maßstabe auch bei unmittelbarem Auflegen auf den Boden bedeutend genauer mißt als, mit der Kette.

§. 33. Statt der Kette kann man sich auch eines Meßbandes bedienen. Dieses besteht aus einem zollbreiten Zwirnbande, welches zuerst mit kochendem Wasser gebrüht, sodann getrocknet und doppelt zusammengenäht worden ist. Um aber den Einfluß der Nässe auf die Länge des Meßbandes noch mehr zu vermindern,

wird das bereits zusammengenähte Band einen Monat lang in Leinölfirniß gelegt, nach Verlauf dieser Zeit abgewischt, gut ausgetrocknet und dann erst in Klafter oder Ruthen sammt aliquoten Theilen und zwar durch Striche abgetheilt, welche mit zinnoberrother Oelfarbe aufgetragen worden sind. Zuletzt werden an die beiden Enden des Meßbandes eiserne Ringe angenäht, ähnlich denen bei der Meßkette, und durch diese bei dem Gebrauche Kettenstäbe gesteckt. Das Messen ist ganz dem mit der Kette gleich, aber wegen der Dehnbarkeit des Meßbandes nicht so genau.

Fehlerquellen bei der Messung der Linien mittelst der Kette.

§. 34. Frägt man um die Ursache, warum eine Länge nicht absolut genau gefunden werden kann, so sind ihrer wohl mehrere. Die wesentlichsten derselben sind folgende:

1. Wenn die Kettenglieder gebogen oder verschlungen, überhaupt wenn jede einzelne Klafter der Kette nicht die richtige Länge hat. Die Kette kommt gewöhnlich genau gearbeitet aus der Hand des Mechanikers, verliert aber durch den häufigen Gebrauch oder durch äußere Einflüsse ihre gehörige Länge; sie wird meistentheils durch den Gebrauch ausgedehnt, indem die Kettenstäbe bei der Spannung der Kette als Hebel wirken, und da die Hebelsarme sehr ungleich sind, der zweite Handlanger die Kette zu sehr spannt; die Folge davon ist, daß wenn die Messung auch mit einer richtigen Kette begonnen wurde, diese nach der Messung etwas länger gefunden wird. Diese Wirkung der Spannung äußert sich bei neuen Ketten mehr als bei solchen, die schon längere Zeit im Dienste sind.

§. 35. Einen Einfluß auf die Länge der Kette hat zweitens die Wärme.

Bekanntlich dehnt sich jeder Körper bei erhöhter Temperatur aus, und zwar steht die Ausdehnung mit der Temperaturserhöhung innerhalb gewisser Gränzen im Verhältniß, es läßt sich also aus dem Unterschiede der Temperatur, bei welcher eine Längeneinheit ihr richtiges Maß hat, und jener während der Messung leicht die Veränderung ihrer Länge berechnen.

Wird die Ausdehnung des Metalls für die Einheit bei einer Temperaturerhöhung von einem Grade mit k, die Temperatur, bei welcher die Kette ihre wahre Länge hat, mit α, die bei welcher sie gebraucht wird, mit β bezeichnet, so ist ihre Erwärmung $(\beta-\alpha)$, ihre Ausdehnung für die Einheit $k(\beta-\alpha)$ und die Länge während der Messung $l + lk(\beta-\alpha)$, somit $lk(\alpha-\beta)$ die Korrektion für einen Kettenzug, und wenn die gemessene Linie n Kettenzüge enthält, die ganze Korrektion

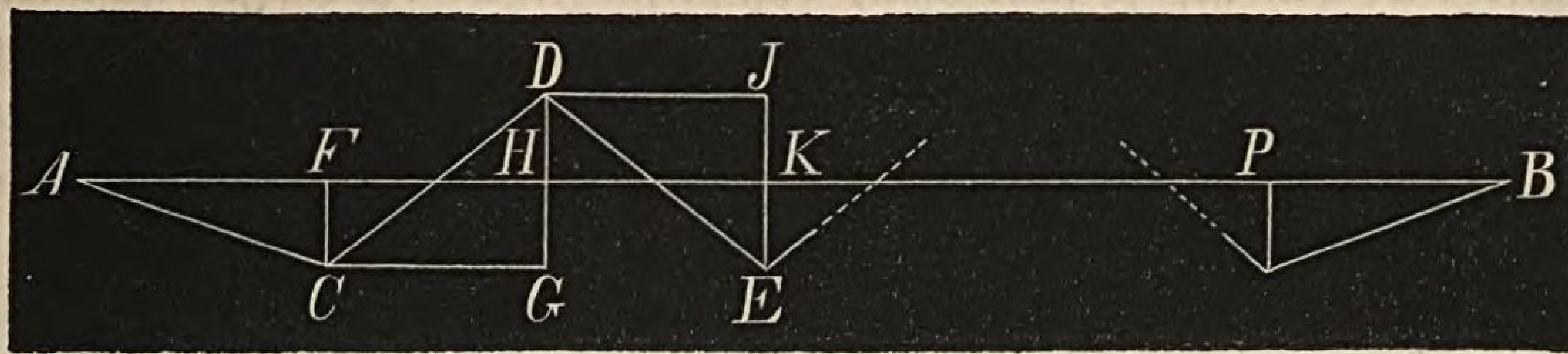
$$x = nlk(\beta-\alpha) \; ..... \; 1).$$

Z. B. Die Kette sei 10 Klafter lang aus Eisen von der Ausdehnung $k=0.00001446$, habe ihre richtige Länge bei 10^0 Réaumur $= \alpha$, werde aber bei $20^0 = \beta$ gebraucht, und mit ihr 1000 Klafter $=$ nl gemessen, so ist $x = +0{\cdot}1446$ Klafter, somit die Länge der gemessenen Linie $= 1000 + 0{\cdot}1446$ Klafter.

Da man bei der Messung mit der Kette auf ihre Temperatur keine Rücksicht nimmt, so begeht man hiedurch einen kleinen Fehler, der leicht vermieden werden könnte.

§. 36. Eine dritte Ursache ist in dem Umstande zu suchen, daß die Kette, sobald sie in die zu messende Linie ausgespannt wird, nicht mathematisch genau in derselben liegt, also mehr oder weniger von der Linie abweicht.

Angenommen, man hätte von A nach B, Fig. 9, messen sollen, habe aber



von A nach C, von C nach D, von D nach E u. s. w. gemessen, die Summe dieser Linien für die Länge der AB angegeben, so ist das Resultat offenbar zu groß.

Setzen wir den ungünstigsten Fall voraus, nämlich den, daß die Kette rechts und links aus der zu messenden Linie gelegt worden ist, und zwar stets um dieselbe Größe d; es sei also CF = GH = HD = ... senkrecht auf AB und = d; wird die Länge der Kette AC = CD = DE = ... = l gesetzt, so ist

$AF = \sqrt{l^2 - d^2} = l\sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2} = l\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right)$, indem weil d gegen l sehr klein ist, die übrigen Glieder beim Ausziehen der Wurzel vernachlässiget werden können; auf dieselbe Art findet man

$FH = CG = \sqrt{l^2 - 4d^2} = l\left(1 - 2\left(\frac{d}{l}\right)^2\right)$; $HK = DI = l\left(1 - 2\left(\frac{d}{l}\right)^2\right)$

und so fort bis $BP = l\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{d}\right)^2\right)$.

Daher die wahre Länge der Linie AB = AF + FH + HK + ... + PB; oder wenn die gefundenen Werthe substituirt werden,

$$AB = l\left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right) + l\left(1 - 2\left(\frac{d}{l}\right)^2\right) + l\left(1 - 2\left(\frac{d}{l}\right)^2\right)$$

$$\ldots + l\left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2\right).$$

Sind nun von A bis B n Kettenzüge, so hat diese Summe n Glieder, auch ist jedesmal das erste dem letzten gleich, somit nach verrichteter Multiplikation

$AB = nl - 2\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{l}\right) - (n-2)\left(2\frac{d^2}{l}\right) = nl - (2n-3)\frac{d^2}{l}$ oder wenn wir den Unterschied nl — AB = x setzen

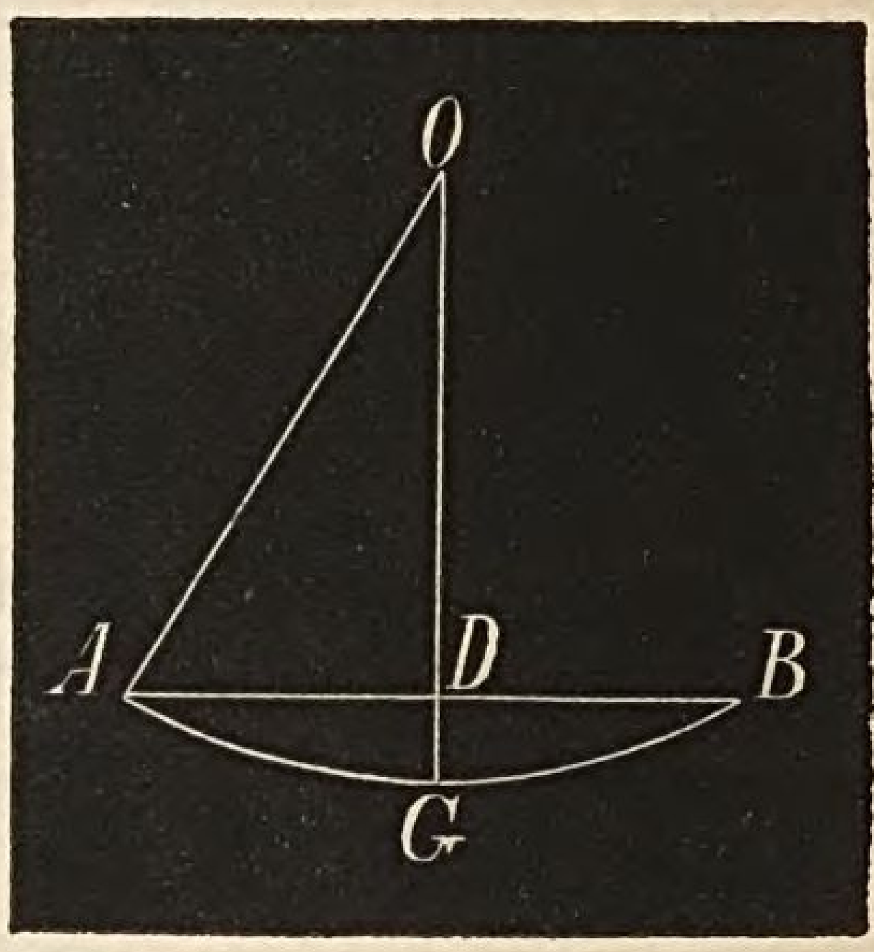
$$x = +(2n-3)\frac{d^2}{l} \;.\;.\;.\;.\;.\; 1),$$

d. h. AB ist um x zu groß gefunden worden.

Z. B. Bei einer Messung von 1000 Klaster sei sehr oberflächlich in die gerade Linie einvisirt und selbst Abweichungen aus der Visirebene von 6 Zoll nicht verbessert worden, so ist $l = 10^0$, $n = 100$, $d = 6'' = \frac{1}{12}{}^0$ und $x = 0{\cdot}1368$ Klafter, somit die gemessene Länge um diese Größe kürzer.

Werden für l und n die obigen Werthe beibehalten, für d aber 3 Zoll angenommen, so ist x=0·0342 Wiener Klafter; wäre aber bei einer Messung von 1000 Klafter wegen dem ungenauen Einvisiren ein Fehler von 1 Klafter gestattet, so folgt aus der Gleichung 1), da wieder l=10, n=100 und x=1 Klafter ist, d=16·2 Zoll. Nachdem bei der Ableitung der Gleichung der ungünstigste Fall vorausgesetzt worden ist, so siehe man, daß dieser Fehler bei einiger Aufmerksamkeit im Einvisiren ganz unbedeutend ist, so lange es sich nur um die Bestimmung der Länge einer Linie handelt; ist diese aber eine Abszissenlinie, so müssen die Kettenstäbe möglichst genau einvisirt werden, indem dann der begangene Fehler in seiner ganzen Ausdehnung auf die Ordinate übergehen kann.

§. 37. *Es kann geschehen, daß bei der Messung einer Linie die Kette über einen Graben zu liegen kommt*, an dieser Stelle also gespannt erhalten wird. Da keine Kraft hinreicht, eine schwere Kette in eine gerade Linie zu spannen, so wird das gemessene Stück der Linie AB Fig. 10, wenn sich die Kette zwischen den Punkten A und B noch so wenig senkt, dem Bogen AGB nicht gleich sein. Dieser Bogen, welchen die Kette während einer solchen Messung bildet, nähert sich eigentlich der Kettenlinie, kann aber, ohne sich von der Wahrheit weit zu entfernen, immer für einen Kreisbogen angesehen werden.



Bezeichnen wir den Bogen AGB mit D und die Sehne AB mit S, so ist §. 9 Gleichung 3) $D-S = \frac{D^3}{24r^2}$; allein weil in diesem Falle der Halbmesser r nicht bekannt ist, dafür die Senkung der Kette in der Mitte nämlich GD gemessen werden kann, so bezeichnen wir GD mit a, dann ist, wenn O der Mittelpunkt des Kreisbogens AGB ist, $\overline{AO}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DO}^2$ oder nach der Substituirung der Werthe $r^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + (r-a)^2$, daraus

$$r = \frac{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + a^2}{2a} \text{ u. } D-S = \frac{D^3}{24}\left[\frac{2a}{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + a^2}\right]^2 = \frac{D^3a^2}{6\left[\left(\frac{S}{2}\right)^2 + a^2\right]^2};\text{ aber}$$

$\left(\frac{S}{2}\right)^2 + a^2 = \overline{AG}^2$ und vermöge §. 10 können wir statt der Sehne auch den Bogen AG setzen, somit ist $\left(\frac{S}{2}\right)^2 + a^2 = \overset{\frown}{AG}^2 = \left(\frac{AGB}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4}$, daher $D-S = \frac{16a^2D^3}{6D^4}$ oder wenn $D-S=x$ gesetzt wird.

$$x = \frac{8}{3}\frac{a^2}{D} \; \ldots\ldots \; 1).$$

Z. B. Bei einer Messung sei von A nach B die ganze Kette ausgespannt gewesen und habe sich um 2 Fuß gesenkt, so ist= a=2, D=60 und x=0·1777

Fuß = 2·13 Zoll. Dieser Unterschied ist also bedeutend, und es lohnt sich der Mühe, ihn bei jedem vorkommenden Falle mit in die Rechnung zu nehmen.

Ist aber die Größe a um $\pm d$ fehlerhaft gemessen worden, so ist der hiedurch entstandene Fehler in der Bestimmung der Größe x, wenn wir ihn mit x' bezeichnen, $x' = \pm \frac{16ad}{3D} \ldots . 2)$,
was leicht aus der Gleichung 1) abgeleitet werden kann.

Z. B. Die wahre Senkung von der Sehne AB nemlich DG sei = 2 Fuß, man hat aber diese auf 2·5 Fuß geschätzt, so ist, wenn D wieder 10 Klafter bedeutet, a = 2, d = +0·5 und x' = 0·088 Fuß = 1·06 Zoll, und die Größe x' ist es, um welche eine Messung fehlerhaft werden kann, wenn a gemessen worden ist.

Kommen solche Messungen häufig vor, so ist es besser sich eines Meßbandes zu bedienen, weil dann der Fehler wegen der Ausdehnung des Meßbandes kleiner ist, als jener, welcher wegen der ungenauen Bestimmung der Senkung einer Kette begangen werden kann.

§. 38. Zu den bereits angeführten vier Ursachen kommt als fünfte die zu zählen, daß der zweite Handlanger den Kettennagel nicht ganz genau neben den Index der Kette steckt, oder der erste Handlanger den Index der Kette nicht genau neben der Achse des Kettennagels legt.

Wird dieser Fehler jedesmal mit gleichen Zeichen behaftet und nur ein Viertel der Dicke eines Kettennagels, also = 0·1 Zoll angenommen, so beträgt er bei einem Kettenzuge 0·2 und bei 100 Kettenzügen 20 Zoll = 0·2777 Klafter; es ist jedoch viel wahrscheinlicher, daß sich die von dem ersten und zweiten Handlanger begangenen Fehler ganz aufheben, als ganz summiren.

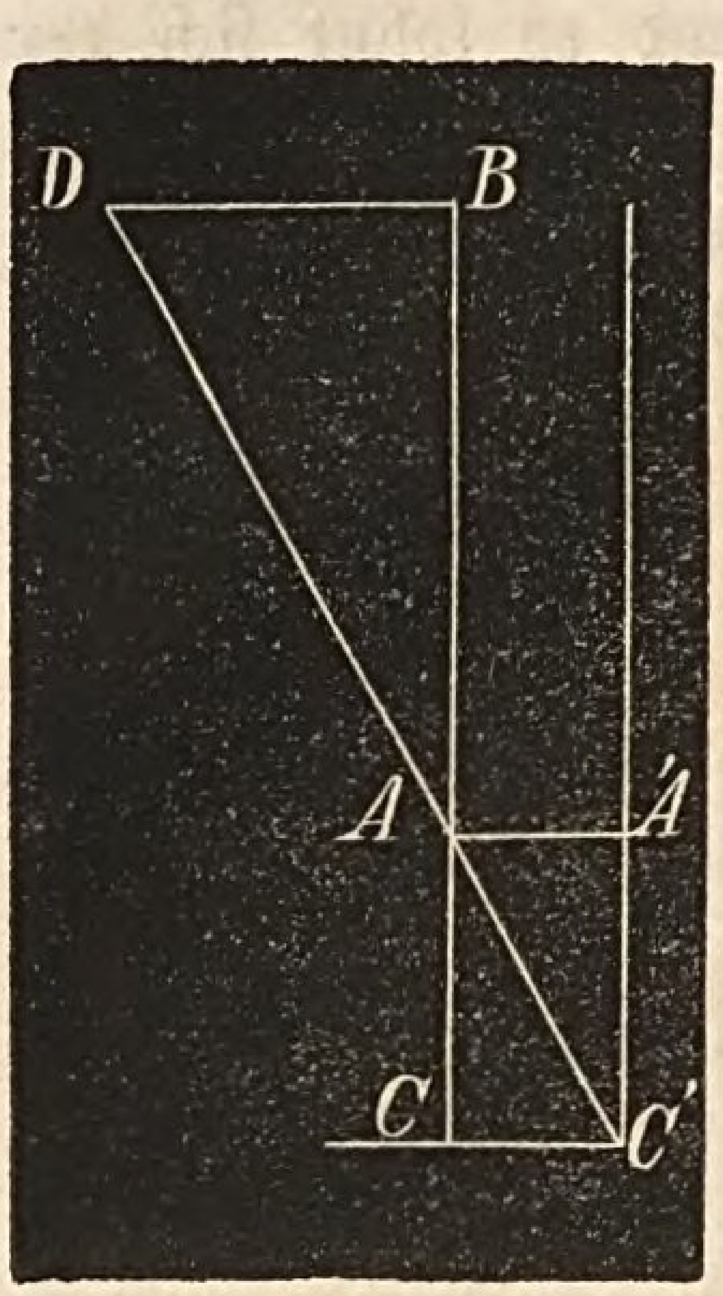
§. 39. Eine Fehlerquelle ist sechstens noch das ungleiche Anspannen der Kette.

Ein Moment der bereits erklärten Messung einer Linie mittelst der Kette besteht darin, daß, sobald der erste Handlanger seinen Stab und den des zweiten Handlangers in die gerade Linie eingestellt hat, dieser die ganze Kette über die zu messende Linie bringt, und hierauf, da die Kette noch nicht gespannt ist, seinen Kettenstab etwas vorwärts neigt, damit er bei der Spannung der Kette einen Unterstützungspunkt für die Spitze seines Stabes erhalte. Hiedurch aber setzt einigermaßen der Handlanger selbst fest, wie weit die Kette reichen müsse, und spannt sie darnach *).

Nehmen wir an, Fig. 11 (siehe nächste Seite) sei A der Punkt, in welchem die Kette an dem Kettenstabe BC befestiget ist, C sei der Punkt, wohin der Stab hätte gestellt werden sollen, der Handlanger habe aber bei B denselben um BD vorwärts geneigt, und dadurch den Stab in C' gestellt, somit bei der Länge eines Kettenzuges um das Stück CC' = AA' gefehlt. Aus den ähnlichen Dreiecken ACC' und ABD folgt

$$CC' = \frac{BD \,.\, AC}{AB} \ldots \ldots 1).$$

*) Daß man die Kette mittelst der Kettenstäbe stark spannen könne, ist aus der Theorie des Hebels erklärlich, und der Fall, daß ein ungeschickter Handlanger, in der Absicht seine Sache recht gut zu machen, die Kette entzweireißt, kommt nicht selten vor.



An den gewöhnlichen Kettenstäben ist AC = 6″ = $\frac{1}{2}$ Fuß und AB = $3\frac{1}{2}$ Fuß; wird nun BD nur zu 6 Zoll angenommen, so ist CC′ = $\frac{6}{7}$ Zoll und bei 1000 Klafter würde der Fehler, falls er stets gleich groß wäre, 1·19 Klafter betragen.

Wenn es auch nicht wahrscheinlich ist, daß die Kette immer zu viel oder zu wenig gespannt wird, so liegt es doch in dem Gebrauche derselben, daß wegen dieses Umstandes das Resultat eher zu klein als zu groß gefunden wird; dieser Fehler ist also sehr bedeutend und man sollte daher, wo es auf eine große Genauigkeit der Messung ankommt, die Kette ohne die Stäbe gebrauchen, oder wenn man das nicht will, die letzteren mit Kappen beschlagen und an diese die Enden der Kette befestigen lassen.

Prüfung der Kette.

§. 40. Die Richtigkeit einer Kette zu prüfen, trägt man auf einem ebenen Boden (am besten auf einem mit Brettern belegten Gange) eine genau gearbeitete Klafter 10mal neben einer gespannten Schnur auf, und bezeichnet die Länge einer jeden Klafter durch feine Striche; wird hierauf der Anfang der Kette genau auf den ersten Strich gelegt, und diese neben der Schnur ausgespannt, so zeigt sich, welche Klafter und um wie viel jede, ferner um wie viel die ganze Kette unrichtig ist.

Diese Differenz wird notirt und in der Folge bei der definitiven Bestimmung einer gemessenen Distanz in Rechnung gebracht. Bei dieser Vergleichung ist aber die Kette weniger als bei der wirklichen Messung durch die Kettenstäbe gespannt. Ist mit der Länge der Kette während der Messung eine Aenderung eingetreten, so wird, wenn man nicht eine plötzliche Aenderung vermuthen kann, angenommen, die ganze Distanz sei mit einer Kettenlänge gemessen worden, welche dem arithmetischen Mittel zwischen der Länge vor und nach der Messung gleich ist.

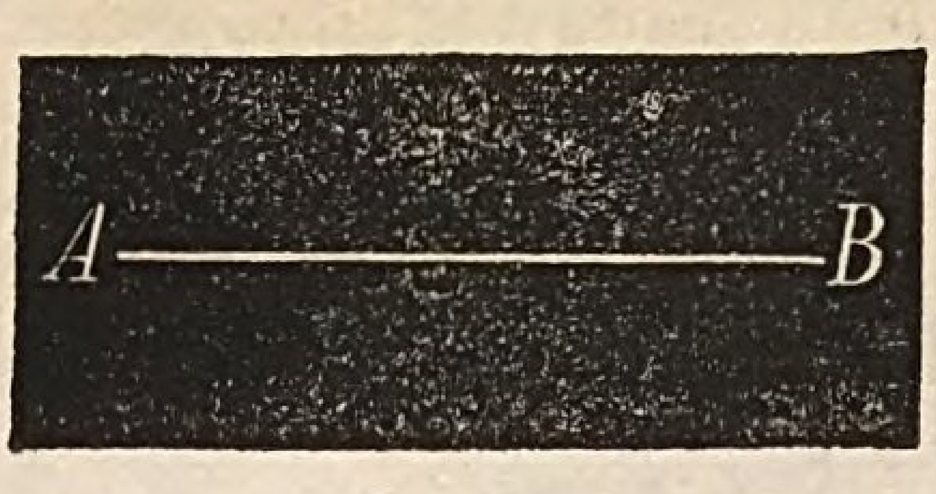
Jede kleine Aenderung der Kette sogleich durch einen Mechaniker verbessern lassen, halte ich nicht für zweckmäßig, da die Kette ihre richtige Länge bald wieder verliert.

Zusatz. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik 4. Theil 1. Heft enthält eine Konstruktion der Kette, bei welcher diese, wenn sie unrichtig werden sollte, jeden Augenblick vom Geometer selbst berichtigt werden kann.

§. 41. Soll mit einer unrichtigen Kette eine Messung ausgeführt werden, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

A. entweder ist mit einer solchen Kette eine gegebene Linie zu messen, oder

B. auf eine gegebene Linie eine bestimmte Länge genau aufzutragen.



Ad A. Bezeichnen wir die wahre Länge einer Kette (10°) mit l, die der gebrauchten mit (l±d), wo die Zeichen ± die gewöhnliche Bedeutung haben, und nehmen wir an, eine Länge AB Fig. 8, mit der letztere gemessen sei = m (l±d); mit der richtigen

Kette = nl, so ist $m\,(l \pm d) = nl$ ..... 1) daraus $n = \frac{m}{l}\,(l \pm d) = m\left(1 \pm \frac{d}{l}\right)$

somit $n = m \pm \frac{md}{l}$ ..... 2),

d. h. zu der für die Länge der Linie gefundenen Zahl m kommt noch $\frac{md}{l}$ additiv, wenn die Kette zu lang, und subtraktiv, wenn sie zu kurz ist.

Z. B. Mit einer um 0·032 Klafter zu langen Kette sei die gemessene Länge 163 Klafter gefunden worden, so ist $d = +0{\cdot}032$, $m = 163$, $l = 10$, somit die wahre Länge = 163 + 0·522 Klafter. Wäre die Kette um dieselbe Größe zu kurz, so müßte 0·522 Klafter abgezogen werden.

Ad B. Sind auf einer Linie eine bestimmte Anzahl Klafter mit einer unrichtigen Kette, die von der wahren Länge l um ±d differirt, aufzutragen, so ist in der obigen Gleichung 1) das m die zu suchende Größe, somit

$m = \frac{nl}{l \pm d} = n\left(\frac{l}{l \pm d}\right)$; und wenn von den Quotienten (weil d gegen l sehr klein ist) nur zwei Glieder beibehalten werden, $m = n\left(1 \mp \frac{d}{l}\right)$, somit

$$m = n \mp \frac{nd}{l} \; ..... \; 3),$$

d. h. soll man mit einer (l±d) langen Kette n Klafter auftragen, so hat man im ersten Falle, wenn die Kette zu lang ist, um $\frac{nd}{l}$ weniger, im zweiten Falle, wenn die Kette zu kurz ist, um dieselbe Größe mehr aufzutragen.

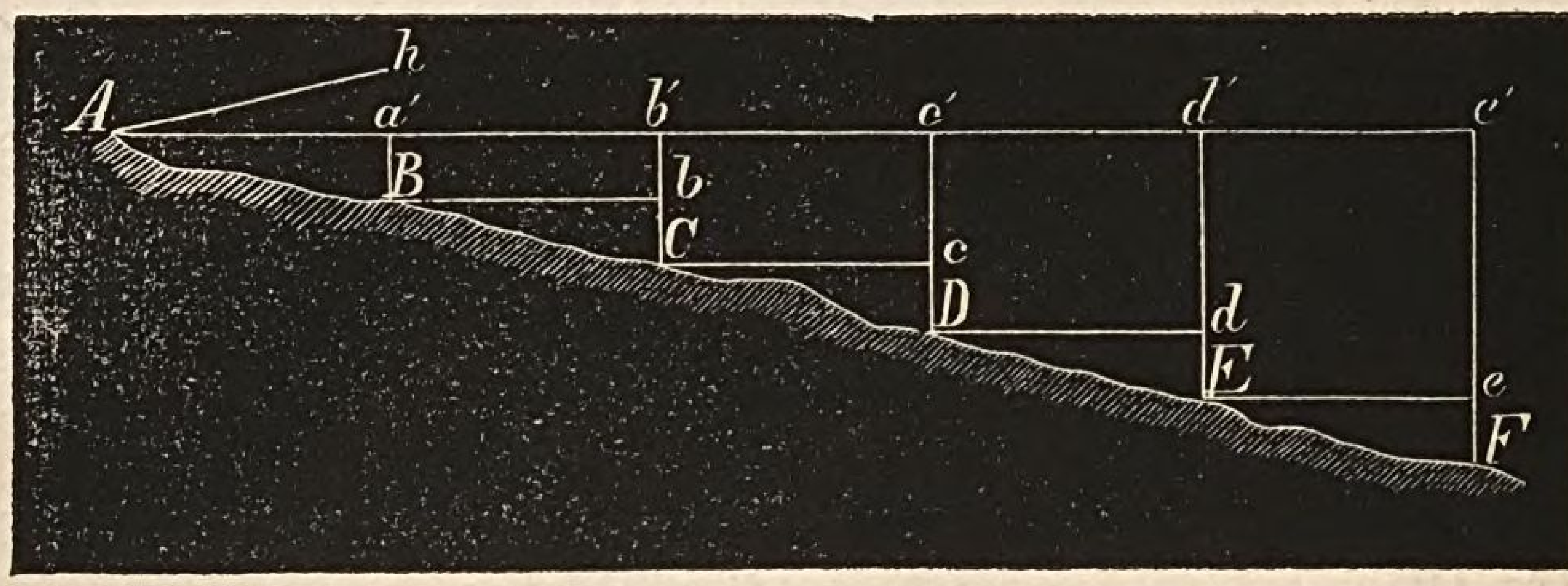
Z. B. Mit einer um 0·032 Klafter zu kurzen Kette sei eine Länge von 163 Klafter zu bestimmen, so ist $d = -0{\cdot}032$, $n = 163$, $l = 10^0$, somit $m = 163 +$ 0.522 Klafter.

Messung der horizontalen Projektion einer Linie.

§. 42. Durch die Anwendung der in den §§. 31 und 32 erklärten Messungsarten erhält man die wahre Länge einer Linie; aber aus den in den §§. 13 und 14 angeführten Gründen wird nicht immer diese, sondern öfters die Länge ihrer Projektion auf einen scheinbaren Horizont gesucht, und kann, nach Beschaffenheit des Terrains oder nach Maßgabe der Genauigkeit, die bei einer Messung zu erreichen ist, auf verschiedene Arten gefunden werden.

Wird bei der Bestimmung des Resultates nicht die größte Schärfe verlangt, so kann man das in Fig. 12 (siehe nächste Seite) dargestellte Verfahren anwenden.

Ist nämlich die horizontale Projektion der Linie AF zu suchen, so legt man an dem höher gelegenen Punkte (hier A) das Ende des Längenmaßstabes (Klafterstange, Kette oder Meßband), visirt dasselbe in die durch AF gelegte vertikale Ebene ein, hält es nach dem Augenmaße horizontal; die Länge und Richtung desselben sei Aa und bestimmt mittelst eines Absteckstabes den Punkt B, welcher



mit a in einer vertikalen Linie liegt, so ist Aa die Projektion von AB; legt man sodann das Längenmaß auf den Punkt B und wiederholt dasselbe Verfahren, so erhält man Bb als die Projektion der Linie BC; auf dieselbe Art wird Cc als die Projektion von CD bestimmt u. s. w., und die Summe Aa+Bb+Cc+.... ist die gesuchte horizontale Projektion der ganzen Linie AF.

Daß man nur der Bequemlichkeit halber bei dem höher gelegenen Punkte zu messen angefangen hat, sieht Jedermann ein.

Gewöhnlich hat die zu projizirende Linie AF nur eine solche Länge, daß die in ihren Endpunkten errichteten vertikalen Linien noch als parallel betrachtet werden können; denkt man sich durch A einen scheinbaren Horizont Ac′ gezogen, so ist Bb=a′b′; Cc=b′c′, u. s. f., somit Ae′ die gesuchte Projektion von AF.

Anmerkung. Streng genommen ist Aa+Bb+Cc+.... ein Theil eines größten Kreises der Erdoberfläche.

§. 43. Bei der eben erklärten Messung wurde vorausgesetzt, daß

a) das Längenmaß eine gerade Linie bilde,

b) horizontal gehalten und

c) daß das zweite Ende des Maßstabes durch eine vertikale Linie auf den Erdboden projizirt werde.

Dieß sind Voraussetzungen, die nicht immer streng Statt finden werden und doch mehr oder weniger Einfluß auf die Genauigkeit haben.

Ad a. Was den ersten Punkt betrifft, so folgt aus der Art, wie hier das Längenmaß gebraucht wird, daß nur die Klafterstange eine gerade Linie, die Meßkette und das Meßband dagegen einen Bogen bilden werden, und wollte man diesen wegen der Biegung der Kette entstandenen Unterschied nach der Gleichung 1) §. 37 in Rechnung bringen, so begeht man wieder einen Fehler, welcher aus den mangelhaften Daten entsteht und aus der Gleichung 2) §. 37 beurtheilt werden kann, weßhalb zu dieser Art Messung die Kette am allerwenigsten, der Maßstab und das Meßband aber mehr geeignet sind.

Ad b. Ob eine Linie die horizontale Lage habe oder nicht, dies durch das Auge allein entscheiden lassen, ist deshalb etwas mißlich, weil wir selten das über diese Lage gefällte Urtheil durch angestellte Messung prüfen, mit andern Worten, weil wie unser Auge in der Beurtheilung der horizontalen Lage nicht üben.

Nimmt man aber an, in der Fig. 12 (siehe oben) sei ein Stab von der Länge l im Punkte A angelegt, und in einer Lage Ah gehalten worden, welcher mit der Horizontalen Aa einen Winkel α bildet, so ist die Länge des Stabes auf dem scheinbaren Horizont von A projizirt $=l \cos. \alpha$; da man aber diese Größe für die Länge l selbst nimmt, so begeht man einen Fehler, der bei einmaliger

Anlegung des Maßstabes $l-l \cos. \alpha = l\,(1-\cos. \alpha) = l \sin.^2 \frac{\alpha}{2}$ und wenn derselbe Maßstab nmal angelegt und stets um den Winkel α von seiner gehörigen Lage differirt hat, $2nl \sin.^2 \frac{\alpha}{2}$ beträgt. Bezeichnen wir den Fehler bei der ganzen Messung mit x, so ist

$$x = 2nl \sin.^2 \frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots 1).$$

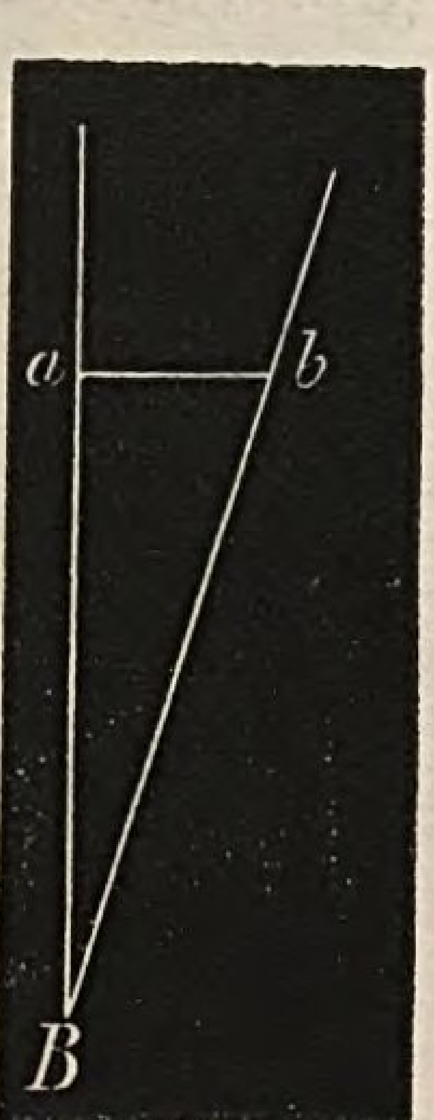
Hätte man z. B. mit einem 2 Klafter langen Maßstabe 100 Klafter gemessen und denselben um 3 Grade oberhalb oder unterhalb des Horizontes gehalten, so ist $l=2$ Klafter, $\alpha=3$ Grade, $n=50$ und $x=0{\cdot}137$ Klafter.

Wollte man mit einem 2 Klafter langen Stabe 100 Klafter bis auf 0·1 Klafter genau messen, so ist $l=2^0$, $n=50$, $x=0{\cdot}4$ Klafter und $\alpha=2^0 34'$; die diesem Winkel gegenüber gelegene Kathete $=6{\cdot}5$ Zoll.

Zusatz. Wir werden später Mittel kennen lernen, Linien und Ebenen mit einer beliebigen Schärfe in die horizontale Lage zu bringen, diese wendet man aber bei dieser Art Messung erstens deshalb nicht an, weil die Fehler, welche wir von §. 34 bis 41 besprochen haben, und die hier ebenfalls eintreten können, den obigen Fehler überwiegen, und zweitens, weil man das Resultat auch ohne Anwendung dieser Mittel bei einer entsprechenden Aufmerksamkeit mit einer für den beabsichtigten Zweck hinreichenden Genauigkeit erhält, da man den Maßstab immer bis auf 6 Zoll in die horizontale Lage bringen kann.

Ad c. Wird bei der Messung die ganze Meßkette oder ein Theil derselben angewendet, so ist der bereits im vorhergehenden Paragraphe erklärte Gang der Messung folgender:

Zuerst wird das eine Ende der Kette auf den Anfang der zu messenden Linie gelegt, hierauf der Kettenstab des zweiten Handlangers in die abgesteckte Linie einvisirt, die Kette an diesem Stabe so weit in die Höhe geschoben, bis man meint, dieses Ende der Kette sei mit jenem auf dem Boden aufliegenden in einer horizontalen Linie; nun erst wird die Kette mittelst des Kettenstabes gespannt. Hiedurch aber kommt der Kettenstab mehr oder weniger aus seiner vertikalen Richtung und die Länge des bei der Messung verwendeten Theiles der Kette ist nicht die gesuchte horizontale Projektion der Linie, selbst in dem Falle nicht, als die Kette eine gerade Linie bilden könnte.



Ist in der Fig. 13 Ba die Länge des Stabes, bis zu welcher die Kette in die Höhe geschoben wurde, und dieser bei der Spannung der Kette aus der vertikalen Richtung Ba in die schiefe Bb gekommen, so wird die horizontale Projektion um das Stück ab zu groß angegeben. Setzen wir $Ba=d$, den Winkel $aBb=\alpha$, so ist der Fehler bei einem Kettenzuge $x=d \sin. \alpha \ldots\ldots 2)$.

Ist z. B. $d=2$ Fuß, $\alpha=2$ Grade, so ist $x=0{\cdot}84$ Zoll, somit nicht unbedeutend.

Zusatz. Wegen der im §. 37 besprochenen Fehlerquelle rathen mehrere Praktiker, in dem daselbst angeführten Falle nicht die ganze Kette, sondern nur einen Theil, z. B. die Hälfte, anzuwenden; aber zugegeben, der hiedurch begangene Fehler x Gleichung 1) §. 37 werde auf ein Viertel, also auf 0·53 Zoll gebracht, so wird der oben mit 0·84

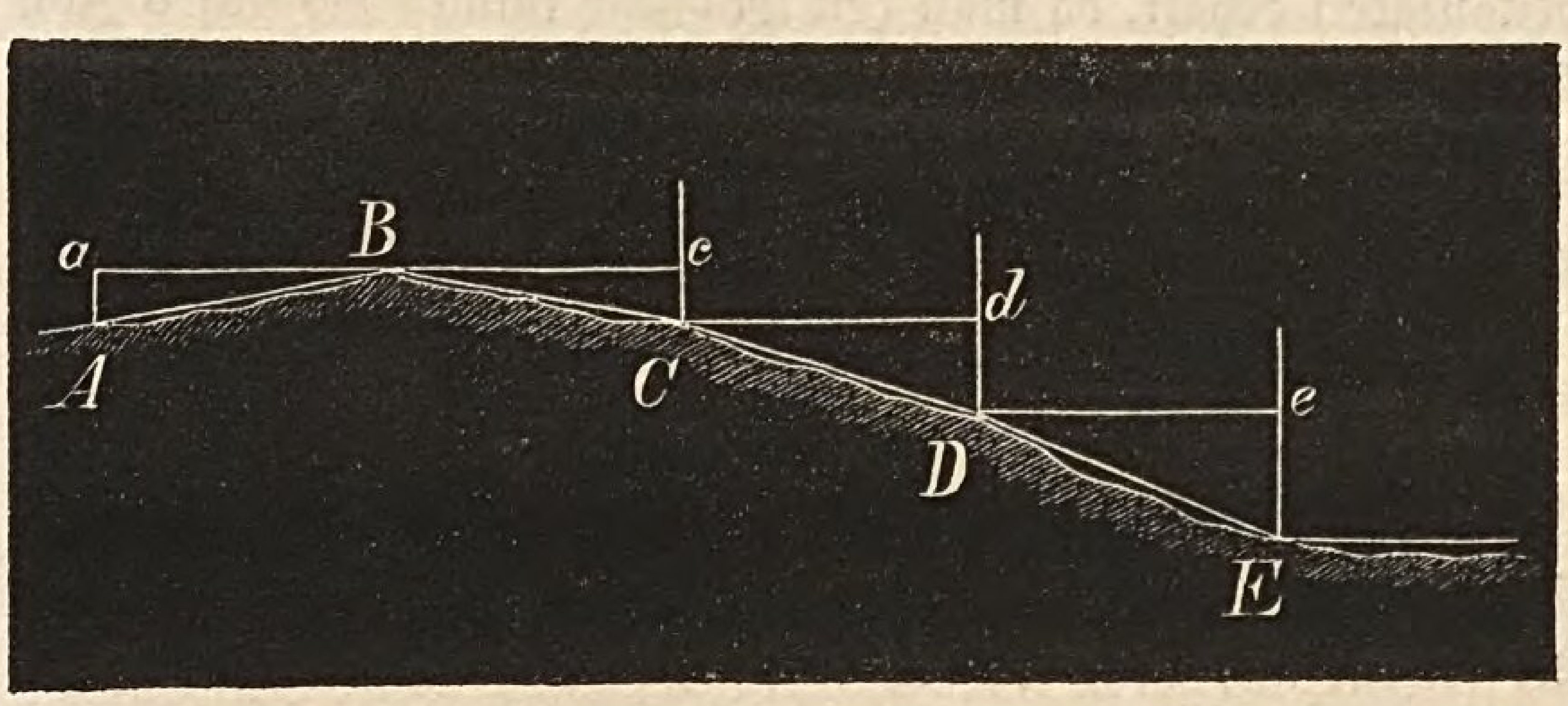
Zoll begangene Fehler sich verdoppeln; aus diesem einzigen Grunde ist mit der Verkürzung der Kette nichts gewonnen.

Aus diesem Paragraphe und jenem 37 folgt, daß zu der im §. 42 erklärten Messung das Meßband der Kette und dem Maßstabe vorzuziehen ist; wird dennoch die Kette angewendet, so hat man durch angestellte Versuche ausgemittelt, daß im Durchschnitte bei 600 Klafter ein Fehler von einer Klafter stattfinden könne. Dieses noch günstige Resultat dürfte dem Umstande zuzuschreiben sein, daß sich die zwei Fehler, nämlich der §. 37 und der in diesem §. sub c besprochene, da sie entgegengesetzte Bezeichnung haben, und nahe gleich sind, zum größten Theil aufheben.

§. **44.** Eine zweite Art, die horizontale Projektion einer Linie zu bestimmen, besteht darin, daß man das Maß (Kette, Meßband) unmittelbar auf den Boden in der Richtung der abgesteckten Linie legt und den Neigungswinkel in Graden angibt, den jede einzelne Lage des Maßes mit dem scheinbaren Horizonte bildet, die gesuchte horizontale Länge des Maßstabes ist dann gleich der wahren Länge desselben, multiplizirt mit cosinus des Neigungswinkels.

Wie man sieht, wird hier vorausgesetzt, daß das Längenmaß eine gerade Linie bilde, deshalb eignet sich zu dieser Messungsart der Klafterstab besser als die Kette; die Operation selbst ist folgende:

Stellt uns ABCDE . . . . . Fig. 14 die abgesteckte Linie vor, so wird zur Erleichterung längs derselben eine Schnur gespannt und sodann das eine Ende des Maßstabes an den durch einen Pflock bezeichneten Anfangspunkt der Linie, z. B. in A, der Stab selbst neben der Schnur gelegt, und sein zweites Ende ebenfalls durch einen Pflock bezeichnet. Nun wird der Neigungswinkel gemessen (das Mittel hiezu werden wir im §. 46 angeben), welchen der Stab AB mit der durch einen seiner Endpunkte gehenden horizontalen Linie (hier aB) bildet; hierauf wird der Stab von B bis C gelegt, der Neigungswinkel gemessen und die Meßoperation so lange wiederholt, bis man an das zweite Ende der abgesteckten Linie gekommen ist.



Die gesuchte horizontale Projektion der Linie ABCDE . . . . . ist dann gleich aB+Bc+Cd+De+ . . . . .; nun ist aB=AB cos. α_1; Bc=BC cos. α_2; Cd=CD cos. α_3; De=DE cos. α_4; . . . . . daher wenn derselbe Stab oder Stäbe von gleicher Länge l angeordnet worden sind, die gesuchte Linie

$$L=l\left\{\cos.\alpha_1+\cos.\alpha_2+\cos.\alpha_3+\cos.\alpha_4+\ldots\ldots\right\}\ldots\ldots 1).$$

Es ist aber cos. $\alpha=1-2\sin.^2\frac{\alpha}{2}$, wird jeder cosinus auf dieselbe Art ausgedrückt, so ist bei den n Stäben

$$L=nl-2l\left\{\sin.^2\frac{\alpha_1}{2}+\sin.^2\frac{\alpha_2}{2}+\sin.^2\frac{\alpha_3}{2}\ldots\ldots\right\}$$

und wenn der Unterschied zwischen der wahren Länge und ihrer Projektion mit x bezeichnet wird,

$$x = -2l \left\{ \sin.^2 \frac{\alpha_1}{2} + \sin.^2 \frac{\alpha_2}{2} + \sin.^2 \frac{\alpha_3}{2} + \ldots\ldots \right\} \ldots\ldots 2).$$

Hätte die abgesteckte Linie durchaus dasselbe Gefälle α, so wäre die gesuchte Reduktion auf den Horizont $x = -2nl \sin.^2 \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots 3)$.

§. 45. Wie aus der Gleichung 1) §. 44 zu ersehen ist, hängt die gesuchte Größe L, einen richtigen Maßstab l vorausgesetzt, nur von der genauen Bestimmung der Neigungswinkel ab; nehmen wir aber an, jeder derselben sei um $\pm\beta$ fehlerhaft gemessen, und untersuchen wir, welchen Einfluß dieser Fehler auf die gesuchte Länge hat.

Bezeichnen wir die so erhaltene Länge mit L', so ist $L' = l \{\cos. (\alpha_1 \pm \beta) + \cos. (\alpha_2 \pm \beta) + \cos. (\alpha_3 \pm \beta) + \ldots\ldots\ldots \}$. Dabei wollen wir β so klein voraussetzen, daß wir $\cos. \beta = 1$ und $\sin. \beta = \beta$ setzen können, dadurch erhält der Ausdruck L' folgende Form:

$L' = l \{\cos. \alpha_1 + \cos. \alpha_2 + \cos. \alpha_3 + \ldots\} \pm \beta l \{\sin. \alpha_1 + \sin. \alpha_2 + \sin. \alpha_3 + \ldots\}$, und weil das erste Glied $= L$ ist, so ist $L' - L$ der so begangene Fehler x, daher

$$x = \pm \beta l \{\sin. \alpha_1 + \sin. \alpha_2 + \sin. \alpha_3 + \ldots\ldots\} \ldots\ldots 1).$$

Sind n solche Winkel gemessen worden und setzen wir

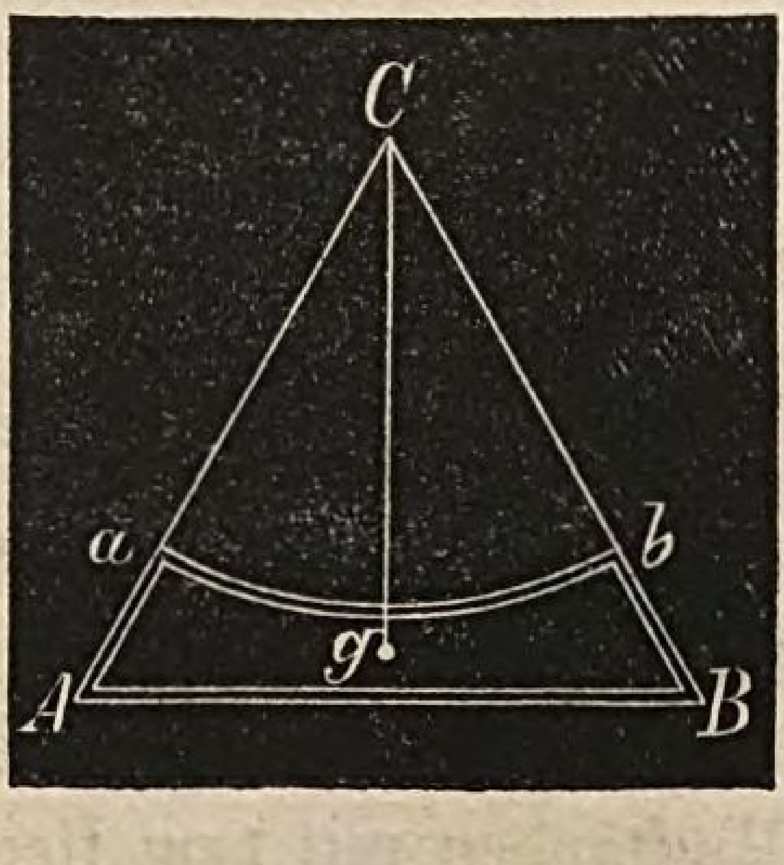
$\sin. \alpha_1 + \sin. \alpha_2 + \sin. \alpha_3 + \ldots\ldots = n \sin. \alpha$, so ist

$$x = \pm \beta l n \sin. \alpha \ldots\ldots 2).$$

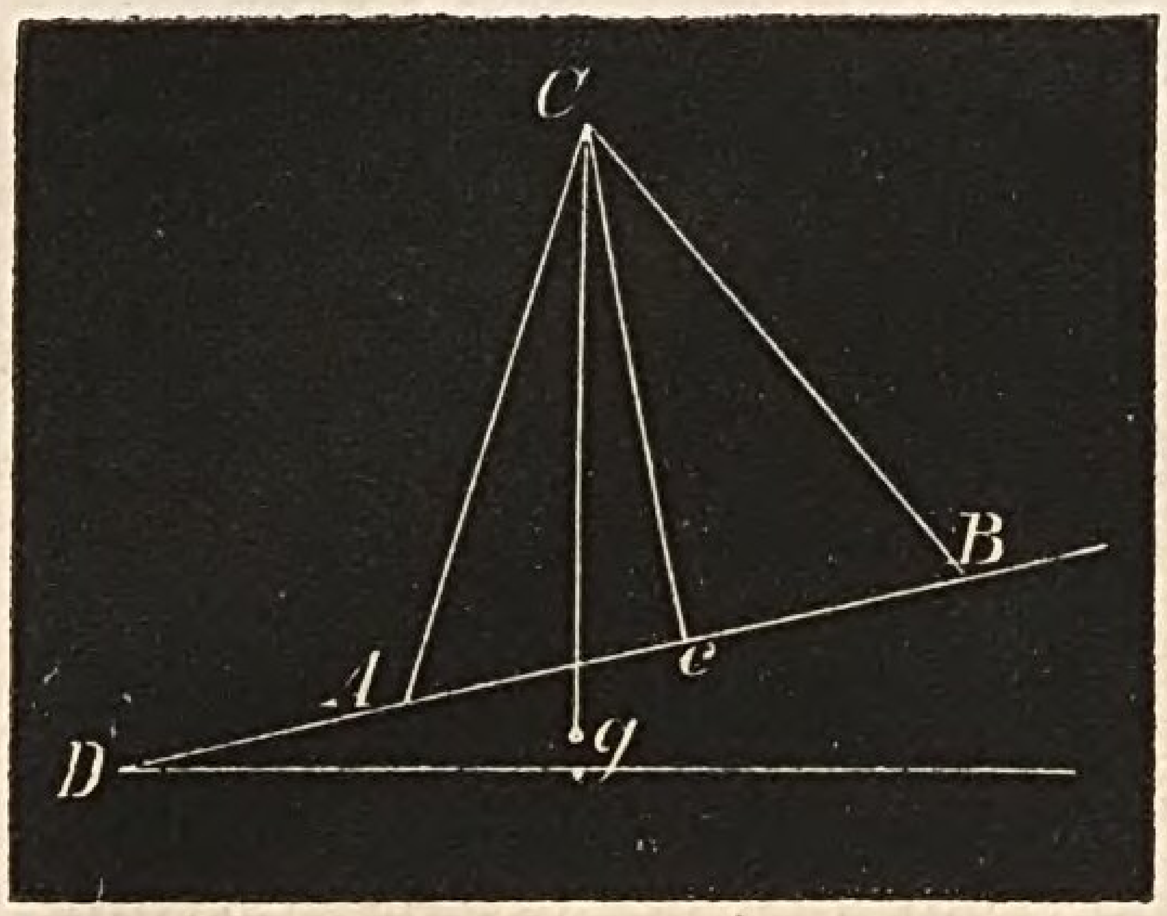
Aus dieser Gleichung folgt, daß der Fehler x desto größer ist, bei je größerem Winkel α derselbe Fehler β begangen worden ist, daß also größere Neigungswinkel schärfer bestimmt werden müssen.

Lassen wir $\alpha = 10^0$, $\beta = 10' = 600$ Sekunden, oder da in dem obigen Ausdrucke β den Bogen bedeutend und (§. 8) $\beta = \beta'' \sin. 1''$ ist, somit $\beta = 0{\cdot}00291$; $l = 2$ Klafter, $n = 500$ bedeuten, so ist $x = \pm 0{\cdot}505$ Klafter; behalten wir für β, l und n ihre Werthe, setzen wir aber $\alpha = 15$ Grade, so ist $x = \pm 0{\cdot}7529$ Klafter.

§. 46. Das Mittel, den Neigungswinkel des am Boden gelegten Maßstabes zu messen, besteht aus einem hölzernen gleichschenkeligen Dreiecke ABC, Fig. 15, auf welchem ein messingener von 20 zu 20 Minuten eingetheilter Gradbogen ab so befestiget ist, daß der Nullpunkt der Eintheilung in der Senkrechten liegt, die von dem Scheitel C auf die Grundlinie AB gefällt worden ist. In dem Scheitel C ist das eine Ende eines biegsamen dünnen Fadens (Pferdehaares) angebunden, an dem andern Ende bei g ist eine kleine Bleikugel befestigt, wodurch das Haar, da das Dreieck beim Gebrauche in der vertikalen Richtung gehalten wird, ebenfalls vertikal ist.



Mittelst dieses Instrumentes, welches man die Setzwage nennt, kann der Neigungswinkel einer Linie BD, Fig. 16 (siehe nächste Seite) gegen den Horizont DE, weil cCg=BDE ist, unmittelbar an den Gradbogen und zwar, da man



von jedem Intervalle den fünften Theil leicht schätzen kann, bis auf vier Minuten abgelesen werden.

Um sich aber zu überzeugen, ob der Nullpunkt der Gradeintheilung in der vorausgesetzten Senkrechten Cg liegt, so setze man die Wage an den geneigten Stab BD auf, und lese die Anzahl Grade und Minuten ab, welche zwischen dem Nullpunkte und dem vertikalen Faden Cg enthalten sind; hierauf stelle man die Setzwage, ohne den Maßstab berührt zu haben, so auf, daß das Ende B genau auf den Punkt kommt, wo früher A war, und umgekehrt A auf B, und bemerke, nachdem der Faden zur Ruhe gekommen ist, die Anzahl Grade und Minuten, die jetzt dem Winkel entsprechen; ist die erste Angabe m, die zweite n, so ist der wahre Neigungswinkel $\alpha = \frac{m+n}{2}$ und der Nullpunkt um die Größe $\frac{m-n}{2}$ fehlerhaft bestimmt; denn bedeutet x den Winkel in Graden ausgedrückt, um welchen der Nullpunkt des Gradbogens aus der auf AB gefällten Senkrechten ausweicht, α den wahren Neigungswinkel eines Maßstabes gegen den Horizont, und hat die Setzwage bei der ersten Stellung m^0, bei der zweiten n^0 angegeben, so ist $m = \alpha + x$, $n = \alpha - x$, somit

$$a = \frac{m+n}{2} \text{ und } x = m - \alpha = \frac{m-n}{2}.$$

Z. B. in der ersten Lage sei $m = 7^0\ 44'$, in der zweiten $n = 7^0\ 36$, so ist $\alpha = 7^0\ 40'$ und der Nullpunkt liegt außerhalb der Senkrechten nach der Seite, wo das zweite Mal abgelesen wurde, um einen Winkel $x = 4$ Minuten. Dieser Fehler wird bemerkt und entsprechend in die Rechnung genommen.

Zusatz. Andere zur Messung der Neigung des Terrains brauchbare Instrumente finden wir im zweiten Theile dieses Buches.

Ausmittlung des wahrscheinlichsten Werthes einer Größe bei mehreren gleich guten Messungen.

§. 47. Wenn man eine extensive Größe bei gleicher Aufmerksamkeit und mit Instrumenten, welche dieselbe Schärfe der Messung zulassen, mehrmals gemessen hat, so wird man in den Resultaten dennoch kleine unvermeidliche Fehler erhalten, die durch die Unvollkommenheit der Meßinstrumente und unserer Sinne, endlich durch die äußern Einflüsse, z. B. ungünstige Beleuchtung, entstanden sind, und es ist nun die Aufgabe eine Methode aufzustellen, welche aus den fehlerhaften Messungen ein Resultat abzuleiten lehrt, das unter den obwaltenden Umständen mit dem kleinsten Fehler behaftet ist.

Diese Methode ist der Inhalt einer besondern Theorie, welche von Gerling mit dem Namen Ausgleichungsrechnung bezeichnet worden und eine specielle Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist.

Es würde uns jedoch viel zu weit führen, wenn wir hier eine strenge Begründung aller in Anwendung kommenden Sätze aufnehmen wollten; einige Gründe für die Richtigkeit des Verfahrens lassen sich auch a priori angeben.

Man kann nämlich nicht annehmen, daß durch die Messung immer zu viel oder zu wenig erhalten wird, viel wahrscheinlicher ist es, daß von den Maßen einige zu groß, andere zu klein bezüglich des wahren Werthes sein werden.

Die bei einer aufmerksamen Messung erhaltenen Resultate kann man füglich als die Aussagen glaubwürdiger Zeugen betrachten, jene werden von der Wahrheit unbedeutend abweichen.

Wendet man nun dieses Gleichniß auf unsern vorliegenden Fall an, so muß man aus den durch die Messung erhaltenen Daten die Quantität der gemessenen Größe der Art bestimmen, daß sie von jeder einzelnen Messung sehr wenig abweicht, daß also die Summe der Fehler ein Minimum, somit gleich Null wird.

Die Summe der Fehler ist aber eine Funktion des ersten Grades, aus einer solchen kann weder ein Maximum noch ein Minimum der Variablen bestimmt werden; auch sind einige Fehler positiv, andere negativ, bei der Ausmittlung des wahrscheinlichsten Werthes muß aber der Umstand, ob ein Fehler positiv oder negativ ist, beseitiget und der eine nicht für minder schädlich als der andere gehalten wird.

Aus dem Gesagten ergibt sich somit die Nothwendigkeit, aus den einzelnen Fehlern eine Funktion zu bilden, welche von einem höheren Grade ist, und in der sämmtliche Fehler positiv erscheinen; eine solche Funktion ist die Summe jeder geraden Potenz der einzelnen Fehler, man nimmt aber der Einfachheit halber die zweite Potenz, d. h. man erhält die gesuchte Funktion, aus welcher das mit dem kleinsten Fehler behaftete Resultat abgeleitet werden kann, wenn man die zweite Potenz der Fehler summirt.

Bezeichnet man die zu suchende Größe mit x, die zu bildende Funktion mit v, ferner die durch nmalige Messung erhaltenen Daten mit $a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_n$, so sind $(x-a_1), (x-a_2), (x-a_3) \ldots .. (x-a_n)$ die begangenen Fehler, offenbar einige positiv, andere negativ; und

$$v=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+ \ldots .. +(x-a_n)^2 \ldots .. 1).$$

Wird dieser Ausdruck in Bezug auf x differenzirt und $\frac{dv}{dx}=o$ gesetzt, so erhält man $\frac{dv}{dx}=2(x-a_1)+2(x-a_2)+2(x-a_3)+ \ldots . +2(x-a_n)$, somit $(x-a_1)+(x-a_2)+(x-a_3)+ \ldots . (x-a_n)=o \ldots . 2)$ und

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_n}{n} \ldots . 3),$$

also das schon längst angewendete Verfahren, aus mehreren gleich guten Messungen das arithmetische Mittel als den wahrscheinlichsten Werth der gemessenen Größe anzunehmen.

Ist die Größe x ausgemittelt, so findet man auch den Fehler jeder einzelnen Messung, ihre Summe muß wie die Gleichung 2) zeigt, gleich Null sein.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen, bei einer 5maligen Messung einer Linie habe man gefunden

$a_1 = 156{\cdot}34$ Wiener Klafter,
$a_2 = 157{\cdot}00$ „ „
$a_3 = 156{\cdot}72$ „ „
$a_4 = 156{\cdot}81$ „ „
$a_5 = 156{\cdot}47$ „ „

Wird die Summe dieser Maße durch 5 dividirt, so ist der Quotient 156·668 als der wahrscheinlichste Werth der gemessenen Linie zu betrachten. Die Fehler der einzelnen Messungen sind —0·328, +0·332, +0·052, +0·142, —0·198, ihre Summe gleich Null.

Setzt man $x - a_1 = v_1$, $x - a_2 = v_2$, $x - a_3 = v_3$, ... $x - a_n = v_n$, so kann die Gleichung 1) kürzer so geschrieben werden

$$v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2 + \ldots + v_n{}^2 = \Sigma(v^2) \ldots . 4).$$

Man kann nun fragen, wenn bei jeder Messung derselbe Fehler α (vom Zeichen abgesehen) begangen würde, wie groß könnte dieser sein, damit doch die Summe der Quadrate $= \Sigma(v^2)$ wäre?

Da jeder Fehler $= \alpha$ ist, so folgt aus der Gleichung 4

$$n\alpha^2 = \Sigma(v^2) \text{ und } \alpha = \sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n}} \ldots 5).$$

Die Größe α nennt man die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel und beurtheilt nach ihr die relative Güte der Messungen, nennt nämlich jene Reihe von Messungen die genauere, aus welcher ein kleinerer Werth für α resultirt.

Für das obige Beispiel wäre $\alpha = \sqrt{\dfrac{0{\cdot}27988}{5}} = \sqrt{0{\cdot}055976} = 0{\cdot}236.$

Aber auch der aus 3) berechnete Werth x ist nicht fehlerfrei, sondern der Wahrheit nur sehr nahe; wenn nun X den wahren Werth einer Größe vorstellt, so sind $(X - a_1)$; $(X - a_2)$ ..... $(X - a_n)$ die eigentlichen Fehler der Messungen; setzen wir $X - a_1 = w_1$; $X - a_2 = w_2$ .... $X - a_n = w_n$, so ist Gleichung 4)
$w_1{}^2 + w_2{}^2 + w_3{}^2 + \ldots + w_n{}^2 = \Sigma(w^2)$, daher wenn
$w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_n = m$ gesetzt wird, $nm^2 = \Sigma(w^2) \ldots\ldots 6)$,
wobei m und $\Sigma(w^2)$ unbekannt sind.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt, daß $\Sigma(v^2) + m^2$ der wahrscheinlichste Werth der Größe $\Sigma(w^2)$ ist, somit

$$nm^2 = \Sigma(v^2) + m^2 \ldots\ldots 7); \text{ und } m = \sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}} \ldots . 8).$$

Die Größe m wird der mittlere oder der zu befürchtende Fehler genannt. Bei einer großen Anzahl Messungen nähert sich m der Größe α.

Wichtig ist endlich die Kenntniß jenes Fehlers, der in dem arithmetischen Mittel zu befürchten ist, wenn in den einzelnen Messungen ein mittlerer Fehler m vorkommt; jenen auszumitteln lassen wir wieder x das arithmetische Mittel der Messungen und X den wahren Werth der gemessenen Größe bedeuten, setzen ferner $X - x = \pm \mu$, so ist μ die gesuchte Größe.

Da $X-a_1=w_1$; $x-a_1=v_1$ somit $X-x=w_1-v_1$ überdieß $X-x=\pm\mu$ gesetzt wurde, so ist $w_1=v_1\pm\mu$; auf dieselbe Art $w_2=v_2\pm\mu$, ... $w_n=v_n\pm\mu$; werden diese Werthe in die Gleichung 6 gesetzt, so ist

$nm^2=\Sigma(v\pm\mu)^2=\Sigma(v^2)\pm2\mu\Sigma(v)+\Sigma(\mu^2)$, aber vermöge 2) ist $\Sigma(v)=0$,

$$\Sigma(\mu^2)=n\mu^2 \text{ und 7) } nm^2=\Sigma(v^2)+m^2, \text{ daher}$$

$$\mu=\frac{m}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n(n-1)}}\ldots 9).$$

Aus der Gleichung $\mu=\frac{m}{\sqrt{n}}$ folgt, daß bei demselben m die Messungen im quadratischen Verhältnisse wiederholt werden müssen, wenn die Größe μ im einfachen Verhältnisse abnehmen soll.

Bei dem obigen Beispiele ist $m=\sqrt{\frac{0{\cdot}27988}{4}}=0{\cdot}264$, daher $\mu=\frac{0{\cdot}264}{\sqrt{5}}=0{\cdot}118$, d. h. die Länge ist bis auf $\pm$ 0·118 richtig bestimmt, ihre wahre Länge kann somit 156·786 und auch 156·550 Klafter sein.

Anmerkung. Vollständig behandelt findet man diesen Gegenstand in Gerling's Ausgleichungsrechnung der praktischen Geometrie, Hamburg und Gotha 1843, ferner in der Differential- und Integralrechnung von Navier, übersetzt von Dr. Theodor Witthstein, Hannover 1848.

Mittelbare Messung der Linien mittelst Ketten und Stäben.

§. 48. Als Vorbereitung zur mittelbaren Messung der Linien wollen wir vorausschicken:

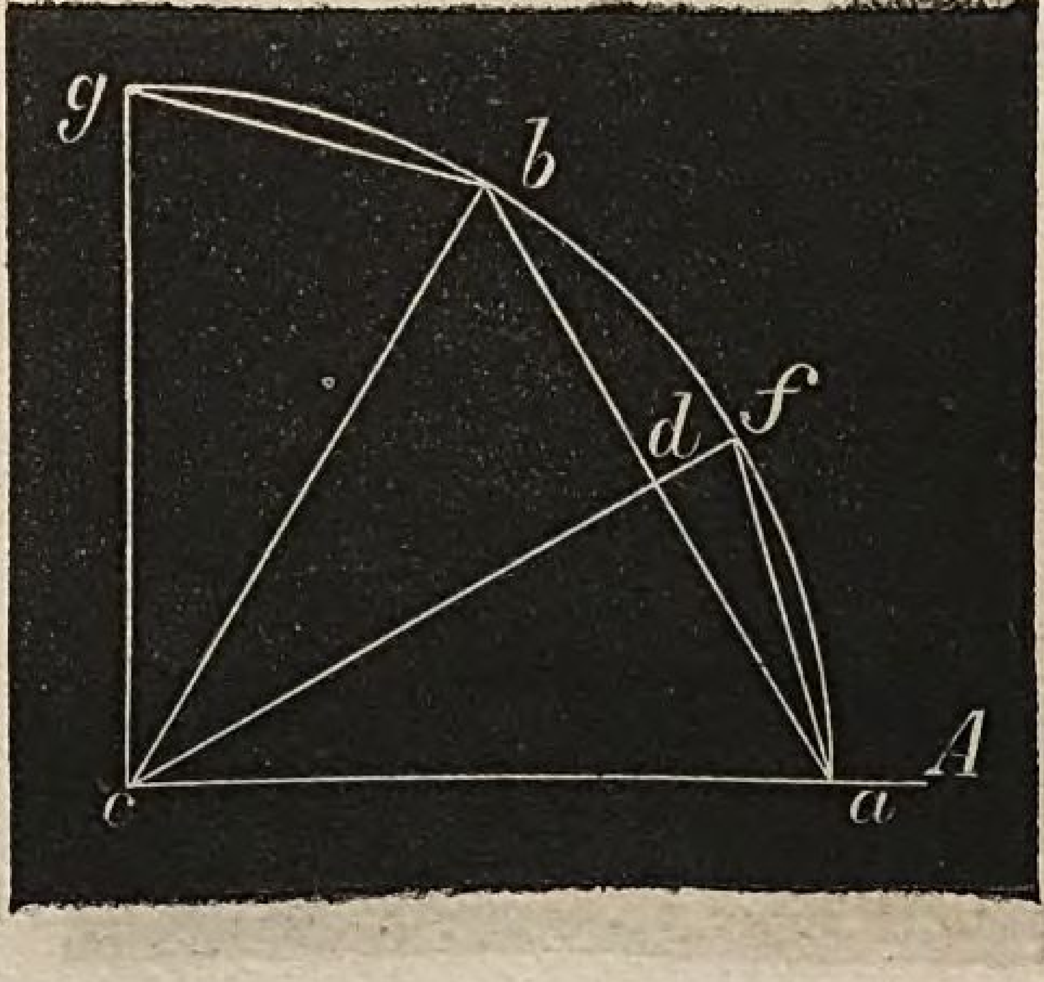
a) Mittelst der Kette und den Absteckstäben einen gegebenen Winkel zu konstruiren oder zu übertragen.

b) In einem gegebenen Punkte einer Linie eine Senkrechte errichten.

c) Von einem außerhalb einer geraden Linie liegenden Punkte auf diese eine Senkrechte zu fällen und

d) zu einer gegebenen Geraden durch einen bestimmten Punkt eine parallele Linie zu ziehen.

§. 49. 1. Aufgabe. Einen Winkel von 60 Graden zu konstruiren, wenn der eine Schenkel cA, Fig. 17, und der Scheitel c gegeben sind.



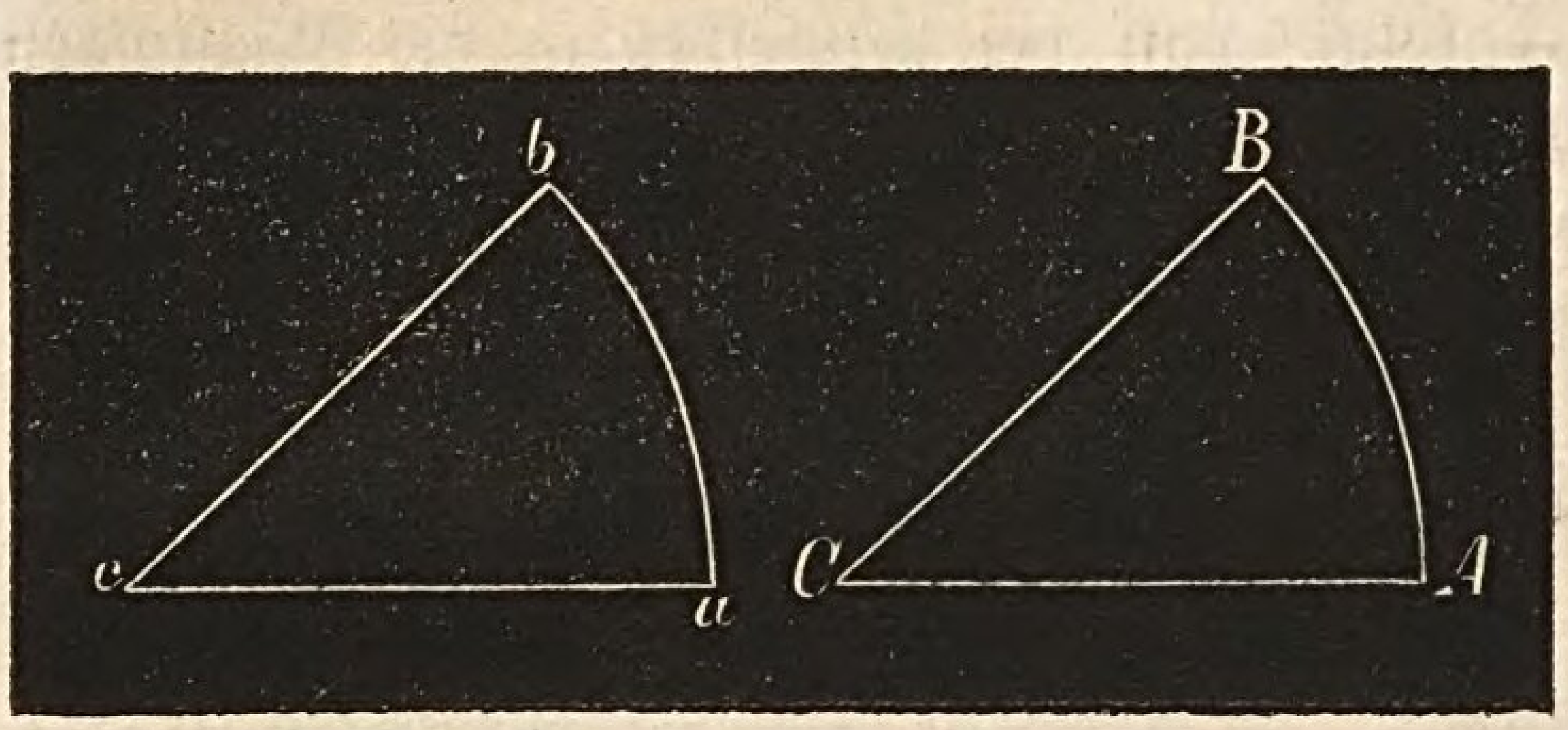
Auflösung. Man spanne die Kette von c in der Richtung cA aus und diese reiche bis a, so daß ca entweder die ganze Kette oder einen aliquoten Theil derselben vorstellt; nun beschreibe man mit der Länge ca, c als Mittelpunkt, auf dem Boden einen Bogen und durchschneide

denselben von a aus mit derselben Länge ca; da nun ab=ac=bc ist, so ist abc ein gleichseitiges Dreieck, somit bca=60 Grade.

Zusatz. Wird, nachdem die Kette von a nach b ausgespannt ist, in ihrer Hälfte d ein Stab gestellt, so ist acd=30°; bestimmt man den Durchschnittspunkt f zwischen dem Bogen ab und der Geraden cd und trägt man die Sehne af oder bf von b aus gegen g in dem Bogen abg auf, so ist der Winkel acg=90 Grade, somit gc auf ac senkrecht.

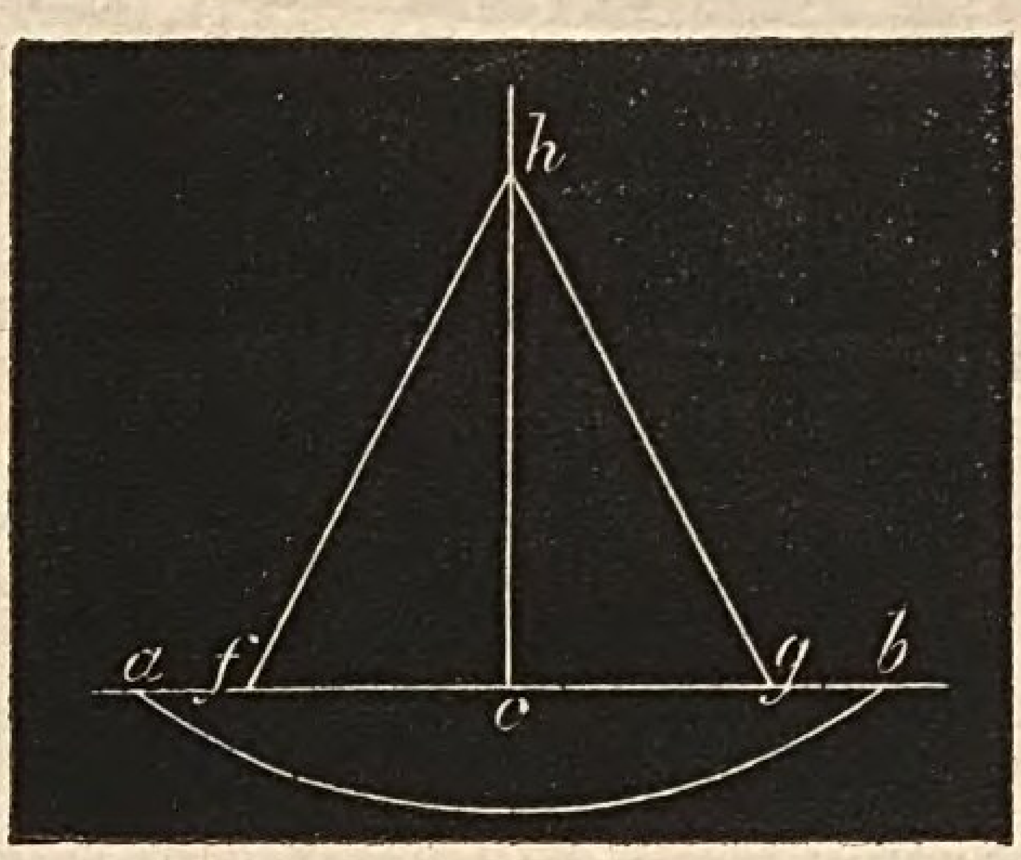
Anmerkung. Das Sichtbarmachen des Bogens abg geschieht am einfachsten durch den Kettenstab selbst, oder auch durch einen an die Kette gehaltenen Kettennagel.

2. Aufgabe. Einen Winkel acb, Fig. 18, zu konstruiren, der einem gegebenen ACB gleich ist, also den Winkel ACB auf die ca in c zu übertragen.



Auflösung. Man trage auf der CA, CB und ca eine gleiche Anzahl Klafter auf, beschreibe mit ca aus c einen Kreisbogen ab, und durchschneide denselben von a aus mit der Sehne AB, wodurch man den Punkt b und somit auch den Winkel bca=BCA erhält.

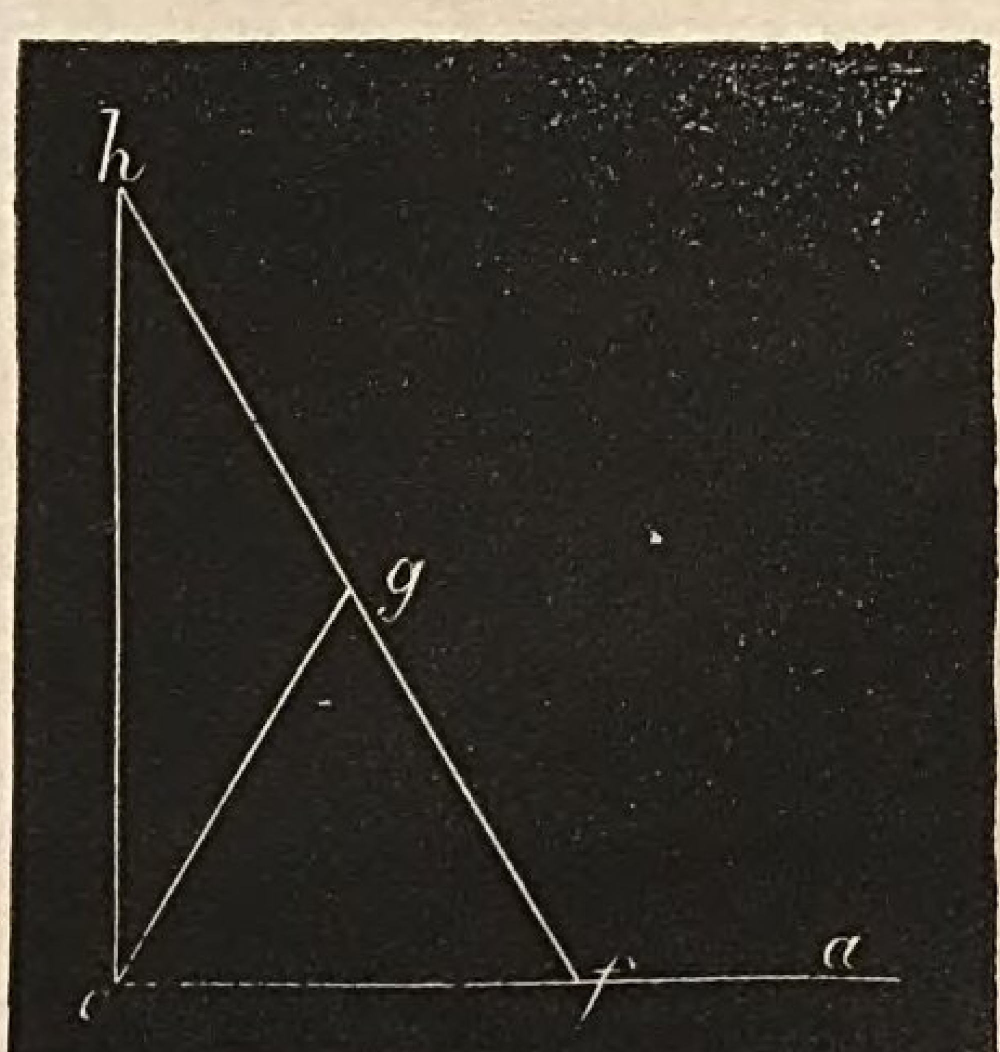
§. 50. Aufgabe. In dem Punkte c, Fig. 19, der Geraden ab eine Senkrechte zu errichten.



1. Auflösung. Man trage von c aus auf der ab beiderseits 3 bis 4 Klafter auf, so daß cf=cg wird, in den Punkten f und g befestige man die Endringe der Kette, spanne diese gleichförmig und bestimme den Scheitel h des gleichschenkeligen Dreieckes fgh durch einen Stab, so ist ch senkrecht auf ab.

Zusatz. Man könnte cf=cg auch länger als 5 Klafter nehmen, dann aber müßte aus f mit der ganzen Kette ein Bogen beschrieben und dieser aus g mit derselben Länge durchgeschnitten werden, und so wieder h bestimmt werden.

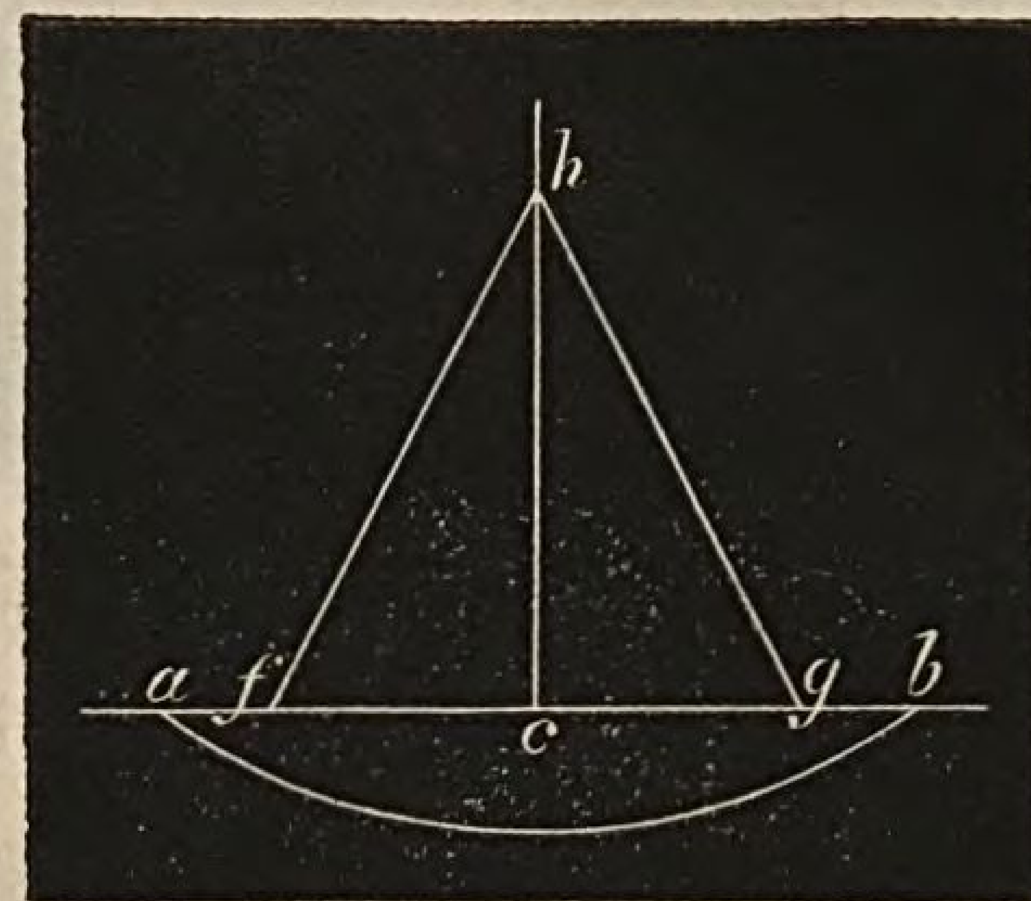
2. Auflösung. Man trage, Fig. 19 (siehe die frühere Zeichnung), von c aus auf der ab genau 3 Klafter auf, also cg=3°, wodurch der Punkt g bestimmt ist, nun befestige man das eine Ende der Kette in g, das Ende der neunten Klafter aber in c, fasse diese bei dem fünften Kettenringe, spanne sie gleichförmig und bestimme den Ort des fünften Kettenringes durch einen Stab, dieser sei h, so ist hc senkrecht auf ab; denn es ist cg=3, ch=4 und hg=5 Klafter, daher $\overline{hg}^2 = \overline{cg}^2 + hc^2$, also das Dreieck bei c rechtwinklich.



3. Auflösung. Man konstruire auf der ca, Fig. 20, ein gleichseitiges Dreieck cfg, indem man cf=5 Klafter macht, in c und f die Endringe der Kette legt, diese bei dem Mittelringe faßt und gleichmäßig spannt, wodurch man den Punkt g

erhält. Nun lasse man das eine Ende der Kette in f, spanne aber die andere Hälfte cg in der Richtung fg aus, so ist hc die gesuchte Senkrechte; denn denkt man sich aus g mit dem Halbmesser gf einen Kreisbogen beschrieben, so geht dieser durch c und h, somit ist der Winkel hcf im Halbkreise, also ein rechter.

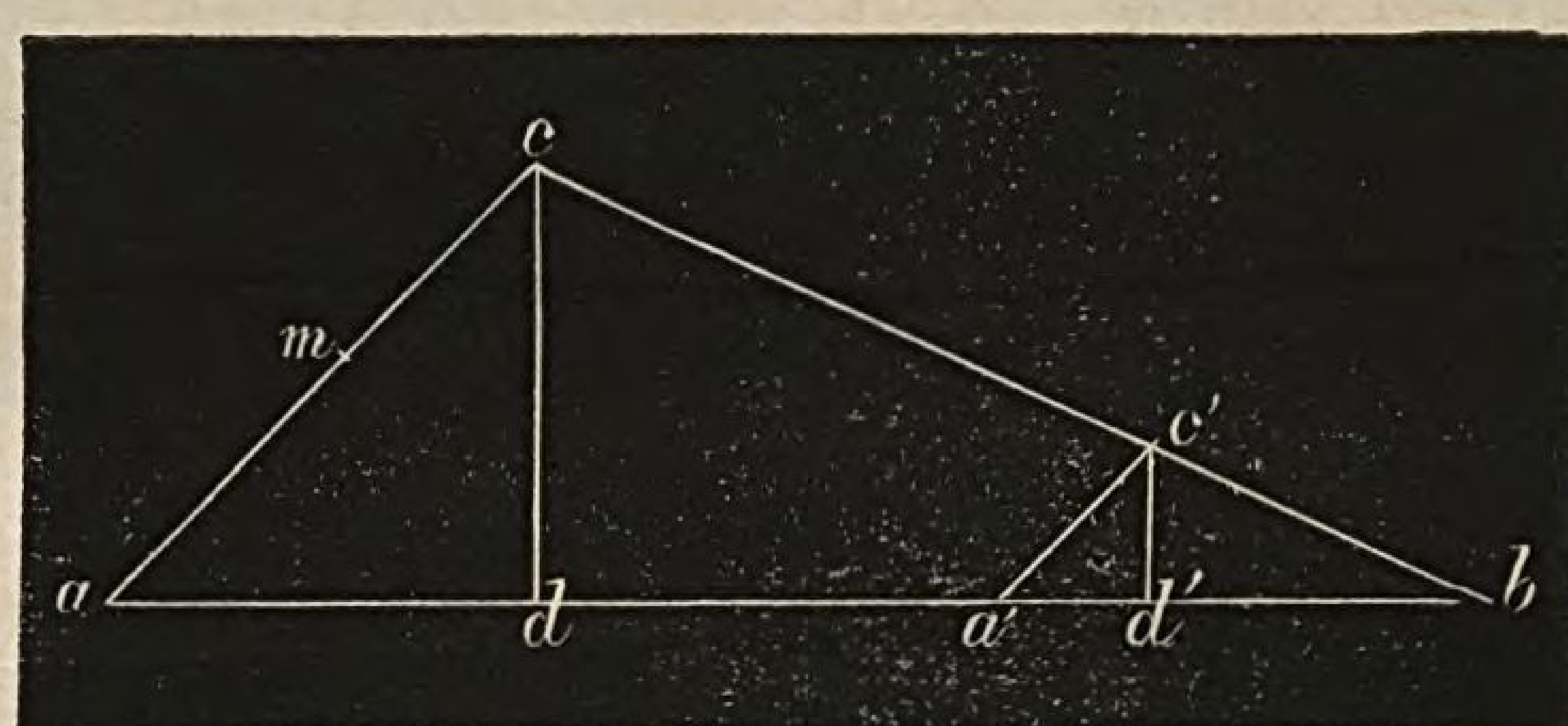
§. 51. Aufgabe. Von dem Punkte h, Fig. 19, auf die ab eine Senkrechte zu fällen.



1. Auflösung. Ist der Punkt h unter 10 Klafter von der ab entfernt, so befestige man in h das eine Ende der Kette und durchschneide mit dem andern die gegebene Gerade, wodurch man die Punkte a und b erhält. Nun halbire man die Länge ab in c, so ist ch die gefällte Senkrechte.

Wollte man das Messen der ab zum Behufe der Halbirung nicht vornehmen, so könnte man über ab ein gleichschenkeliges Dreieck errichten, der Scheitel dieses Dreiecks und der gegebene Punkt h bestimmen die auf ab senkrecht stehende Linie.

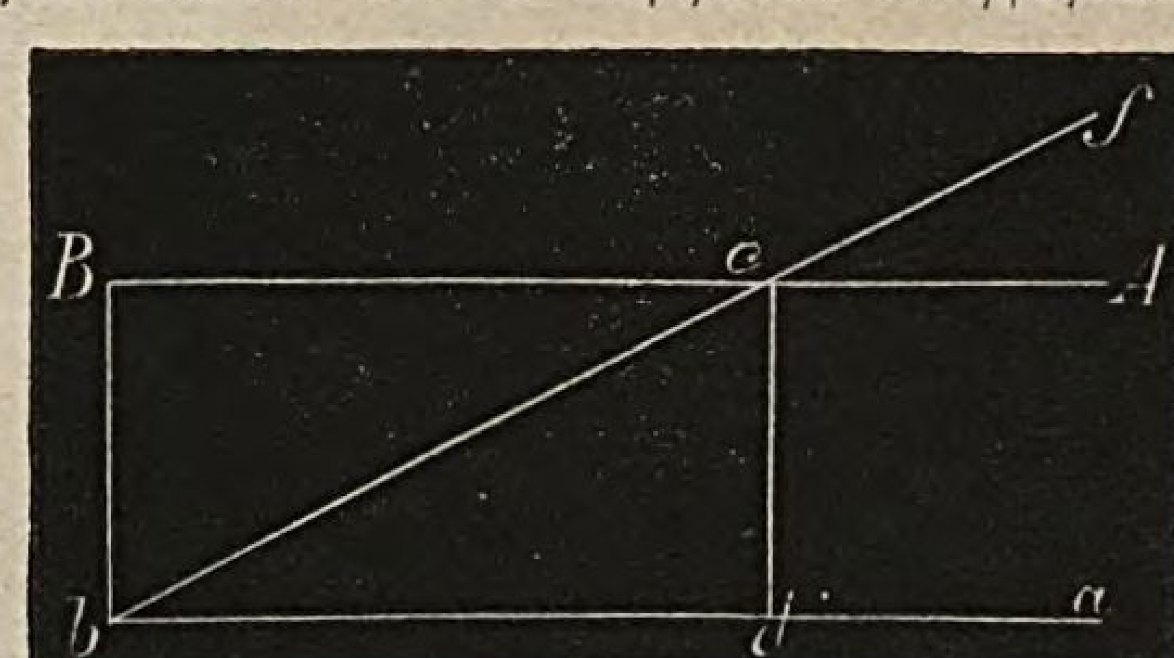
2. Auflösung. Wäre der Punkt c, Fig. 21, von der ab über 10 Klafter entfernt, oder unzugänglich, so nehme man in der Geraden ab zwei Punkte a und b an, von welchen c sichtbar ist, visire von denselben nach c und lasse in den Visuren ac und bc Stäbe m und c' stellen. Nun messe man die ab und trage einen aliquoten, z. B.



den dritten Theil von b aus auf, also $ba' = \frac{ba}{3}$, in a' konstruire man den Winkel $c'a'b = cab$, so ist das Dreieck a'c'b ähnlich mit acb. Ist nun a'b so angenommen worden, daß c' unter 10 Klafter von ab entfernt ist, so kann nach der vorigen Auflösung die Senkrechte c'd' gefällt werden, wodurch man den Punkt d' und dadurch zugleich das Dreieck c'd'b ähnlich mit cdb erhält; es verhält sich somit $ab : a'b = 3 : 1 = cb : c'b$; ferner $db : d'b = cb : c'b$, also auch wie $3 : 1$, daher ist $db = 3d'b$; wird die Linie d'b gemessen und die Länge bd von b aufgetragen, so erhält man den Punkt d, somit auch die Senkrechte cd. Auch folgt aus den ähnlichen Dreiecken cdb und c'd'b, daß $cd = 3c'd'$ ist.

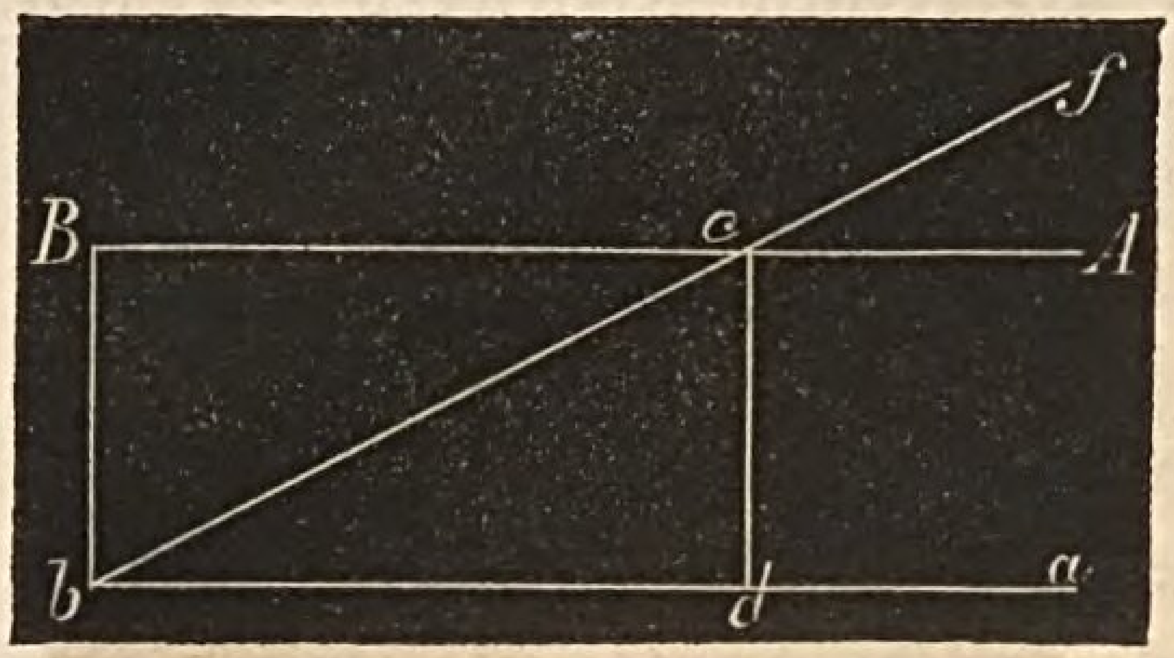
Zusatz. Das Errichten und Fällen der Senkrechten wird durch einige Instrumente, namentlich durch das Winkelkreuz und das katoptrische Winkelrohr sehr erleichtert; über diese Instrumente kann man das Nähere im 3. und 4. Abschnitte nachsehen.

§. 52. Aufgabe. Durch den Punkt c, Fig. 22, zu der Linie ab eine Parallele AB zu ziehen.



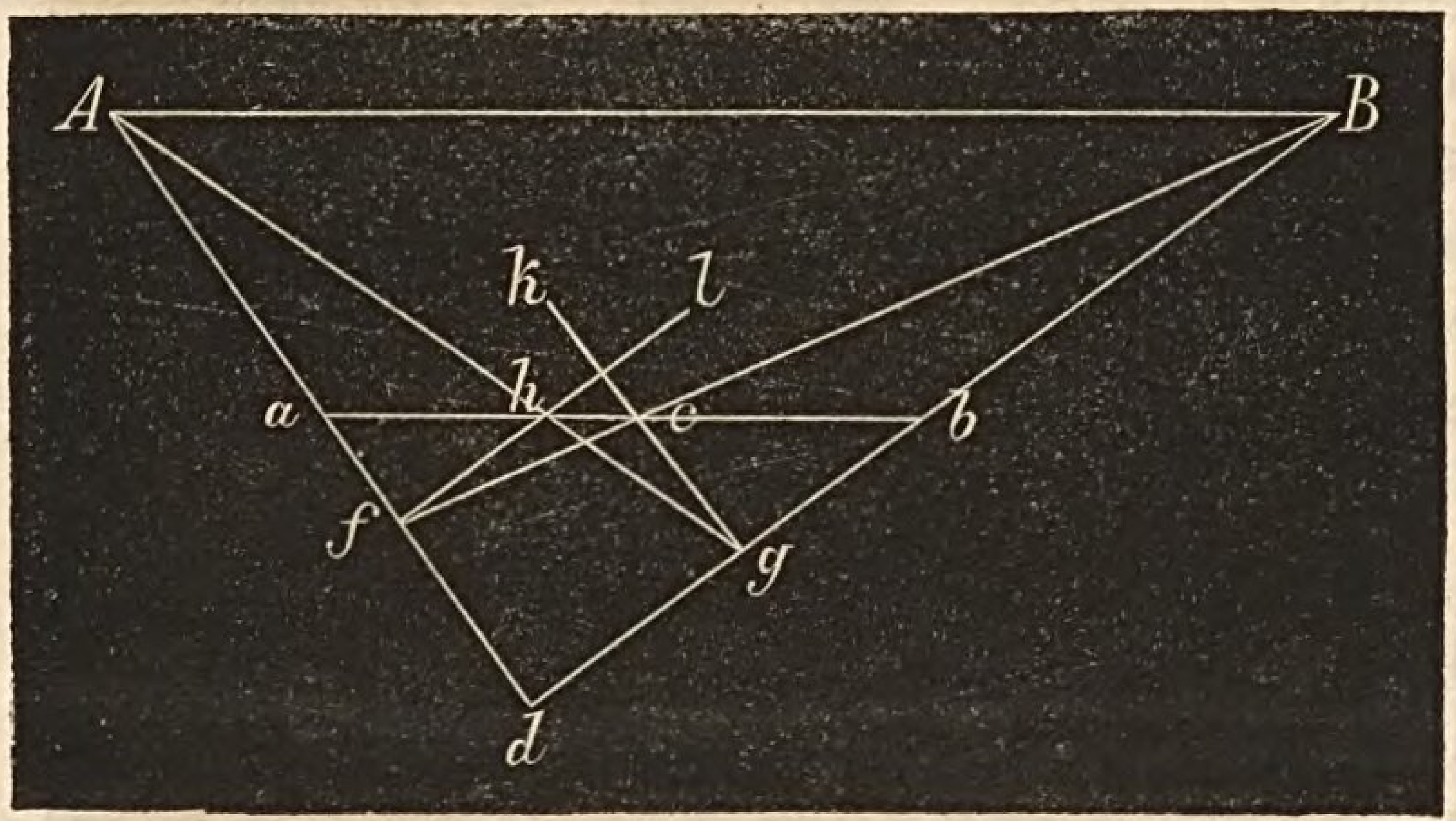
1. Auflösung. Man messe die von c auf ab gefällte Senkrechte cd, errichte in einem zweiten Punkte b eine Senkrechte bB und mache $bB = cd$, so ist die durch c und B

bestimmte Linie AB parallel mit ab. Der Punkt b soll jedoch nicht zu nahe an d liegen.



2. Auflösung. Man wähle in der gegebenen Linie ab, Fig. 22, einen Punkt b, von welchem c sichtbar ist, und der Winkel cba nicht zu klein wird; diesen Winkel übertrage man in c so, daß entweder bcB oder fcA gleich cba wird, so ist im ersten Falle Bc, im zweiten Ac, also jeden Falls AB mit ab parallel.

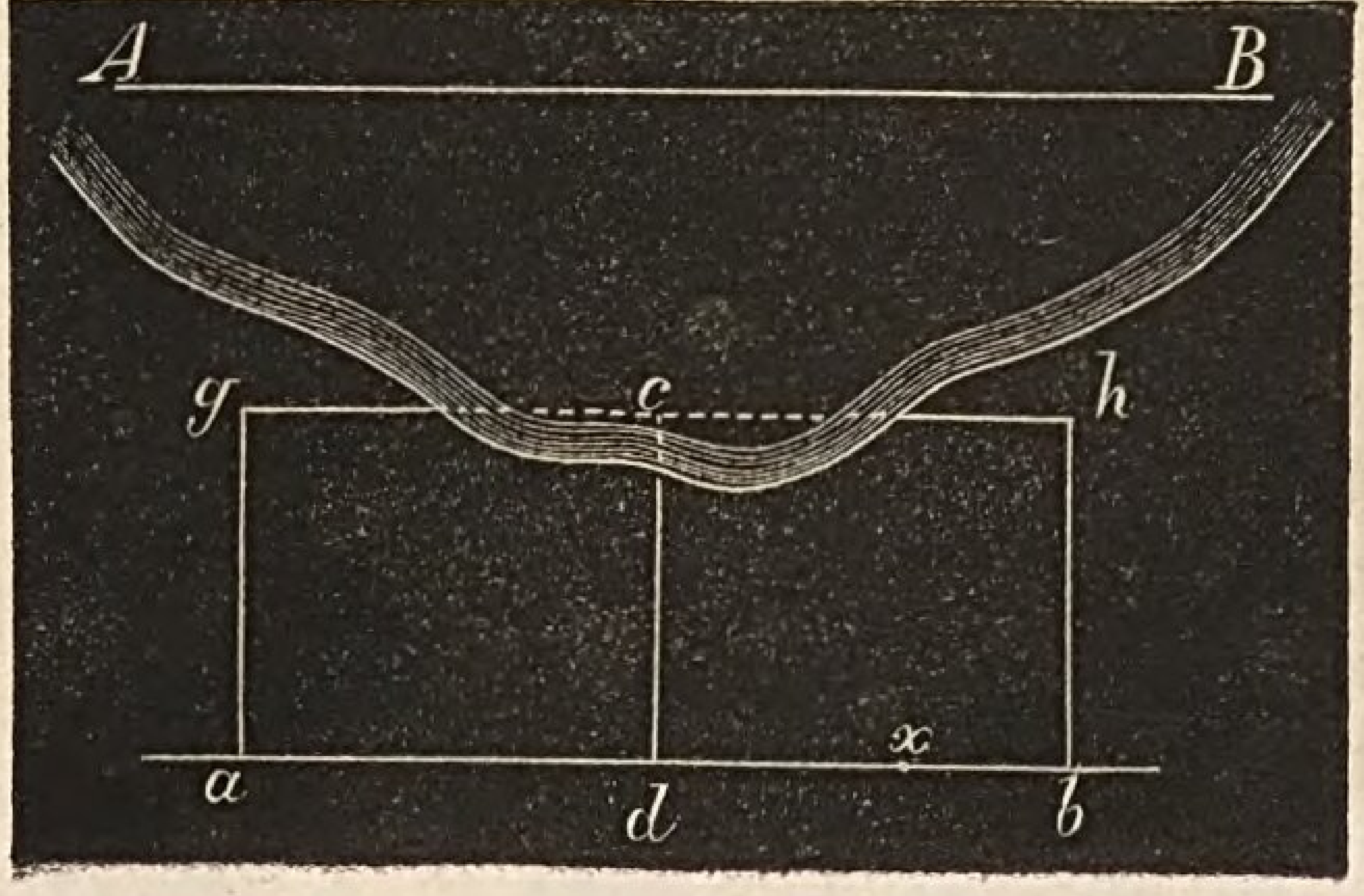
3. Auflösung. Wäre, Fig. 23, durch c mit der unzugänglichen Geraden AB eine parallele Linie zu ziehen, so stelle man in c und in einem zweiten Punkte d, von welchem aus A und B sichtbar sind, Stäbe. Nun bestimmt man den Durchschnittspunkt f zwischen den Visuren dA und Bc, indem der Geometer, während er von d nach A visirt, einen Gehilfen in diese Visur einwinkt, der letztere aber seinen Stab selbst in die Visur cB stellt; von f aus führt man die mit dB parallele Linie fl, von c aus die mit dA parallele Linie ck und bestimmt den Durchschnittspunkt g zwischen den Linien kc und Bd; nun suche man den Durchschnittspunkt h zwischen den Linien gA und fl, zu diesem Zwecke werden in f und l Stäbe gestellt und der Geometer visirt den Gehilfen in die Linie von g nach A, während ein anderer von f nach l visirt; wird endlich die Linie hc nach Erforderniß verlängert, so ist ab die gesuchte mit AB parallele Linie.



Denn die Dreiecke Aah und hgc, Bbc und hcf, ahf und adb, endlich bcg und adb sind ähnlich, demnach finden folgende Proportionen statt:

$$Aa : ah = cg : hc,$$
$$cb : Bb = hc : hf,$$
$$ah : hf = ab : bd,$$
$$cg : cb = ad : ab.$$

Werden diese Proportionen zusammengesetzt, so erhält man Aa : Bb = ad : bd, somit ist AB mit ab parallel.



Zusatz. Sollte Fig. 24 die Linie AB, mit welcher, und der Punkt c, durch welchen eine parallele Linie gh geführt werden soll, unzugänglich sein, so wähle man vorläufig einen zugänglichen Punkt x und führe durch diesen die mit AB parallele Linie ab nach der obigen Auflösung; sodann bestimme man (§. 51, 2. Auflösung) den senkrechten Abstand cd des Punktes c von der ab, und trage diesen auf

die in den Punkten a und b errichteten Senkrechten ag und bh auf, so geht die Linie gh durch c und ist mit AB parallel.

4. Auflösung. In manchen Fällen braucht die zu führende Linie nur nahe mit der gegebenen parallel zu sein, dann ist folgende Auflösung sehr praktisch.



Ist AB, Fig. 25, die gegebene Linie, mit welcher durch den Punkt b eine Parallele zu führen ist, so wählt man einen in der AB liegenden, möglichst weit entfernten Gegenstand C, visirt sodann von b nach demselben und läßt in dieser Visur einen Stab a stellen, so ist ba nahe mit AB parallel.

Wäre aber die Entfernung des Punktes C von A oder B gemessen, so wäre der in der parallelen Lage begangene Fehler

$Bb - Aa = \frac{Bb. AB}{BC}$, könnte somit beseitiget werden.

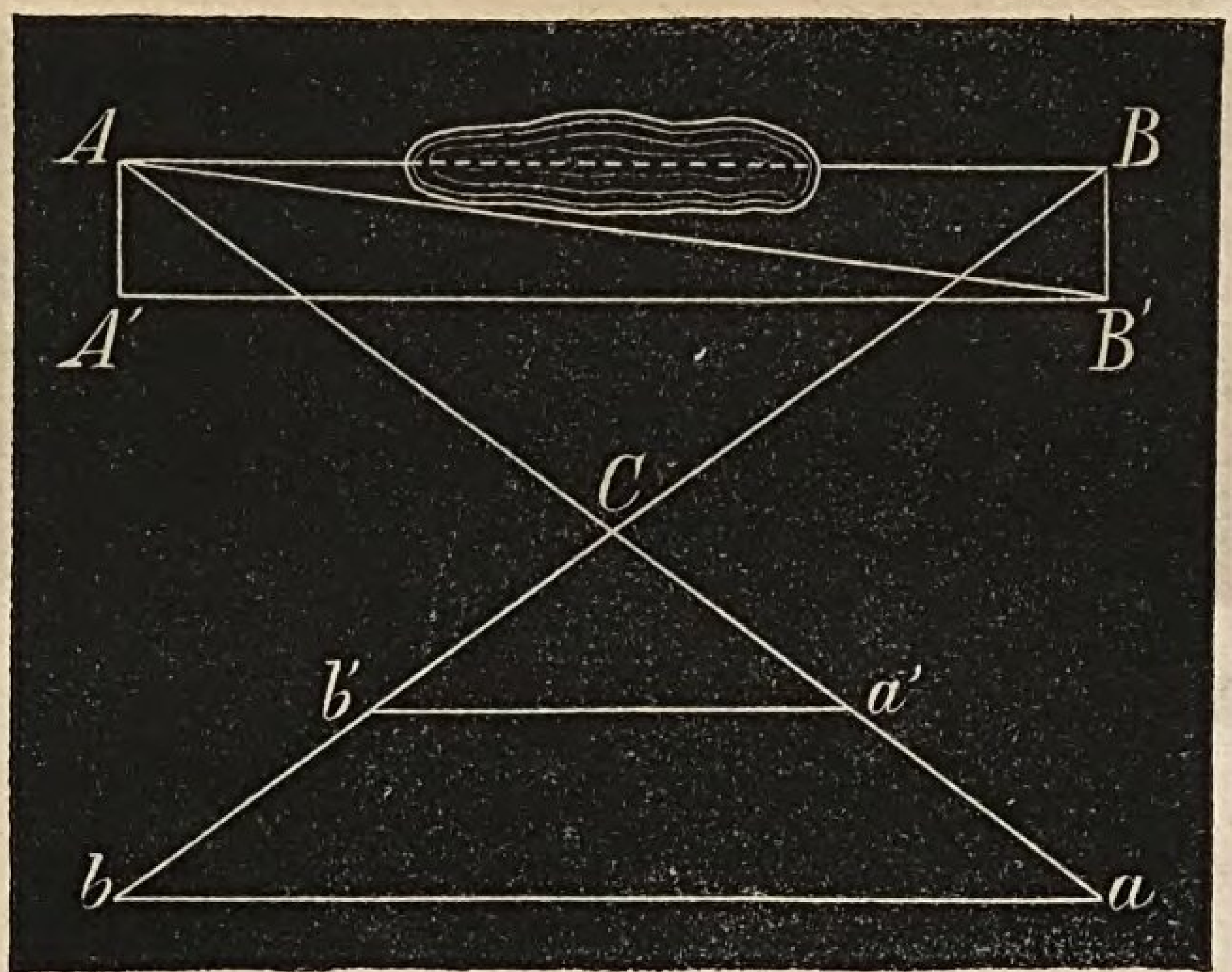
§. 53. Bei der mittelbaren Messung der Linien wollen wir folgende drei Fälle unterscheiden:

Die Länge einer geraden Linie zu bestimmen:

a) die nur an ihren Endpunkten zugänglich ist;
b) die nur an einem der Endpunkte zugänglich und
c) die durchaus unzugänglich ist.

Ad a.

1. Auflösung. Ist zwischen den Endpunkten der zu messenden Linie AB, Fig. 26, ein Hinderniß der Art, daß man von A nach B nicht direkt messen kann, so wähle man einen dritten Punkt C, von dem A und B sichtbar und so ziemlich gleich weit entfernt sind; nun verlängere man die Linien AC und BC und mache ihre Verlängerung Ca = CA, Cb = CB, so ist ab = AB.



Sollte es das Terrain nicht zulassen Ca = CA und Cb = CB zu machen, so trage man auf den Verlängerungen aliquote Theile auf,

also $Ca' = \frac{CA}{n}$; $Cb' = \frac{CB}{n}$, so ist Ca'b' mit CAB ähnlich und $AB = n.a'b'$.

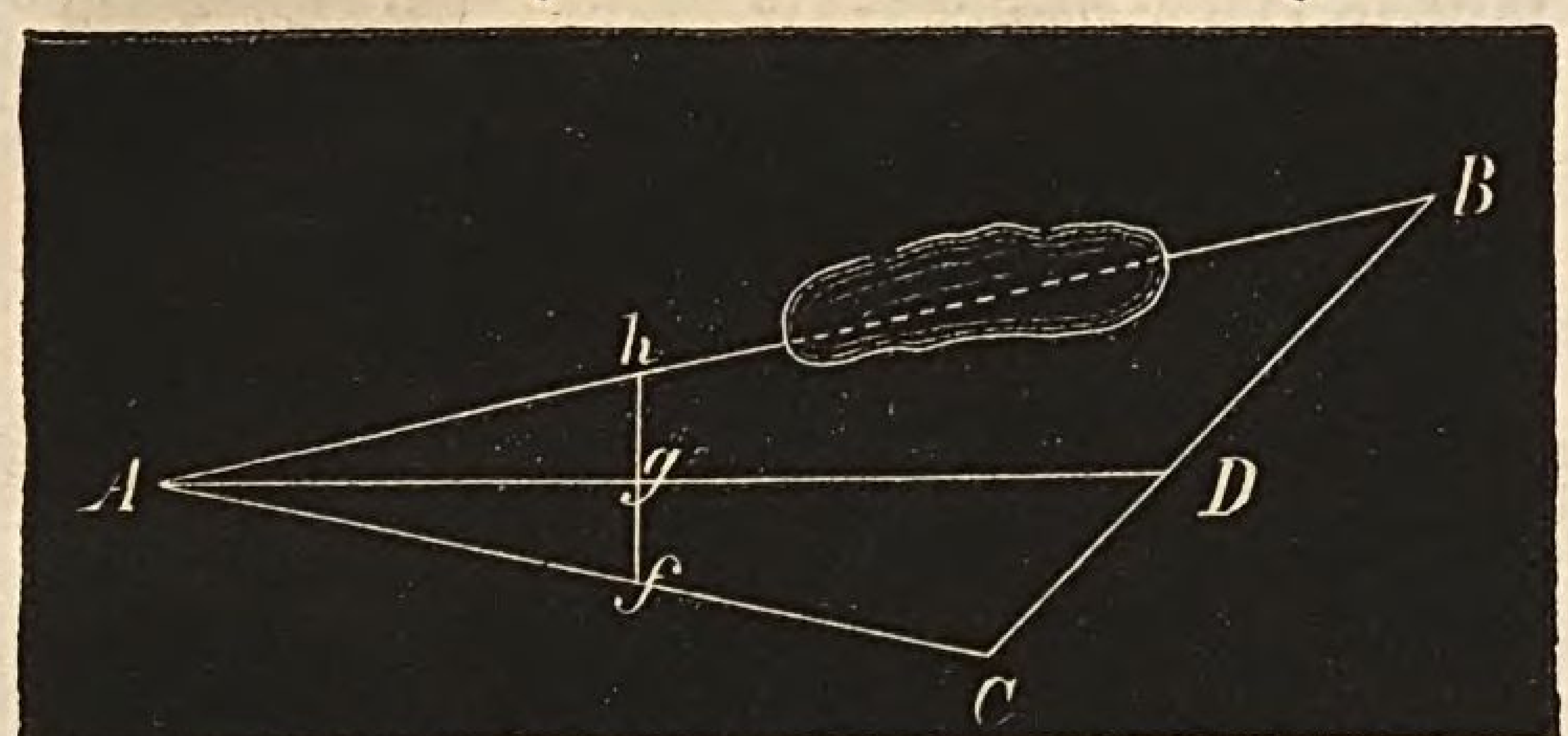
Daß man die aliquoten Theile Ca' und CB' sogleich auf der Linie CA CB auftragen könne, versteht sich von selbst, auch dürfte ein für alle Mal bemerkt werden, daß man die aliquoten Theile nicht zu klein, also n nicht zu groß nehmen dürfe, weil sonst der Fehler in der zu suchenden Linie AB bedeutend werden könnte.

2. Auflösung. Man errichte in den Endpunkten der Linie AB, Fig. 26, (siehe die frühere Zeichnung) Senkrechte AA' und BB', mache diese einander gleich,

und so lang, daß man von A′ nach B′ ungehindert messen kann, so ist A′B′=AB. Wäre man in der Errichtung der Senkrechten gehindert, so dürfte nur AA′ mit BB parallel sein, und dann ist wieder AB=A′B′.

3. Auflösung. Man errichte nur in einem Endpunkte B eine Senkrechte BB′, mache diese so lang, daß man von B′ nach A messen kann; hat man dann BB′ und AB′ gemessen, so ist

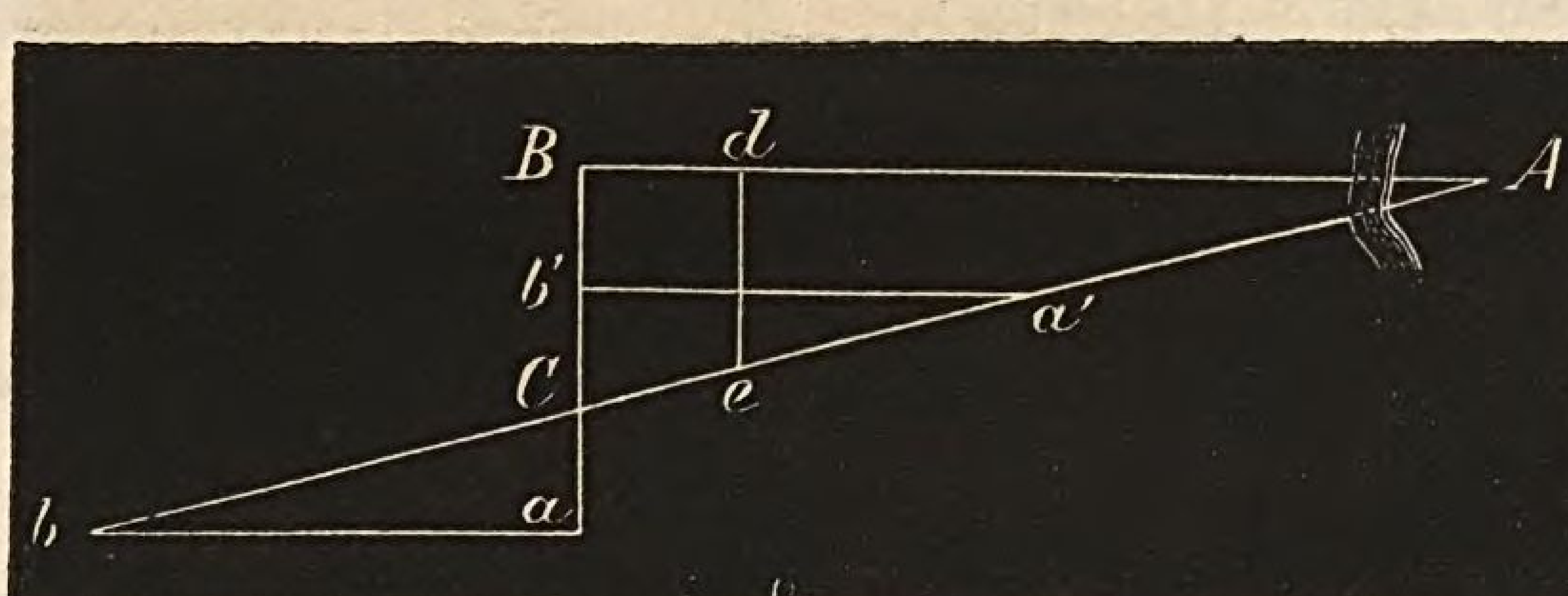
$$AB = \sqrt{\overline{AB'}^2 - \overline{BB'}^2} = \sqrt{(AB' + BB')(AB' - BB')}.$$



4. Auflösung. Man wähle einen Punkt C, Fig. 27, von dem man nach A und B sehen und messen kann; halbire in A den Winkel BAC und suche den Durchschnitt D zwischen der den Winkel halbirenden Linie AD und CB, messe die Linie AC, CD und DB, so verhält sich nach einem bekannten Satze: AB: AC = BD : DC, woraus AB gefunden werden kann.

Die Länge einer Linie zu bestimmen, die nur an einem ihrer Endpunkte zugänglich ist.

§. 54. 1. Auflösung. Ist nur der Punkt B, Fig. 28, zugänglich und soll die Länge AB gemessen werden, so errichte man, wie die Figur zeigt, in B und a auf AB und Ba senkrechte Linien, nehme in der ba einen Punkt b an, von dem A sichtbar ist und bestimme den Durchschnitt C zwischen den Linien bA und Ba. Werden nun BC, Ca und ab gemessen, so ist



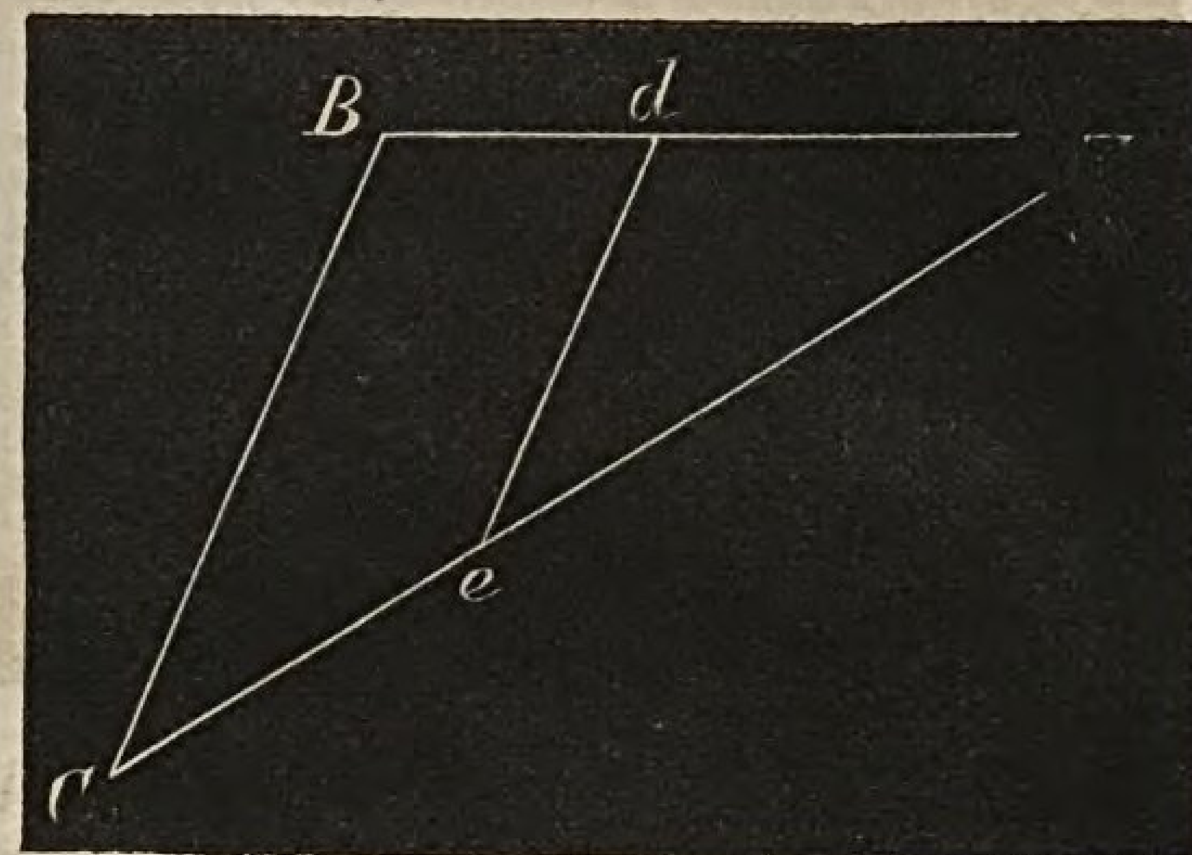
$AB = \frac{BC}{aC}$ ab. Ist $\frac{BC}{aC}$ eine ganze Zahl, so ist die Rechnung einfacher, man kann also auch vorerst BC messen, von C aus einen aliquoten Theil $\frac{BC}{n} = Ca$ auftragen, dann erst in a die zweite Senkrechte ab errichten, und den Durchschnitt b zwischen AC und ab suchen, so ist dann AB = n.ab.

Die Auflösung bleibt dieselbe, wenn man zwischen B und C in b′ eine Senkrechte b′a′ errichtet, den Durchschnittspunkt a′ in der CA sucht, sodann BC, b′C und a′b′ mißt.

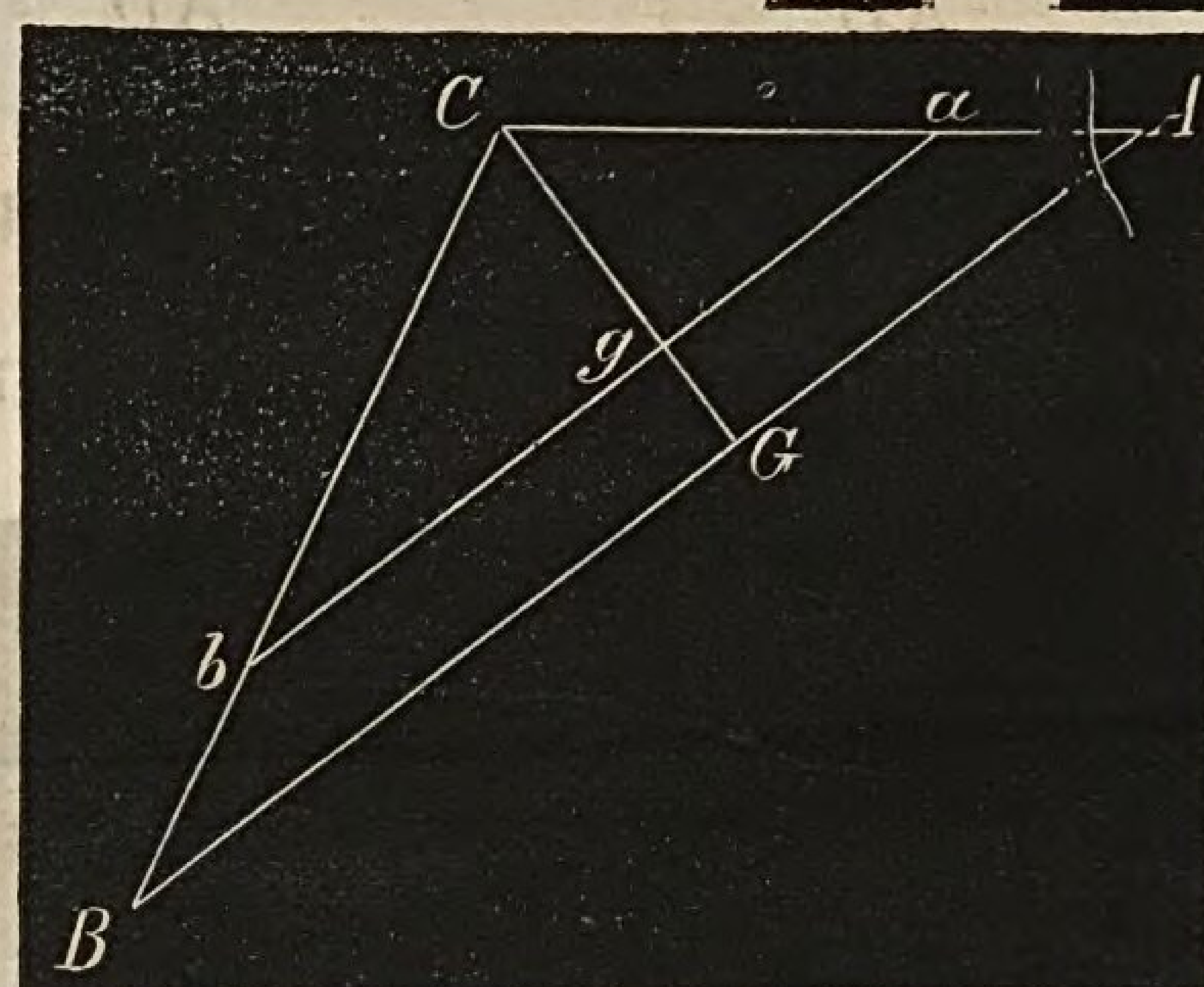
Wo es das Terrain gestattet, kann man auch auf BA die beiden Senkrechten BC und de errichten, und e als den Durchschnitt zwischen den Linien AC und de bestimmen; in diesem letztern Falle müssen die Linien dB, BC und de gemessen

werden, wo dann aus den ähnlichen Dreiecken

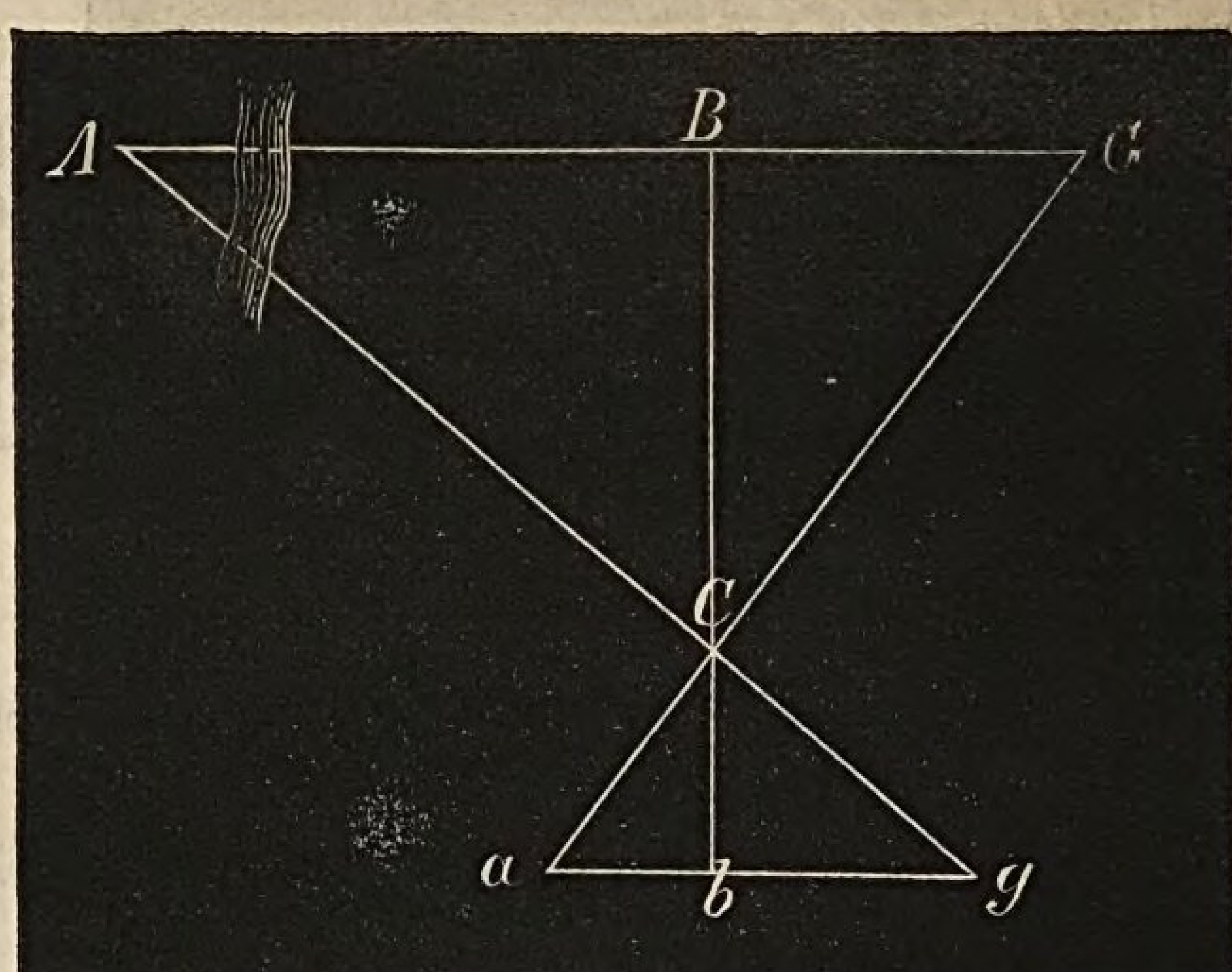
$$\text{Ade und ABC } AB = \frac{BC.dB}{BC - de} \text{ folgt.}$$



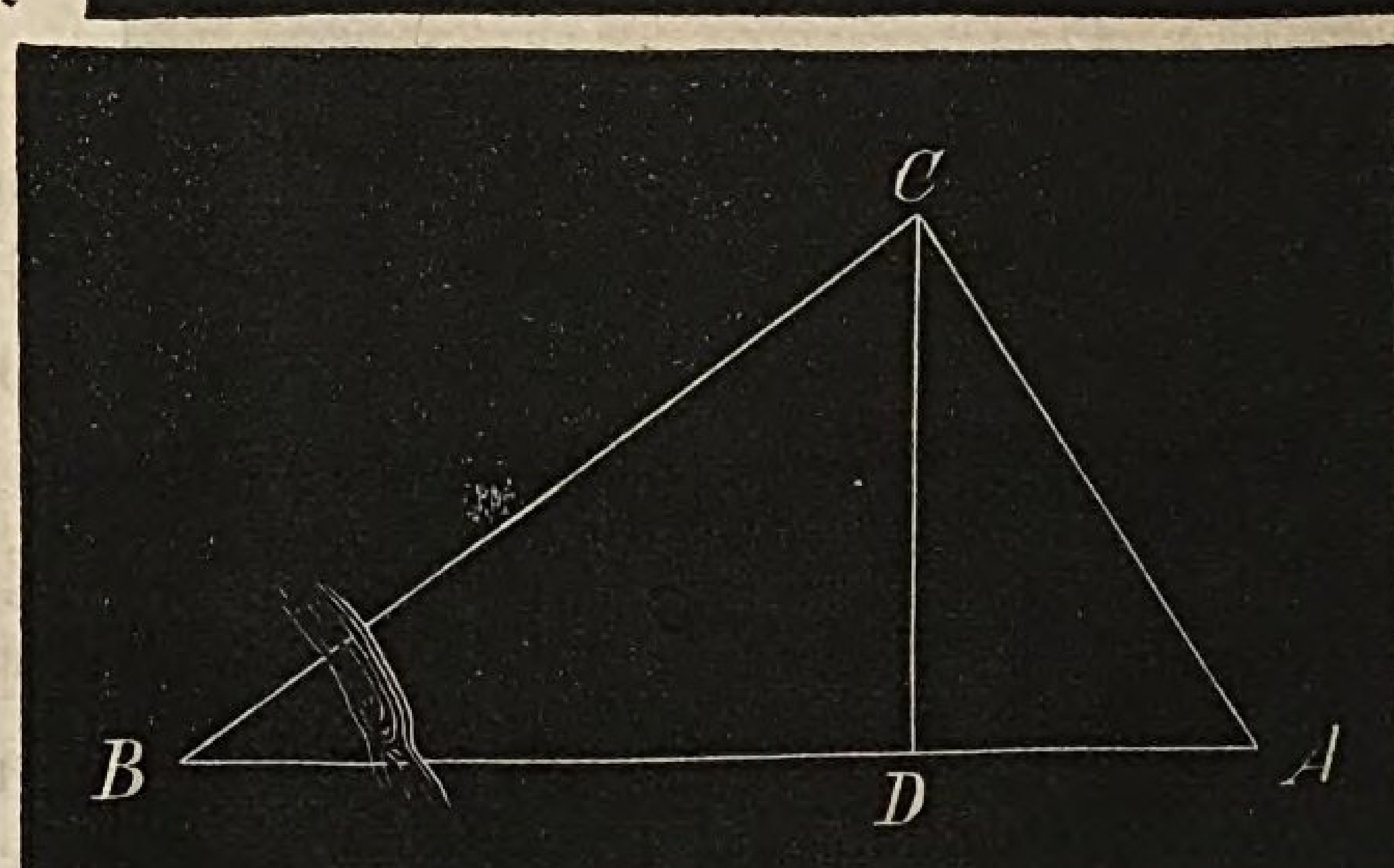
Wie die Fig. 29 zeigt, brauchen die Linien BC und de nur parallel zu sein, so ist wieder AB durch AC, de und Bd bestimmt; hat man also einen Punkt C so angenommen, daß von demselben A und B sichtbar sind, den Winkel ABC in einem Punkte d der Linie AB übertragen, also Ade=ABC gemacht, so ist BC und de parallel und die weitere Auflösung bereits bekannt.



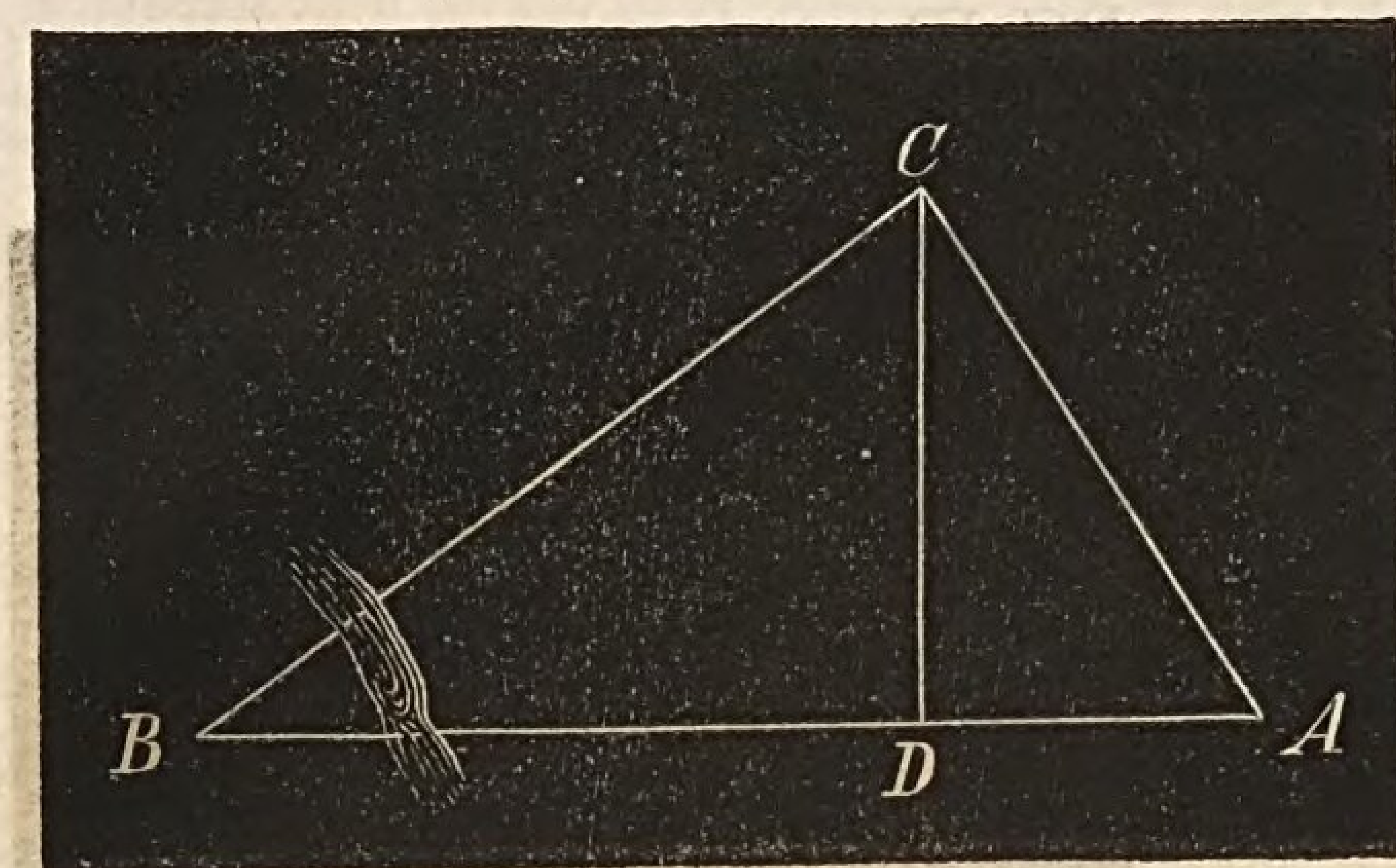
2. Auflösung. Ist die Entfernung AB Fig. 30 zu bestimmen, so nehme man einen Punkt C an, von dem A und B überdies aber noch ein in AB liegender Punkt G sichtbar und die Länge CB und CG direkt meßbar ist, trage nun auf diese Linien von C aus einen aliquoten z. B. den n Theil derselben auf, so daß $Cb = \frac{CB}{n}$, $Cg = \frac{CG}{n}$ ist, und bestimme endlich den Punkt a als den Durchschnitt zwischen CA und bg, so ist ag mit AG, somit ab mit AB parallel und AB=n.ab. Dasselbe Prinzip dieser Auflösung ist in der Fig. 31 dargestellt, der Punkt G liegt außerhalb AB, aber in ihrer Verlängerung, die aliquoten Theile sind auf die Verlängerungen der CG und CB aufgetragen worden. Erlauben es die Umstände CB=Cb und Cg=CG zu machen, so ist ab=AB.



3. Auflösung. Man errichte in jenem Punkte, zu dem man kommen kann, hier A Fig. 32 den Winkel BAC=60° und fälle aus dem unzugänglichen Punkte B, auf den Schenkel AC die Senkrechte BC, so ist AB=2AC, denn weil das Dreieck ABC bei C rechtwinklich ist, so ist $AB = \frac{AC}{\sin. B}$. Nun ist der Winkel B = 30°, sin. 30° = ½, daher AB=2AC.



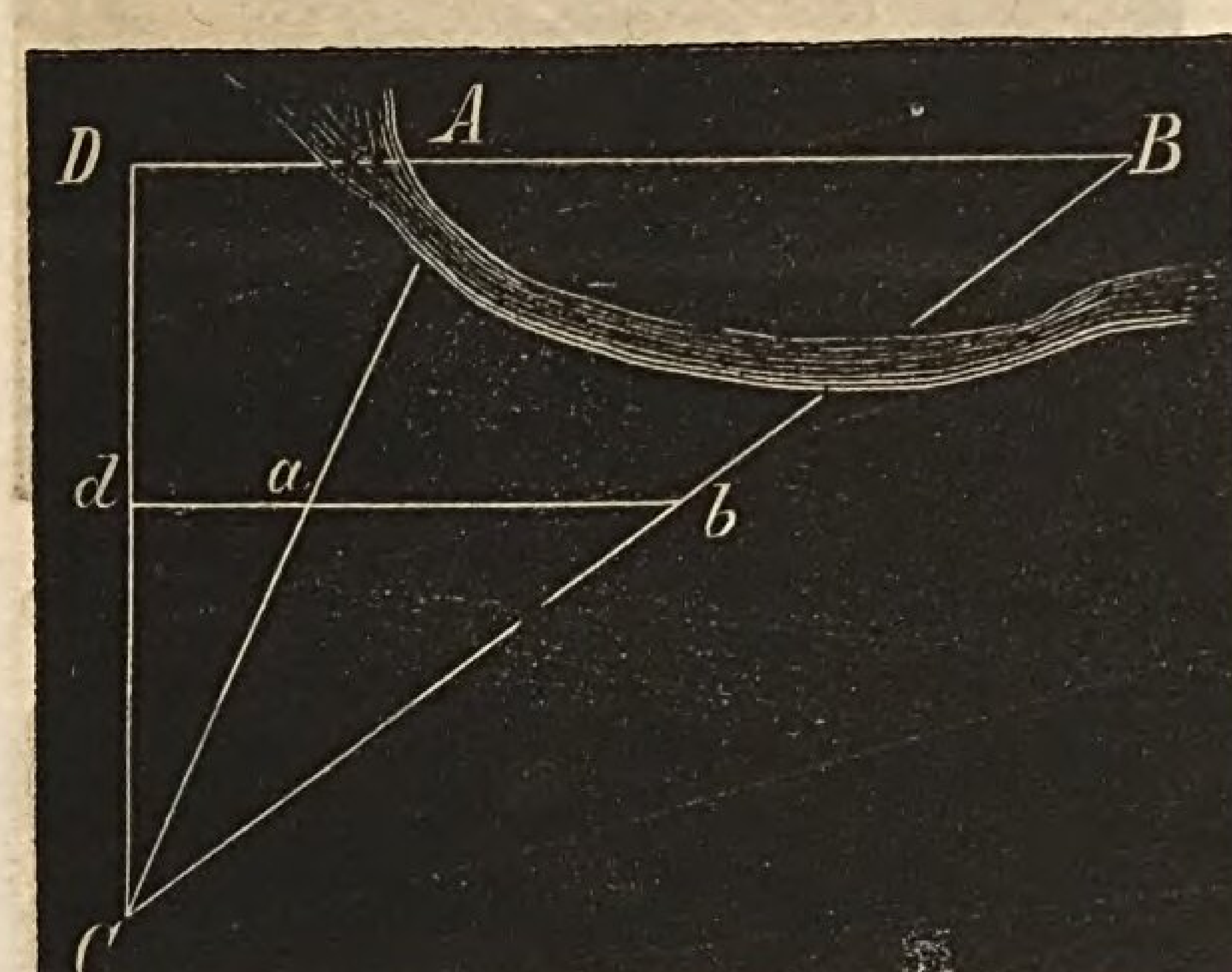
4. Auflösung. Man konstruire in A Fig. 32 einen jedoch nicht gar zu spitzen Winkel BAC, und fälle von B auf AC die Senkrechte BC, von C aus auf AB die Senkrechte CD, so ist CAB mit CAD ähnlich und AD : AC = AC : AB, folglich $AB = \frac{\overline{AC}^2}{AD}$ durch direkt meßbare Linien ausgedrückt. Wollte man statt AC lieber CD messen, so wäre



$$DB = \frac{\overline{CD}^2}{AD} \text{ und } AB = \frac{\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2}{AD}.$$

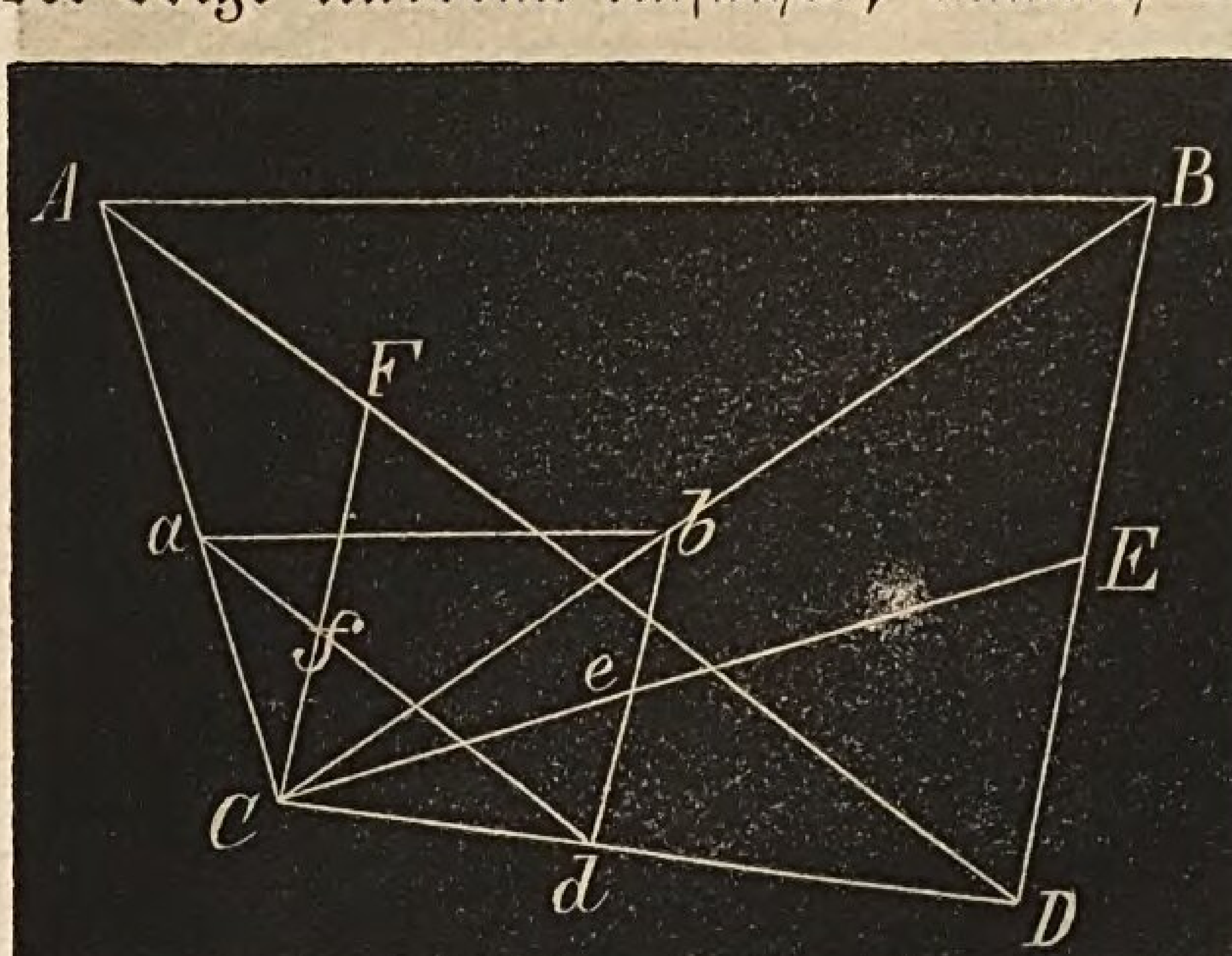
Die Länge einer Linie zu bestimmen, die beiderseits unzugänglich ist.

§. 55. 1. Auflösung. Ist die Linie AB Fig. 33 zwar unzugänglich, kann man aber zu einem Punkte D ihrer Verlängerung kommen, so errichte man in diesem Punkte auf die DB eine Senkrechte DC und in dieser in einem beliebigen Punkte d eine zweite Senkrechte db; der Punkt d muß jedoch so gewählt werden, daß die db gemessen werden kann, von C aber muß A und B sichtbar sein; endlich bestimme man die Durchschnittspunkte a und b zwischen den Linien CA, CB und db. Da nun db mit Db parallel ist, so folgt aus den Dreiecken DAC



und daC ferner DBC und dbC $AB = \frac{CD\,(db - da)}{Cd}$; aus diesem Ausdrucke ist zugleich ersichtlich, welche Linien gemessen werden müssen, um AB zu bestimmen; und kann man den Punkt d so wählen, daß $\frac{CD}{Cd}$ eine ganze Zahl n ist, so wird der obige Ausdruck einfacher, nämlich $AB = n\,(db - da) = n.ab$.

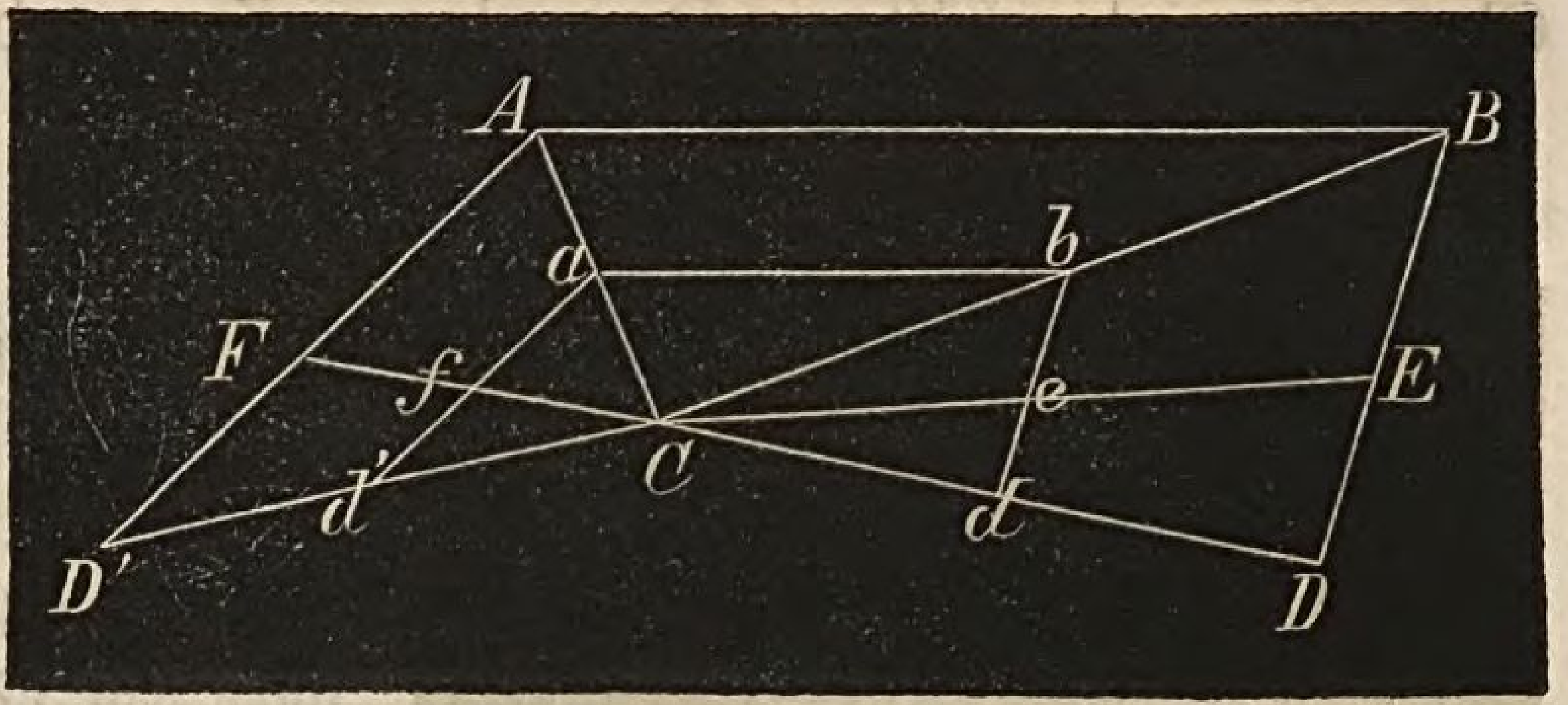
2. Auflösung. Es sei AB Fig. 34 zu bestimmen, so nehme man, wenn zwischen CD und BB freies Terrain ist, eine Linie CD der Art, daß von C und D die Punkte A und B sichtbar sind.



Nun stelle man in der Linie DB einen Stab E, in der DA einen zweiten F so, daß E und F von C sichtbar sind, und messe CD, EC und CF; hierauf trage man auf diese Linien gleiche aliquote

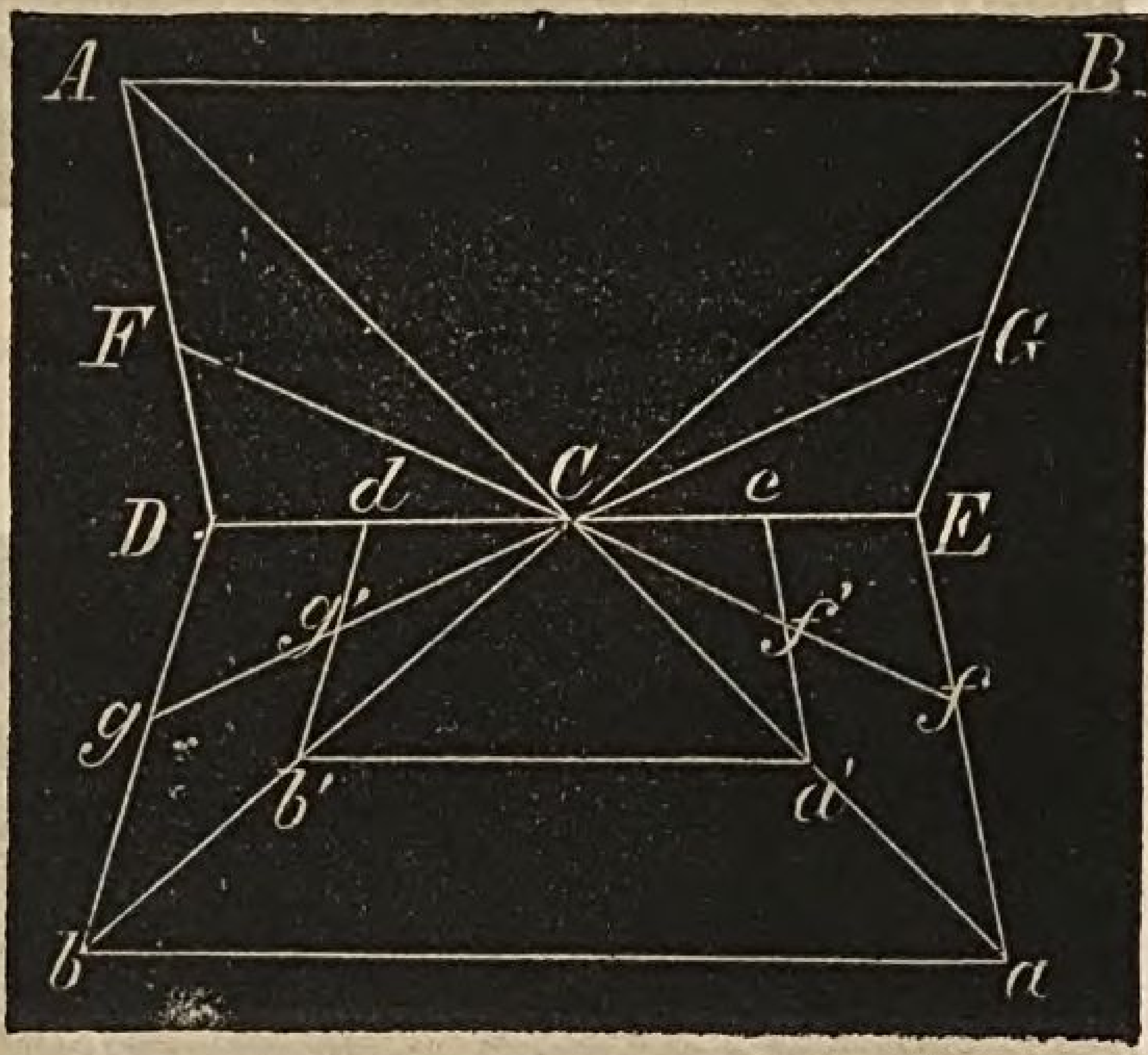
Theile auf, also $Cd = \frac{CD}{n}$; $Ce = \frac{CE}{n}$; $Cf = \frac{CF}{n}$, lasse in dem Punkte d, e, f Stäbe stellen und suche den Durchschnitt b zwischen de und CB, so auch a zwischen df und CA, so ist AB=n.ab; was leicht aus den ähnlichen Dreiecken Cdb mit CDB und Cad mit CAD folgt.

Dasselbe Prinzip der Auflösung ist in der Konstruktion Fig. 35 angewendet, nur ist das Dreieck CDA Fig. 34 (siehe die letzte Zeichnung von pag. 50) bei der Fig. 35 außerhalb des Dreieckes ACB nach ACD′ umgelegt worden; das Uebrige dürfte aus der Figur selbst ersichtlich sein.



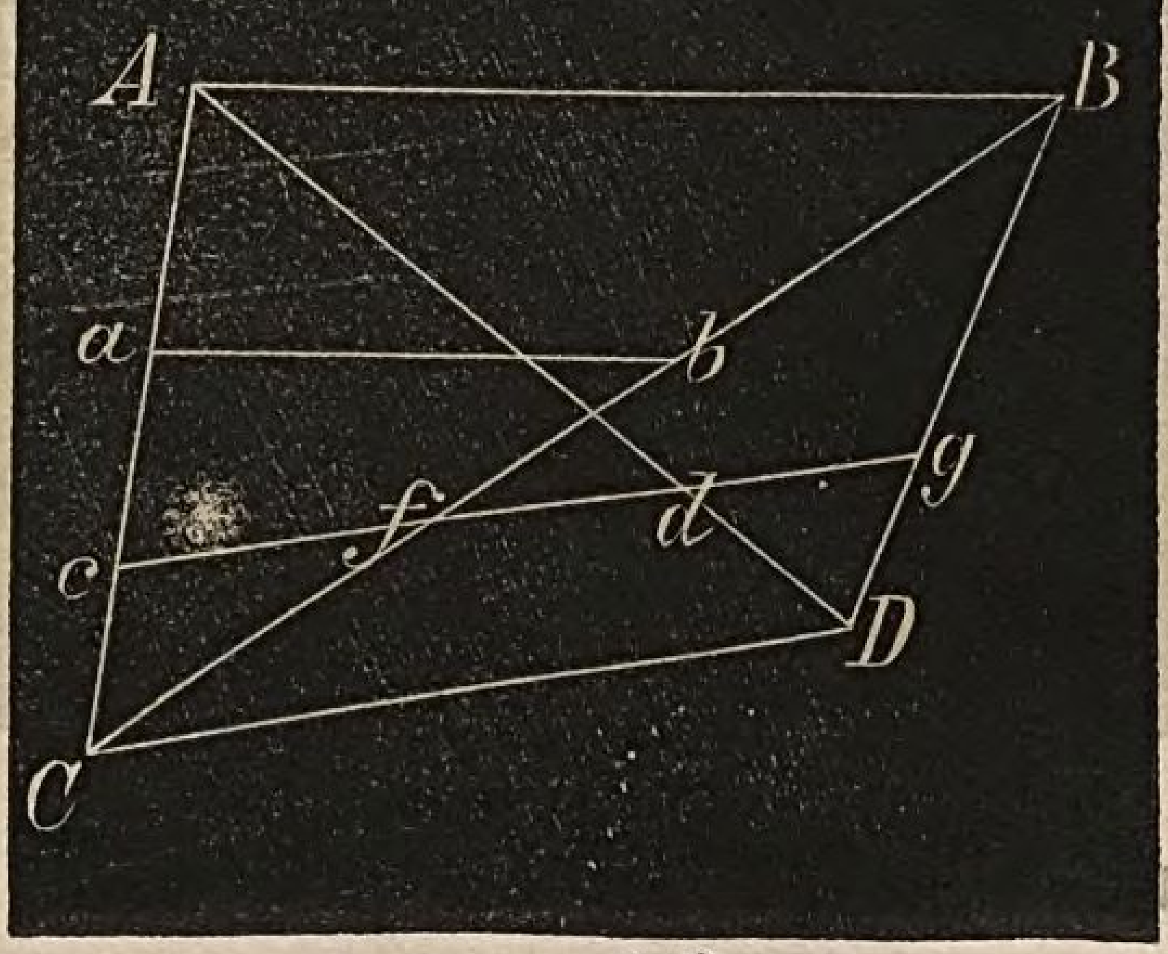
3. Auflösung. Diese hat viele Aehnlichkeit mit der vorhergehenden.

Soll die Länge AB, Fig. 36, mittelbar bestimmt werden, so nehme man einen Punkt C der Art, daß von diesem A und B sichtbar sind, stecke durch C eine beliebige Gerade DE ab, und mache CE=CD. Vom Punkte E muß jedoch außer C noch B und von D auch C und A sichtbar sein.



Nun nimmt man in der EB einen Punkt G, in der DA den Punkt F an, verlängert die Linien GC und FC, macht ihre Verlängerungen gC=GC, fC=FC; endlich bestimmt man den Durchschnittspunkt a zwischen den Linien Ef und CA, so auch b zwischen den Linien Dg und CB, wodurch man die zwei kongruenten Dreiecke ACB und aCb erhält, aus welchem AB=ab folgt.

Hätte man nicht so viel freies Terrain, um die kongruenten Dreiecke zu konstruiren, so genügt es auch $Ce = \frac{CE}{n}$, $Cd = \frac{CD}{n}$, $Cf' = \frac{CF}{n}$, $Cg' = \frac{Cg}{n}$ zu machen, wodurch, wenn die eben erklärte Operation angewendet wird, AB=n.a′b′ erhalten wird.

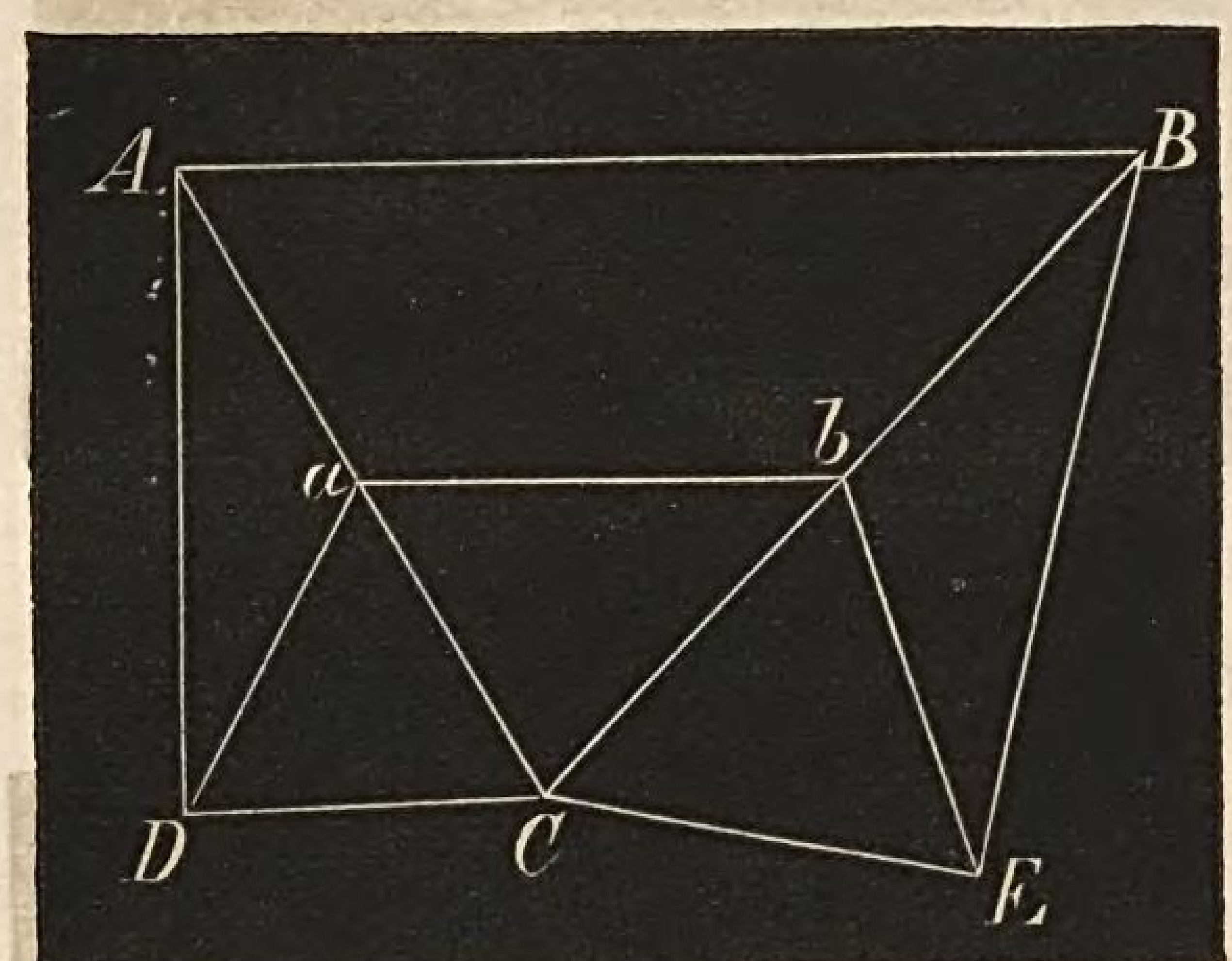


4. Auflösung. Das in Fig. 37 dargestellte Verfahren ist folgendes:

CD ist zwar willkürlich, jedoch so gewählt, daß von C und D die Signale A und B sichtbar sind; cg ist mit CD parallel; c, f, d und g sind Punkte der Linie cg, die bezüglich in den Linien CA, CB, DA und BD liegen.

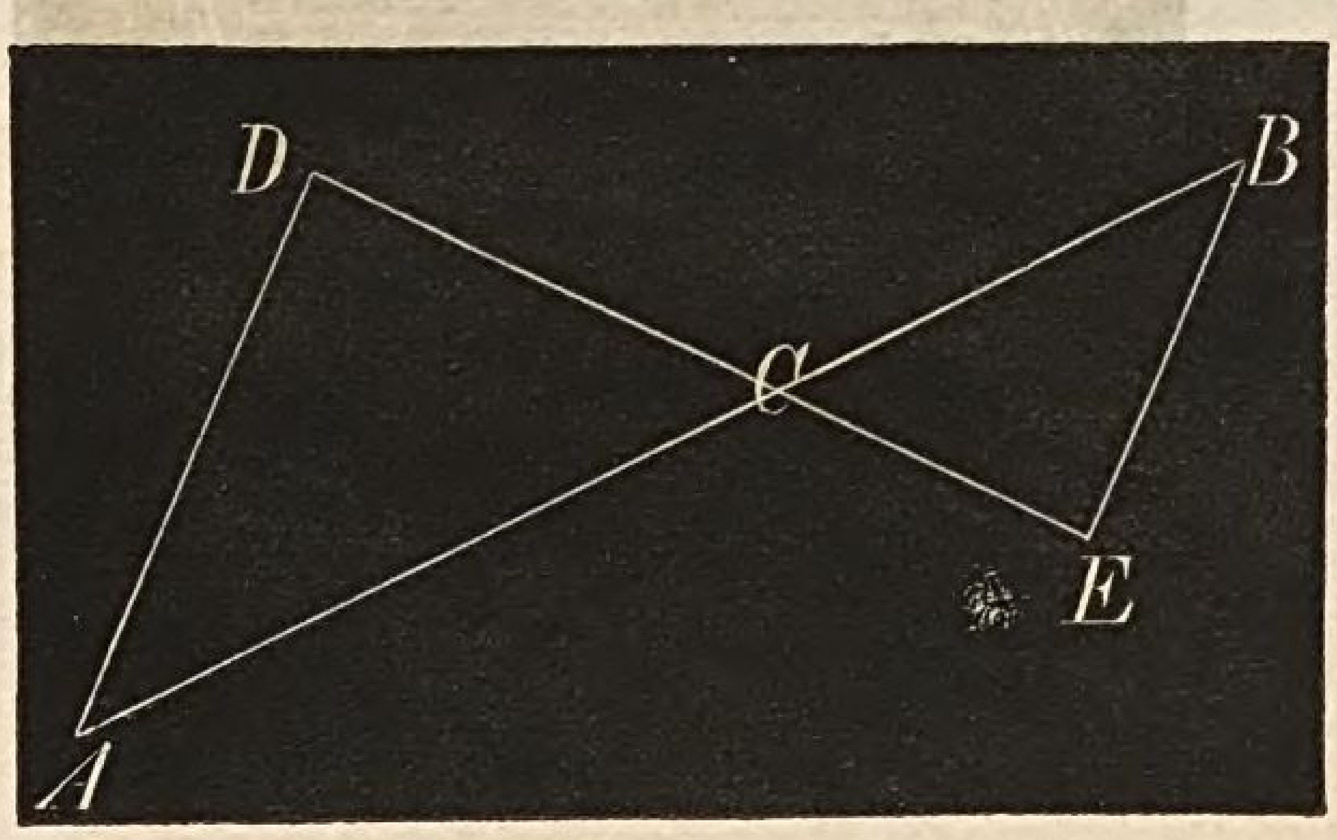
Da cd mit CD parallel ist, so folgt aus den Dreiecken Adc und ADC, $AC = \frac{cC \cdot CD}{CD - cd}$; und dieselbe Art folgt aus den Dreiecken Bfg und BCD, $BC = \frac{Cf \cdot CD}{CD - fg}$; da nun AC und BC bekannt sind, so mache man $Ca = \frac{CA}{n}$, $Cb = \frac{CB}{n}$ und erhält, nachdem ab gemessen worden ist, AB=n.ab.

5. Auflösung. Soll AB, Fig. 38, gefunden werden, so wähle man den Punkt C so, daß von demselben A und B sichtbar sind, konstruire an AC und BC die Winkel ACD, BCE, jeden = 60 Grade, von A und B fälle man auf die Schenkel CD und CE, die Senkrechten AD und BE; über den Linien CD und CE konstruire man die gleichseitigen Dreiecke CDa und CEb, wodurch die Punkte a und b bestimmt werden, messe ab, so ist AB=2ab.

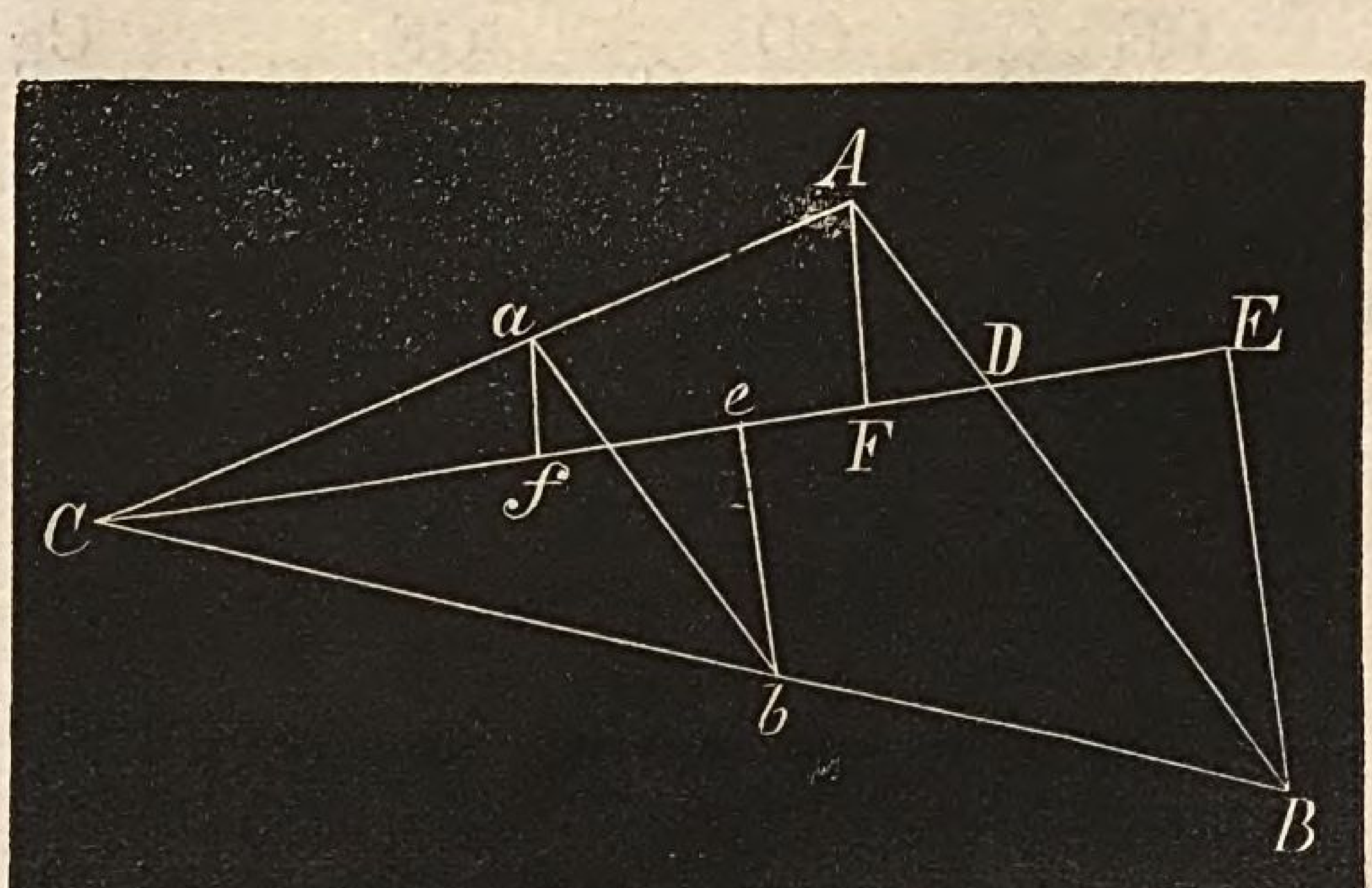


Denn wie §. 54, dritte Auflösung gezeigt worden, ist CB = 2 CE = 2 Cb, CA=2CD=2Ca; also Cab mit CAB ähnlich und ab : AB=Ca : CA= 1 : 2, mithin AB=2.ab.

6. Auflösung. Diese ist dann zu empfehlen, wenn zwischen den unzugänglichen Punkten der zu messenden Linie operirt werden kann; ist z. B. Fig. 39 AB zu bestimmen, und kann man einen Punkt C innerhalb der Geraden AB annehmen, so konstruire man daselbst den Winkel BCE = ACD = 60°, fälle auf die Linie DE von B und A die Senkrechten BE und AD, so ist AB=2DE.



7. Auflösung. Auch bei dieser wird vorausgesetzt, daß man zwischen den Endpunkten A und B, Fig. 40, messen kann; man wählt vorerst einen Punkt D in der Geraden AB und sodann einen außerhalb gelegenen Punkt C, von welchem A und B sichtbar sind, fällt von diesen Punkten auf die CD Senkrechte AF und BE und mißt CE, so auch CF. Wird nun $Ce = \frac{CE}{n}$ und $Cf = \frac{CF}{n}$ gemacht, in e und f die Senkrechten eb und af errichtet und die Durchschnittspunkte a und b,



ersterer zwischen fa und CA, der letztere zwischen eb und Cb bestimmt, so ist AB = n.ab: was leicht nachgewiesen werden kann.

Anmerkung. Es dürfte überflüssig sein zu erinnern, daß bei allen vorhergehenden Auflösungen stillschweigend vorausgesetzt wurde, sämmtliche Punkte einer Auflösung liegen in einer Ebene.

Zusatz. Zum Behufe solcher Messungen bestehen auch mehrere Instrumente, sogenannte Distanzmesser, von denen einige am geeigneten Orte angegeben sind.

Schätzung der Entfernung mittelst des Augenmaßes.

§. 56. Durch das mittelbare oder unmittelbare Messen bekommt man das Verhältniß der gemessenen Größe zu der bei der Messung angewendeten Einheit mit einer den angewendeten Mitteln entsprechenden Genauigkeit, allein der Geometer kommt oft in die Lage, wo er eine Messung der Entfernung nicht vornehmen, diese somit nur schätzen kann. Da bei dieser Thätigkeit vorzüglich das Auge in Anspruch genommen wird, so nennt man die Fähigkeit, die Quantität der sichtbaren Größen zu schätzen, das Augenmaß. Daß es kein Messen, sondern nur ein Schätzen der gesehenen Größen ist, versteht sich von selbst, allein durch Uebung läßt sich hier eine bedeutende Genauigkeit erreichen.

Diese Uebung erwirbt man sich dadurch, daß man das Verhältniß zweier Größen schätzt und hierauf durch die Messung kontrollirt.

Ist das Verhältniß zweier Größen, die wir a und b nennen wollen, geschätzt, m : n, gemessen p : q, so ist vermöge der Schätzung $a : b = m : n$ und $b = \frac{an}{m}$ vermöge der Messung $a : b = p : q$ und $b = \frac{aq}{p}$, sind die Werthe von b nicht einander gleich und ihr Unterschied = x, so ist in der Schätzung ein Fehler x begangen worden, und $x = \frac{aq}{p} - \frac{an}{m} = \frac{a(mq - np)}{mp}$ .... 1).

Z. B. das Verhältniß zwischen zwei Linien wurde geschätzt 2 : 1, gemessen 32 : 15, die größere Linie a sei = 100 Klafter, so ist die kleinere Linie b um $x = -3^0125$ fehlerhaft geschätzt.

Aus dem hier Gesagten ist zugleich ersichtlich, auf welche Art man sich die nöthige Uebung im Schätzen der Winkel und Flächen erwerben kann.

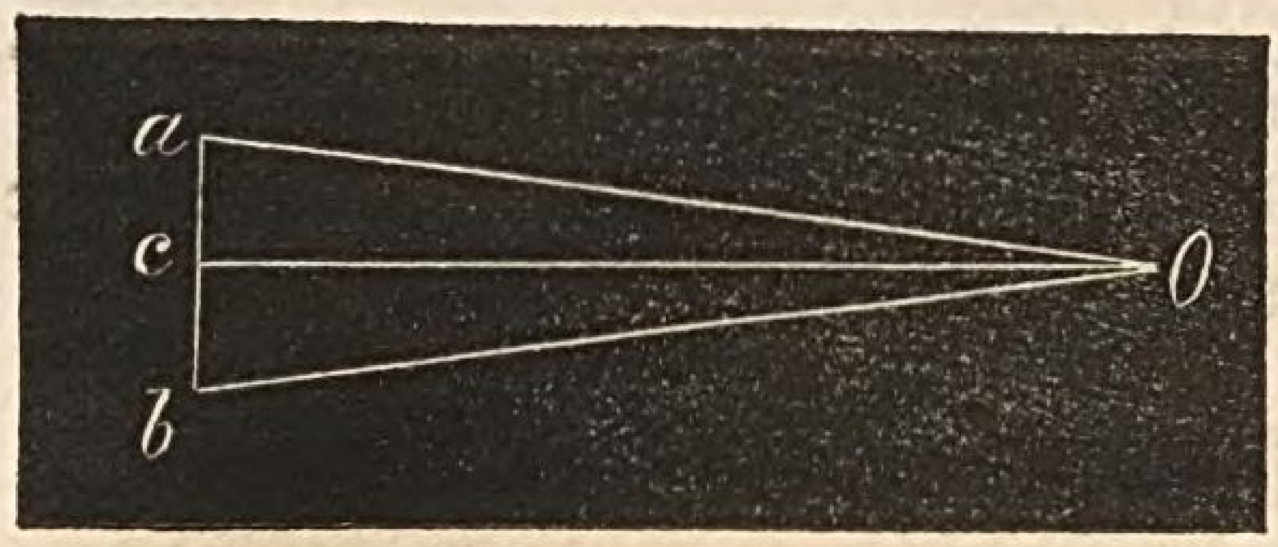
Bei der Schätzung der Entfernung auf der Erdoberfläche wird das Urtheil erleichtert:

1. wenn die Entfernung zweier anderer, aber sichtbarer Objekte gegeben ist, weil man sodann die gesuchte Distanz der anderen Objekte mit der gegebenen vergleichen kann.

Die Winkel werden mit dem rechten, der als bekannt vorausgesetzt wird, verglichen;

2. wenn einige Dimensionen der sichtbaren Gegenstände, deren Distanz von unserem Auge geschätzt werden soll, bekannt sind, und zwar ist dann die Schätzung am allereinfachsten, wenn entweder die bekannten Dimensionen oder die Winkel, unter welchen sie erscheinen, gleich sind. Bekanntlich ist der Winkel, unter welchem ein und derselbe Gegenstand bei verschiedenen Entfernungen erscheint, durch diese bedingt und heißt der optische Winkel.

Bezeichnen wir die Höhe eines Gegenstandes ab, Fig. 41, mit h, seine Entfernungen vom Auge O mit d, den optischen Winkel, unter welchem er erscheint, mit α, so ist, wenn α klein ist, $h = d\alpha$ .... 1).



Nennen wir nun die bekannten Dimensionen zweier Objekte h und H, deren Distanzen von unserem Auge d und D ihre optische Winkel α und β, so ist nach der Gleichung 1) $h = d\alpha$, $H = D\beta$.

Ist nun $h = H$, so ist $d\alpha = D\beta$, also $d : D = \beta : \alpha$, d. h. bei gleichen Dimensionen der gesehenen Objekte stehen ihre Distanzen mit den optischen Winkeln im verkehrten Verhältnisse. Erscheint z. B. ein 5 Fuß hohes Fenster 6mal kleiner, als ein eben so hohes Fenster in einem anderen Hause, so ist das erstere 6mal weiter entfernt, als das letztere.

Ist $\alpha = \beta$, so ist $h : H = d : D$; d. h. bei gleichen optischen Winkeln stehen die Dimensionen der Objekte mit ihrer Entfernung von unserem Auge im geraden Verhältnisse, mit andern Worten: erscheinen zwei bekannte Dimensionen gleich groß, so verhalten sich die Entfernungen von unserem Auge, wie die bekannten Dimensionen selbst;

3. wenn das wahre Verhältniß zweier Größen sich durch kleine Zahlen ausdrücken läßt; unser Auge vermag das Verhältniß 1 : 2 oder 3 : 4 leichter zu finden, als z. B. 13 : 17;

4. endlich nehmen wir bei der Schätzung einer Länge noch Rücksicht auf die Beleuchtung und Farbe, auf die größere oder geringere Menge von Objekten, die sich zwischen uns und dem fraglichen Gegenstande befinden. Diese Umstände unterstützen zwar unser Urtheil, können aber leicht Veranlassung zu Irrthümern sein.

Die Beleuchtung zweier Körper verhält sich wie die zweiten Potenzen ihrer Entfernungen vom Auge, allein dieser Satz gilt nur in so fern, als beide Körper sich gegen das Licht ganz gleich verhalten; ist aber der eine Körper z. B. weiß, der andere grau, so werden wir den letztern für weiter entfernt halten, als er es wirklich ist. Sehen wir z. B. bei einem Körper die von der Sonne beschienene, bei dem andern die Schatten-Fläche, so halten wir den erstern für näher, als er in der Wirklichkeit ist.

Ist die Luft stark mit Dünsten angefüllt, so erscheinen uns alle Körper näher, weil dann die Atmosphäre durchsichtiger ist.

Sind zwischen uns und dem Objekte, dessen Distanz von uns wir schätzen sollen, keine ausgezeichneten Gegenstände, so halten wir die Entfernung für kleiner; kommen aber ausgezeichnete Gegenstände und zwar im gleichen Abstande vor, so halten wir die Entfernung für größer, als sie wirklich ist;

5. die Schätzung einer Länge oder eines Winkels ist uns aber sehr erschwert, wenn entweder die Endpunkte so weit auseinander stehen, daß wir beide nicht zugleich erblicken können, oder wenn die Linie gegen uns eine schiefe Lage habe, denn in beiden Fällen hat das Auge keinen festen Anhaltspunkt, und wir müssen uns den eigentlichen, wahren optischen Winkel nur vorstellen.

Messung der Linien auf dem Papiere.

§. 57. Gerade Linien auf dem Papier zu ziehen, bedient man sich bekanntlich eines Lineals, dessen Kante, neben welcher die Linie gezogen wird, selbst eine Gerade ist.

Will man ein Lineal in Bezug auf diese Eigenschaft prüfen, so sticht man zwei feine Nadeln senkrecht auf eine Ebene und zieht, nachdem das Lineal mit der Kante an die Nadeln angelegt worden ist, neben derselben eine feine Bleilinie; hierauf legt man die obere Ebene des Lineals nach unten, dieselben Punkte der Kante von der andern Seite der Nadeln an, und zieht eine zweite Linie. Sind diese zwei Linien durchaus parallel, so ist das Lineal richtig, wo nicht, so ist der Abstand beider um die Nadeldicke vermindert, der doppelte Fehler an dieser Stelle, und muß beseitiget werden.

Die Endpunkte einer Linie werden durch feine Stiche mit einer Nadel bestimmt (piquirt) und jeder, damit man ihn leichter finden könne, mit einem Bleistiftringe umfaßt (geringelt).

§. 58. Zur Messung gegebener Linien auf dem Papiere ist erforderlich:

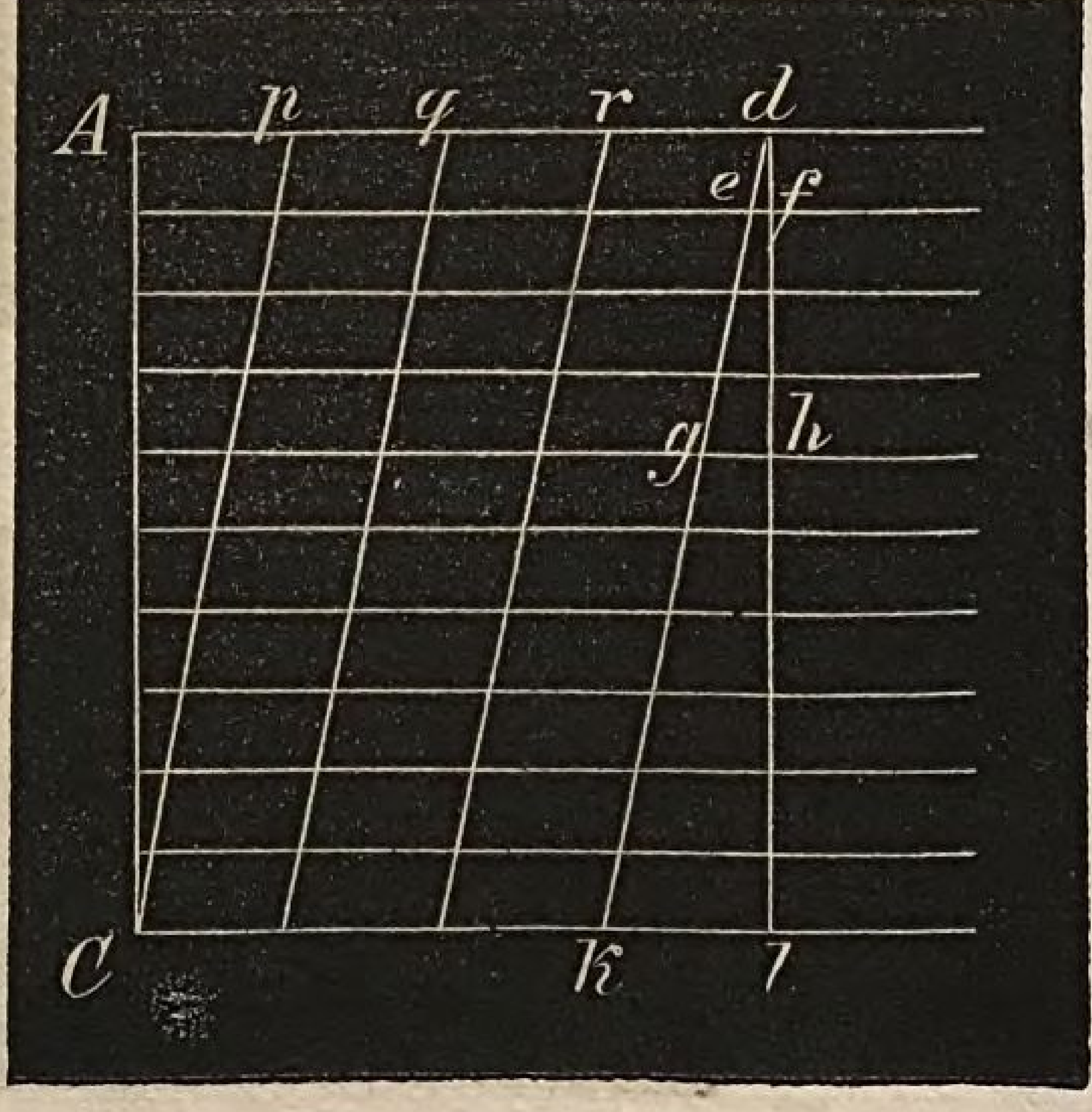
A. ein verjüngter Maßstab und

B. ein Zirkel.

Ad A. Unter einem verjüngten Maßstabe versteht man eine in mehrere gleiche Theile getheilte Linie, deren jeder einzelner Theil zu dem natürlichen Maße, welchen er vorstellt, in einem bekannten Verhältnisse steht.

Wie groß die verjüngte Längeneinheit, welche die natürliche vorstellt, genommen werden soll oder kann, dies hängt von Umständen ab, die hier, wo es sich blos um die Messung der Linien auf dem Papiere handelt, im Allgemeinen nicht näher in Betracht kommen; eben so wenig wollen wir uns bei der Erklärung aufhalten, einen Maßstab zu konstruiren, damit die parallelen Linien einen gleichen Abstand erhalten, dieß kann jeder durch die Betrachtung der in Fig. 40 bis 44 gezeichneten Maßstäbe einsehen.

Wichtiger ist die Beantwortung der Frage: in wie viel gleiche Theile ist der erste Zoll der obersten und untersten Parallelen zu theilen, und wie viel parallele Linien sind zu ziehen, wenn die Anzahl Klafter, die durch einen Zoll dargestellt werden, und der aliquote Theil einer Klafter, der von dem verjüngten Maßstabe abgenommen werden soll, gegeben sind?



Bezeichnen wir die Anzahl Klafter, welche durch die Länge eines Zolles, Ad Fig. 42, dargestellt werden, mit a, und nachdem der Zoll der ersten und letzten Parallelen, nämlich Ad und Cl, in n gleiche Theile getheilt worden ist, den Werth eines solchen Theiles z. B. kl mit b, so ist $a=nb$; .... und $kl=b$ .... 1).

Bedeutet c den aliquoten Theil einer Klafter, welcher von dem Maßstabe unmittelbar abgenommen werden soll, so muß b in

so viele gleiche Theile getheilt werden, daß jeder einzelne gleich c ist; bezeichnen wir ihre Anzahl mit m, so ist kl=b=mc .... 2).

Aus den ähnlichen Dreiecken def und dkl folgt ef : kl = df : dl, daraus $kl=ef\frac{dl}{df}$, lassen wir ef=c bedeuten, so muß, weil kl=b ist, $\frac{dl}{df}=m$ sein, d. h. es sind so viele parallele Intervalle zu machen, als der Quotient $\frac{b}{c}$ Einheiten enthält; jedes folgende Stück der parallelen Linien zwischen den transversalen dl und dk ist um c länger, als das nächst vorhergehende, so z. B. ist gh=4c, denn gh : kl = dh : dl, daraus $gh=kl\frac{dh}{dl}$, nun ist gleich 2) kl=mc, $\frac{dh}{dl}=\frac{4}{m}$ daher gh=4c.

Substituiren wir den Werth für b aus der Gleich. 2) in die Gleich. 1), so erhalten wir a=nmc oder $\frac{a}{c}=nm$ .... 3).

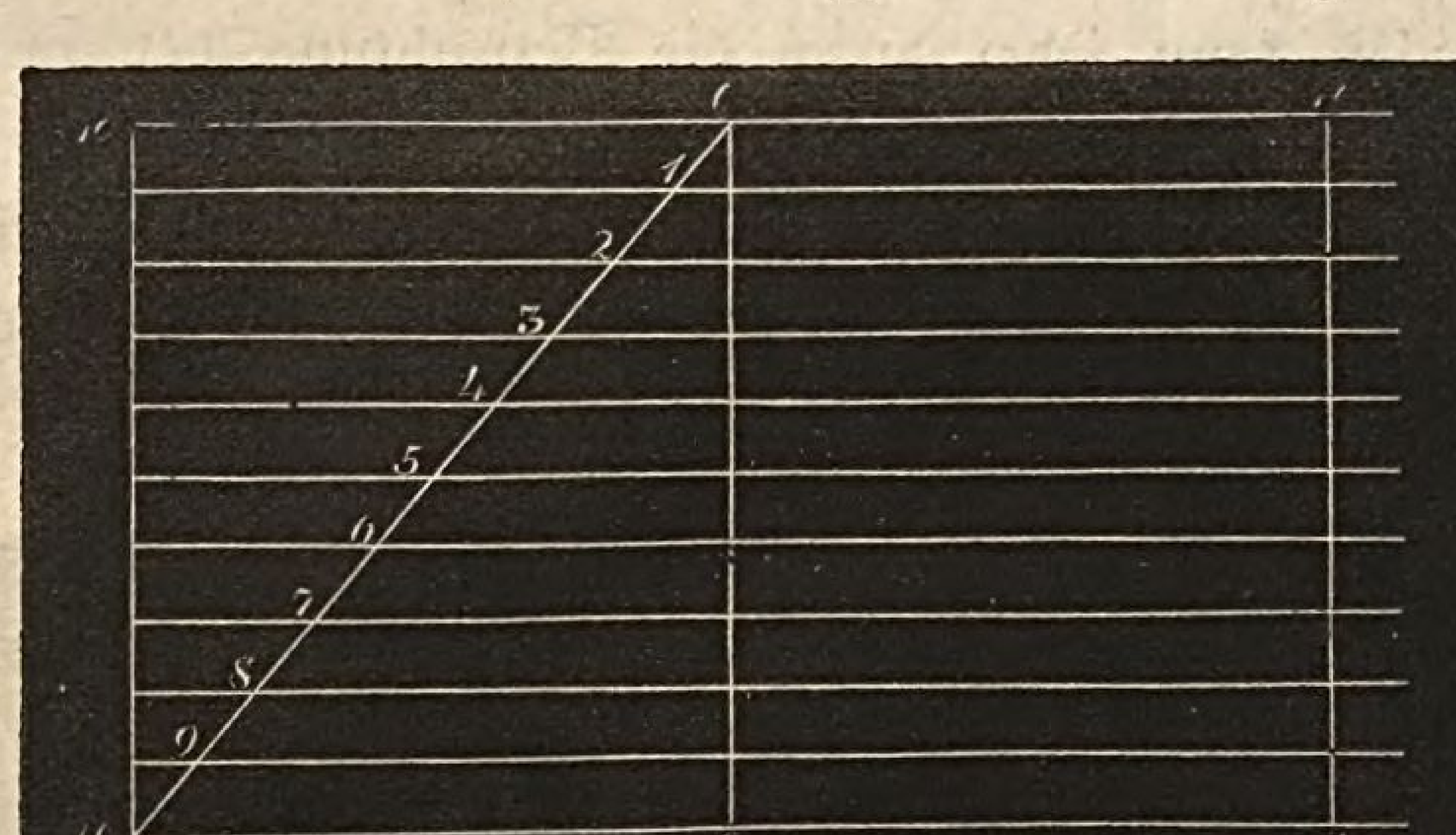
Gewöhnlich sind nur a und c gegeben, also diese Gleichung eine unbestimmte, daher erklärlich, warum ein verjüngter Maßstab auf verschiedene Art konstruirt werden kann.

Wir wollen das Gesagte durch einige Beispiele erläutern:

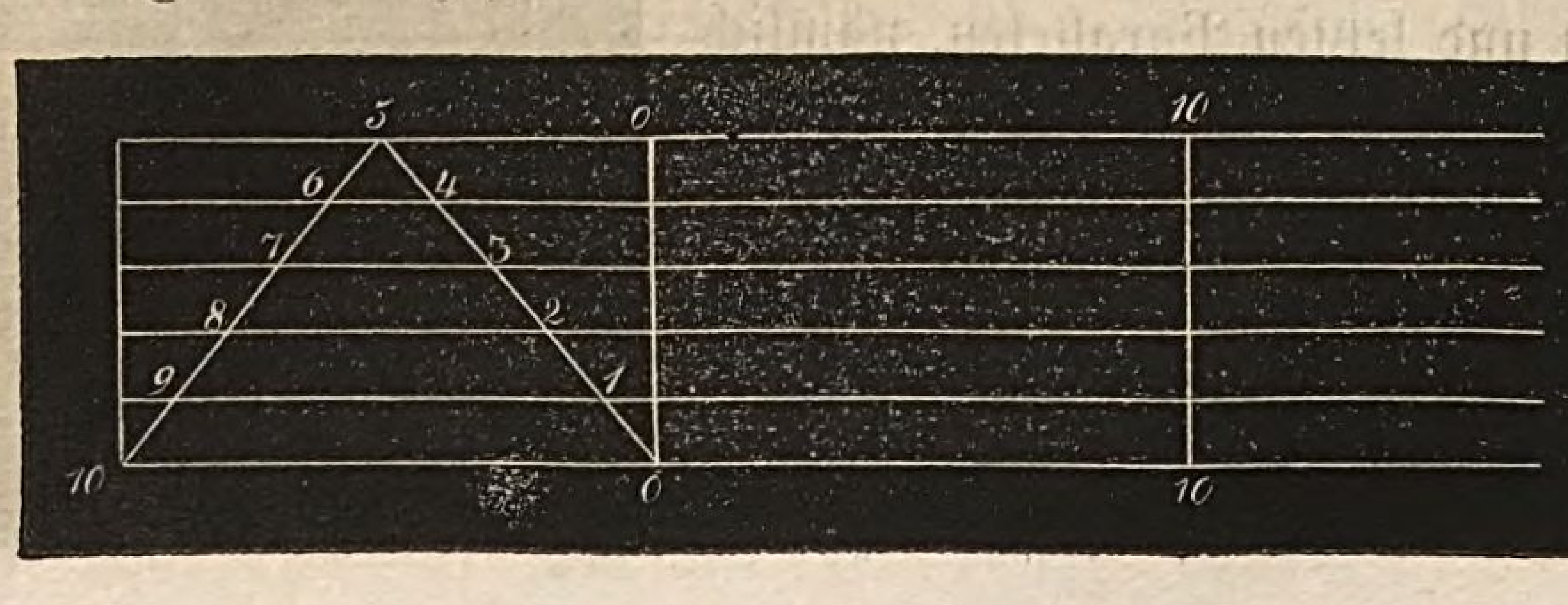
1. Beispiel. Es soll ein verjüngter Maßstab konstruirt werden, bei dem 1 Zoll 10 Klafter vorstellt, und von welchem die einzelnen Klafter unmittelbar abgenommen werden können.

Hier ist a=10, c=1 Klafter; da nun n und m ganze Zahlen sein müssen und ihr Produkt (Gleich. 3) zehn betragen soll, so kann n=1, 2, 5 und 10 angenommen werden; die korrespondirenden Werthe von m sind dann 10, 5, 2, 1.

Für n=1 und m=10 ist der Maßstab in der Fig. 43, und für n=2,



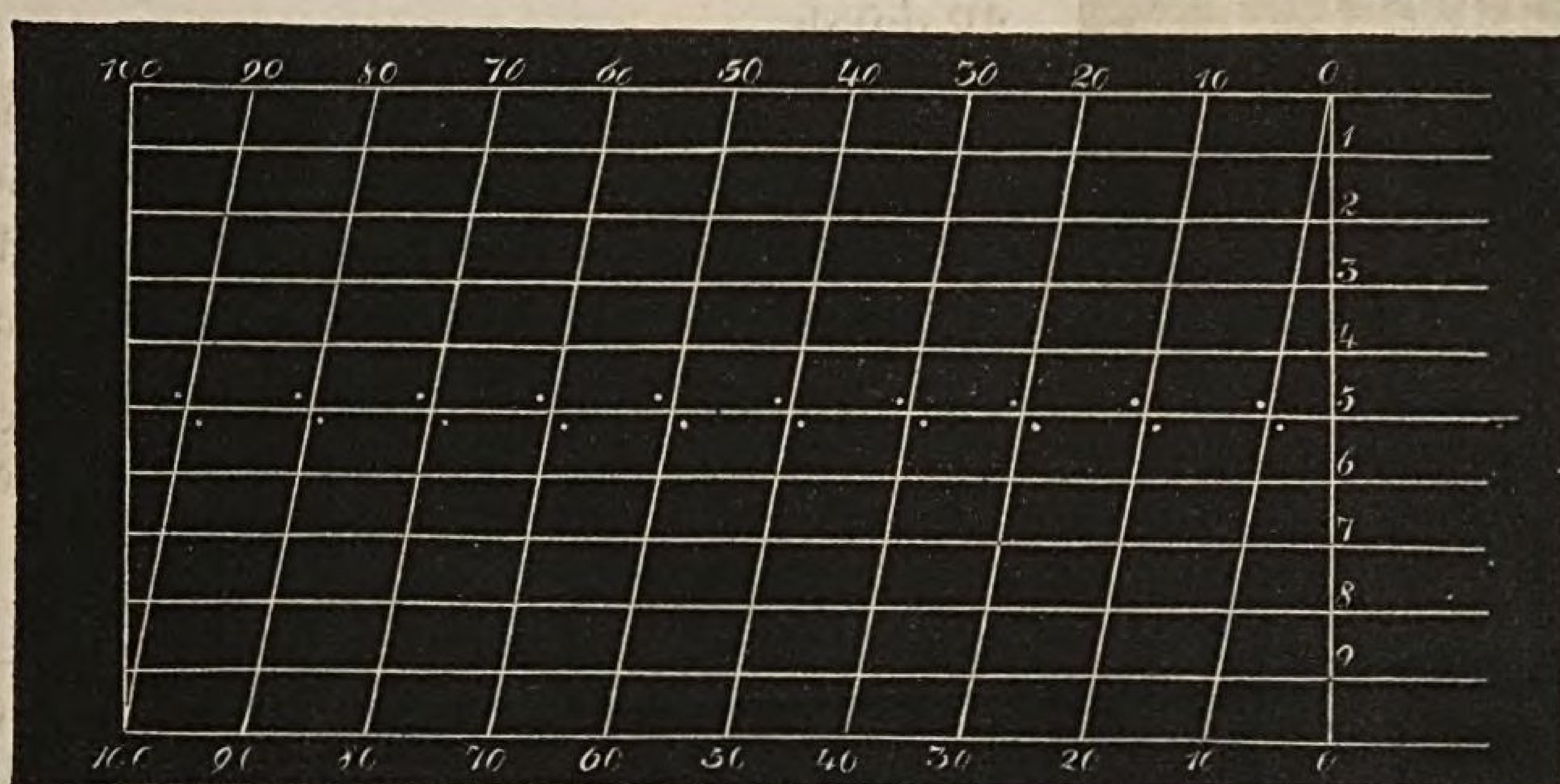
m = 5 in der Fig. 44 dargestellt.



2. Beispiel. Hätte man einen Maßstab zu konstruiren, 10 Klafter = 1 Zoll, an dem aber $\frac{1}{6}$ Klafter abgenommen werden können, so ist a=10, c=$\frac{1}{6}$, demnach vermöge Gleich. 3) nm=60; hier kann n=1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60 bedeuten; der vortheilhafteste Werth ist aber n=10 und m=6 anzunehmen, d. h. den ersten Zoll in der obersten und untersten Parallele in 10 Theile und 6 parallele Intervalle, also 7 parallele Linien zu ziehen.

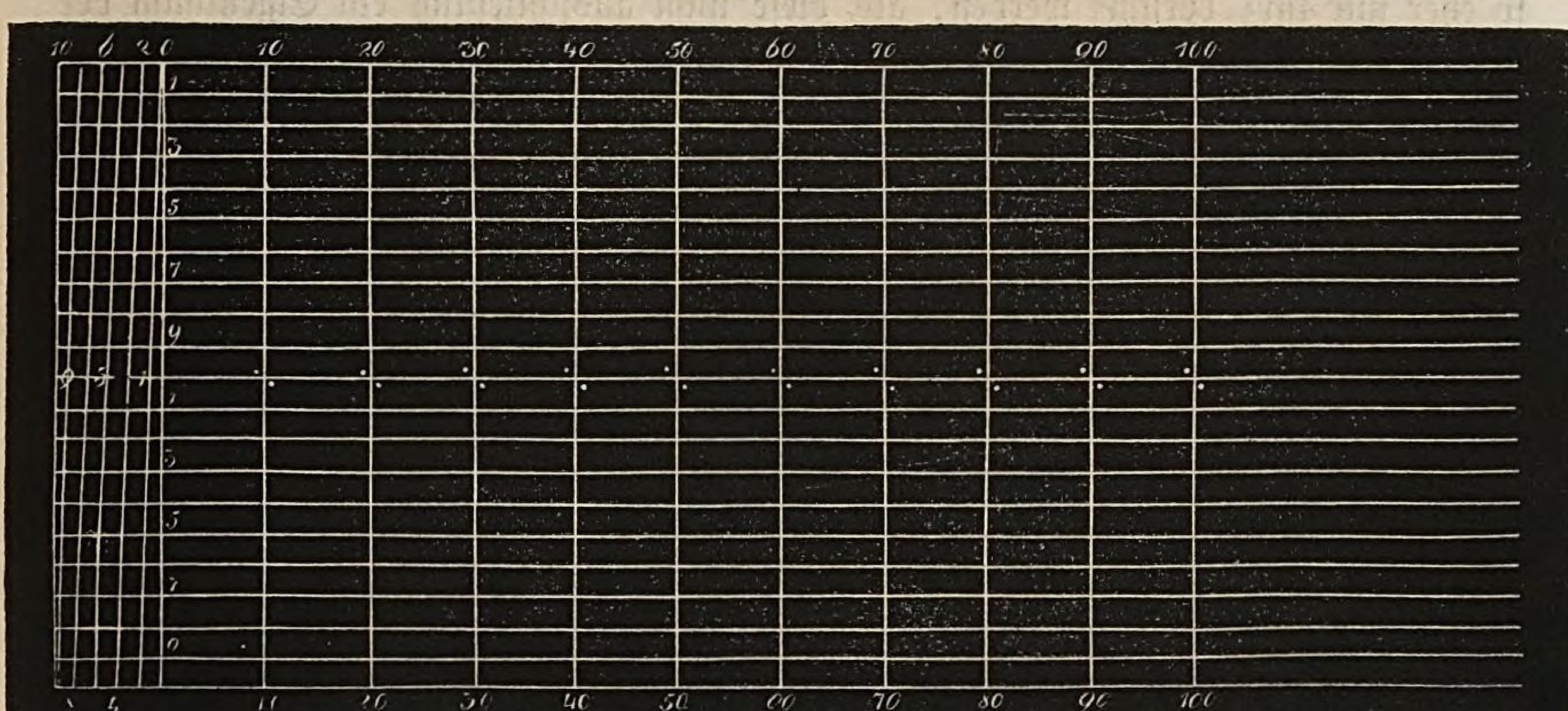
3. Beispiel. Es sei ein verjüngter Maßstab 40 Klafter = 1 Zoll zu konstruiren, an dem die einzelnen Klafter abgenommen werden können.

Hier ist a=40, c=1, also auch Gleich. 3) nm=40; daher kann n alle Zahlen bedeuten, durch welche 40 theilbar ist, der bequemste Werth ist aber n=4, wodurch m=10 wird. Einen solchen Maßstab stellt Fig. 45 vor, wo die Ein-



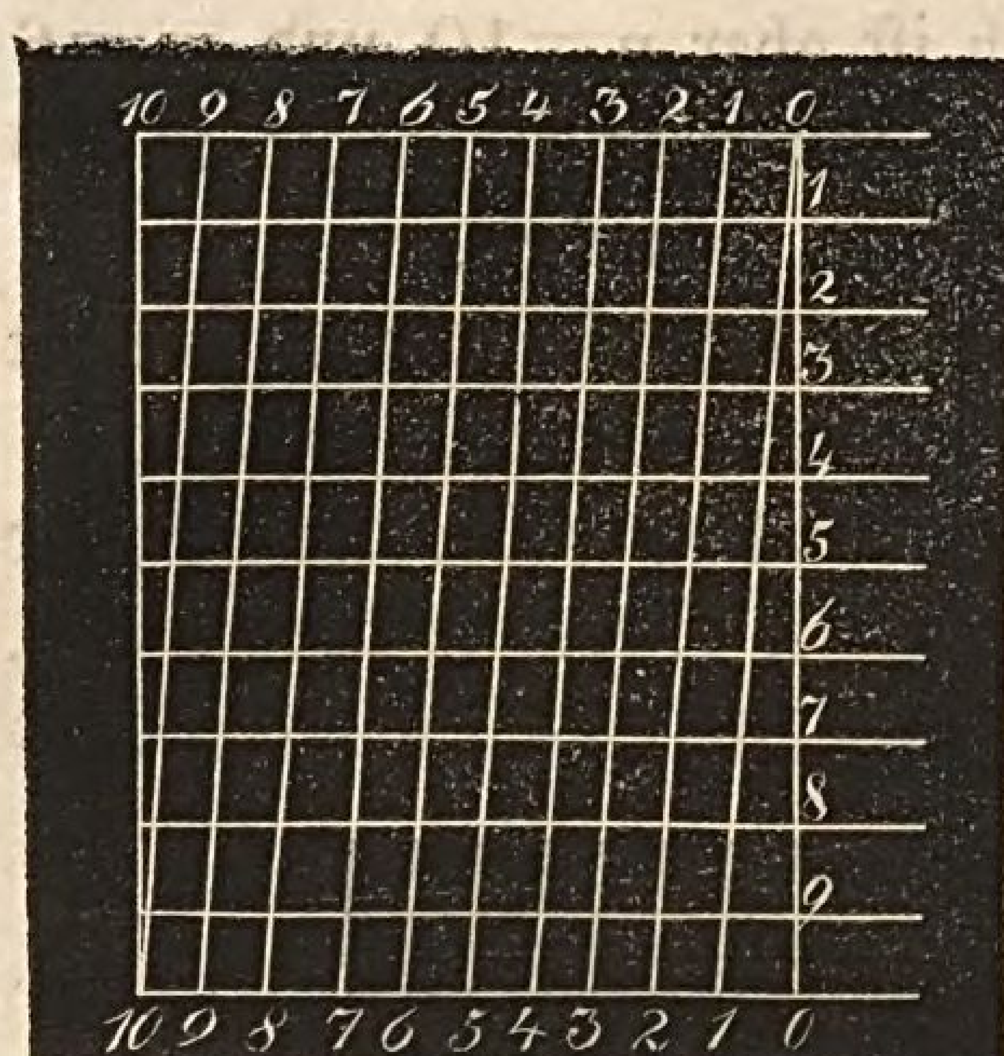
theilung für 100 Klafter ausgeführt ist; man hätte aber auch die Endpunkte des ersten Zolles, also 40 mit 40 verbinden und die Konstruktion des außerhalb gelegenen Theiles unterlassen können.

4. Beispiel. a=40, c=$\frac{1}{10}$ Klafter, demnach ist vermöge Gleichung 3) nm=400. Hier kann n alle Zahlen bedeuten, durch welche 400 theilbar ist, der bequemste ist aber n=20, wodurch m=20 wird, einen solchen Maßstab stellt uns Fig. 46 vor.



5. Beispiel. Soll ein verjüngter Maßstab konstruirt werden, wo 100 Klafter durch einen Zoll dargestellt sind, und die einzelnen Klafter abgenommen

werden können, so ist $a=100$, $c=1$ Klafter; wird $n=10$ angenommen, so ist $m=10$; diesen Maßstab stellt Fig. 47 vor, er kann aber auch bei der Messung



einer Linie in Zollen gebraucht werden, wo sodann auf der obern und untern Linie die ganzen Zolle und die Zehntel derselben auf den mit diesen parallelen Linien die Hundertel unmittelbar, und endlich wenn jedes der parallelen Intervalle nach dem Augenmaße in 10 gleiche Theile getheilt wird, die Tausendtel des Zolles abgelesen werden können, und in dieser Form ist er kein verjüngter, sondern ein natürlicher Maßstab, und heißt der tausendtheilige Maßstab.

Bei diesem Maßstabe, wo $a=1$ Zoll bedeutet, kann man auch $c=0'005$ Zoll annehmen, für $n=10$ wird $m=20$; von einem solchen Maßstabe kann man eine Linie bis auf 0·005 eines Zolles unmittelbar abnehmen.

Zusatz. Der Fall, daß sich mit den gegebenen Zahlen a und c kein bequemer Maßstab konstruiren ließe, ist zwar denkbar, dürfte aber höchst selten vorkommen; diesem Uebelstande auszuweichen, berechne man die Länge l für eine andere und zwar solche Anzahl Klafter, daß dieser Umstand beseitiget werde.

Wäre z. B. ein verjüngter Maßstab zu konstruiren, bei dem 1 Zoll = 17 Klft. vorstellt und von dem noch die Zehntel einer Klafter abgenommen werden können, so ist $a=17$ und $c=\frac{1}{10}$, dann aber sind 20 Klafter = 1''176, man trage somit 1''176 auf, lasse diese Länge 20 Klafter bedeuten, nehme n etwa = 10, wodurch $m=20$ wird, und der Maßstab ist praktisch brauchbar.

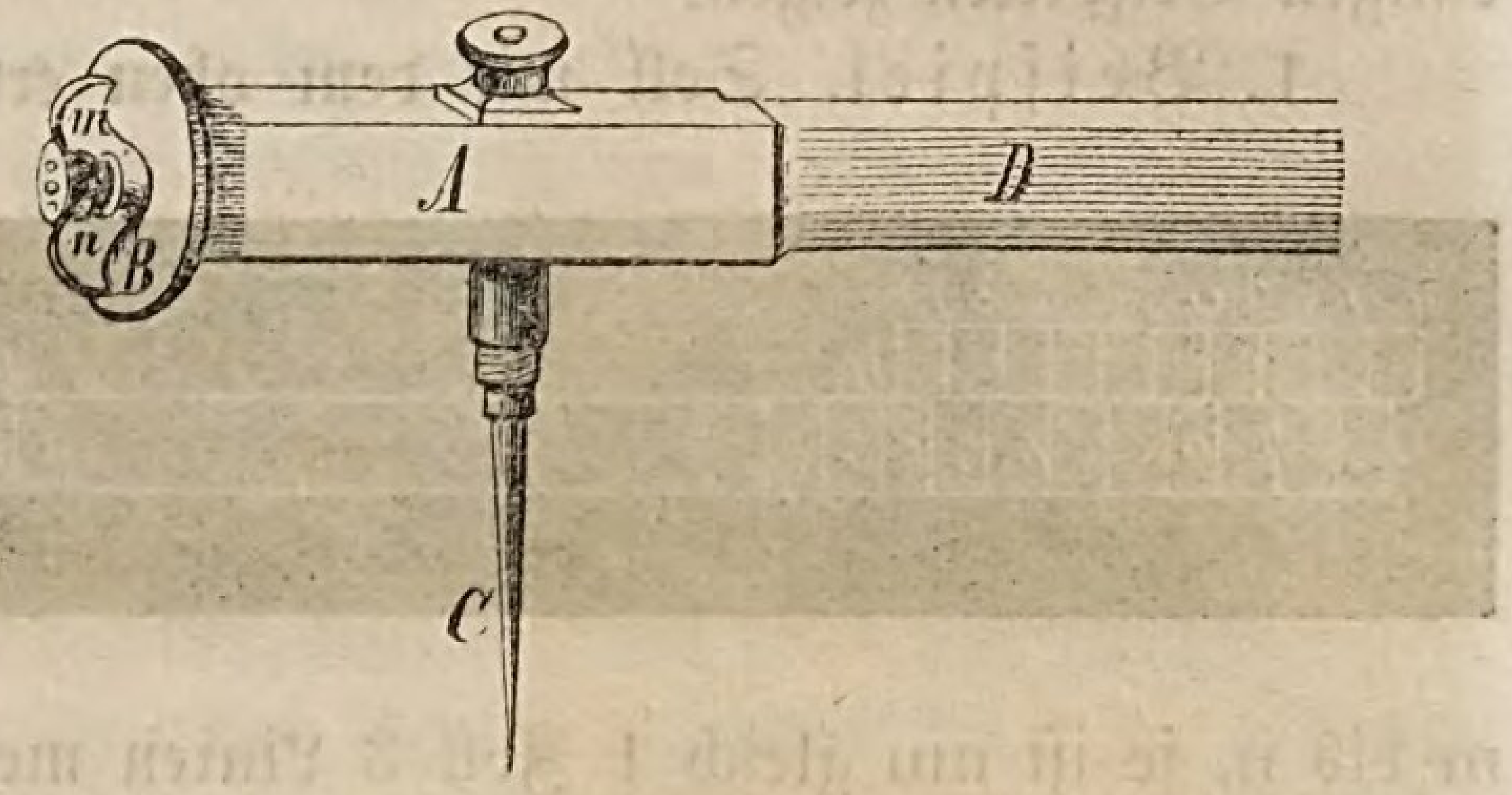
Anmerkung. Diese scharfsinnige Konstruktion des tausendtheiligen Maßstabes verdankt die praktische Geometrie dem Johann Homme, Professor der Mathematik zu Leipzig; sie wurde lange Zeit für eine Erfindung des berühmten Tycho de Brahy (geboren den 13. December 1546 zu Kundstrop in der schwedischen Provinz Schonen, gestorben zu Prag den 13. October 1601) gehalten, es ist aber später erwiesen worden, daß Brahy diese Konstruktion aus den Schriften des Homme im Jahre 1553 kennen lernte.

§. 59. Ad B. Die verschiedenen Arten von Zirkeln dürfen hier um so eher nur kurz berührt werden, als diese nicht ausschließlich ein Eigenthum der praktischen Geometrie sind, somit einige wie z. B. der Hand-, Haar- und Einsatzzirkel denjenigen, die dieses Buch in die Hand nehmen, bereits bekannt, andere dagegen wie z. B. der Reduktions-, Proportional- oder der dreischenkliche Zirkel gegenwärtig wenig mehr im Gebrauche sind.

Es bleibt an diesem Orte noch des Stangenzirkels zu erwähnen. Dieser besteht aus einer hölzernen oder messingenen durchaus gleich dicken Leiste (Stange), an der sich zwei messingene Hülsen verschieben und in jeder beliebigen Stelle der Leiste durch Druckschrauben feststellen lassen, an den Hülsen sind die gleich langen Zirkelspitzen befestiget.

Die Leisten sind entweder 3, 4 oder 6kantig, beliebig lang (es gibt Stangenzirkel über 72 Zoll Länge) und müssen so dick sein, daß sie sich beim Gebrauche nicht biegen oder federn, ihr Querschnitt soll daher ein regelmäßiges Polygon sein. Die erste Bewegung erhalten die Zirkelspitzen durch das Verschieben einer oder beider Hülsen, sind aber diese festgestellt, so muß noch die eine Spitze eine feine Bewegung erhalten, und dieß kann erreicht werden, entweder durch eine feine Druckschraube auf die Art wie bei den Haarzirkeln, oder die Spitze wird sammt

der Hülse durch eine feine Schraube bewegt. Die Konstruktion eines solchen Stangenzirkels stellt uns Fig. 48 vor, A ist die Hülse mit der die Kreisscheibe B und die Zirkelspitze C unveränderlich verbunden sind; im Innern der Stange D ist eine Schraubenmutter fest, das eine Ende der Schraube geht durch die Mitte der Scheibe B, endet in einen viereckigen Stift, auf welchem die Lappen mn aufsitzen, mittelst welchen die Schraube gedreht und dadurch die Hülse und die Spitze C bewegt wird.



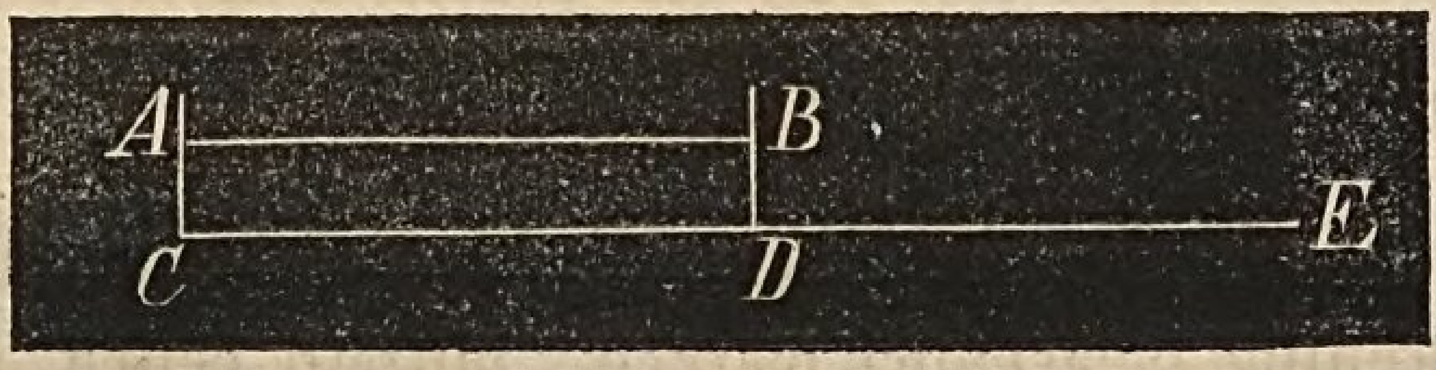
Der Umfang der Scheibe B ist gewöhnlich in 100, manchesmal auch in 360 Theile eingetheilt, hat man also durch Versuche die Höhe eines Schraubenganges ausgemittelt, und ist jeder todte Gang der Schraube beseitigt, so kann die Höhe eines Schraubenganges wenigstens bis $\frac{1}{100}$ genau gemessen werden.

Betragen z. B. 20 ganze Schraubengänge 0·4 Zoll, so ist die Höhe eines Ganges = 0·02 Zoll und ein Intervall der Eintheilung der Scheibe, wenn diese in 100 Theile getheilt ist, beträgt 0·0002 Zoll.

Wie eine bestimmte Länge mittelst eines gewöhnlichen Zirkels von einem Transversal-Maßstabe und wie mittelst eines hier beschriebenen Stangenzirkels von einem nur in Zolle und Linien abgetheilten Maßstabe abgetragen werden kann, dürfte leichter durch die Praxis als durch eine noch so deutliche Beschreibung erlernt werden.

§. 60. Es gibt noch eine zweite Art, Linien mit einer großen Schärfe zu messen; zur Erklärung derselben ist es nothwendig Folgendes voraus zu schicken.

Es sei, Fig. 49, CE ein Maßstab, dessen kleinste Intervalle a lang sind, CD enthalte n solche Theile, so ist CD=na; AB sei ein zweiter Maßstab, nur so lang als CD, aber in (n+1) Intervalle getheilt; wird die Länge eines solchen Theiles mit b bezeichnet, so ist AB=(n+1)b, und da vermöge der Voraussetzung AB=CD ist, so ist (n+1)b=na, also $b=\frac{na}{n+1}$.



Wird der Unterschied a—b=d gesetzt, so ist $d=a-\frac{na}{n+1}$ oder

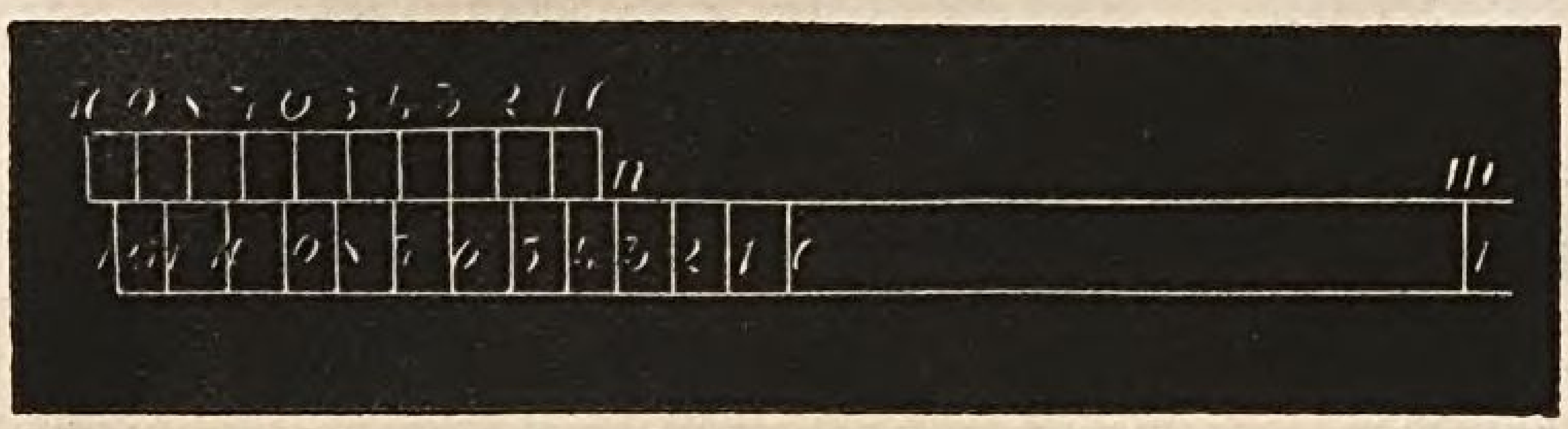
$$d=\frac{a}{n+1} \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Z. B. Der Maßstab CE sei in Zolle und Linien getheilt, so ist a=1 Linie, der zweite Maßstab AB sei 9 Linien lang, aber in 10 gleiche Theile getheilt, so ist n=9 und der Unterschied d zwischen einem Intervalle des Maßstabes CE und des AB beträgt Gleich. 1) $\frac{1}{10}$ Linie.

Der kürzere Maßstab AB heißt **Nonius** oder **Vernier**, die Größe seiner Intervalle ist von jenen des längern Maßstabes abhängig.

Die Anwendung mittelst des Vernier Linien zu messen, wollen wir nun an einigen Beispielen zeigen.

1. **Beispiel.** Soll mit dem oben erwähnten Maßstabe und Nonius die Länge der Linie nm, Fig. 50, gemessen werden, so legt man den Maßstab so an die Linie, daß ihr Ende m mit einem ganzen Zolle (hier den ersten) übereintrifft, und reicht die Linie von m bis n, so ist nm gleich 1 Zoll 3 Linien mehr dem Theile von 3 bis n. Schiebt man den Nonius neben dem Maßstabe so, daß sein mit 0 bezeichneter Strich an das Ende n ansteht, und kommt wie in der Figur der 3. Strich des Nonius mit einem Striche des Maßstabes in eine gerade Linie, so ist die Linie zwischen 5 des Maßstabes und 2 des Nonius die Differenz d, zwischen 4 des Maßstabes und 1 des Nonius 2d, endlich zwischen 3 des Maßstabes und 0 des Nonius = 3d und da nach dem Vorhergehenden $d = \frac{1}{10}$ Linie bedeutet, so ist von 3 bis $n = \frac{3}{10}$ Linie und mn=1″ 3·3 Linie.



Wäre bei dem Anlegen des Nonius der mit 8 bezeichnete Strich mit den 11 des Maßstabes in eine gerade Linie gekommen, so wäre mn=1″ 3·8 Linie.

2. **Beispiel.** Bei einem Maßstabe bedeutet die Länge eines Zolles 40 Klafter, jeder Zoll ist in 20 gleiche Theile getheilt, so ist a=2 Klafter. Die Länge des Nonius sei gleich 19 solchen Intervallen des Maßstabes, aber in 20 Theile getheilt, so ist n=19, daher $d = \frac{1}{10}$ Klafter. Mit einem solchen Nonius läßt sich die Länge einer Linie bis auf die Zehntel einer Klafter genau finden, obschon der Maßstab selbst nur von 2 zu 2 Klafter getheilt ist.

Anmerkung. Für Anfänger empfehlen wir einen oder den andern dieser beschriebenen Vernier im vergrößerten Maßstabe zu konstruiren und sich im Ablesen fleißig zu üben.

Will man zu einem gegebenen Maßstabe einen Nonius konstruiren, der eine bestimmte Differenz angibt, so ist in der Gleichung 1) a und d gegeben, daraus

$$n = \frac{a-d}{d} \quad \ldots \; 2).$$

3. B. Zu einem Maßstabe, dessen kleinste Eintheilung Linien sind, soll ein Nonius verfertiget werden, mittelst dessen $\frac{1}{12}$ Linie abgelesen werden kann, so ist a=1, $d = \frac{1}{12}$ Linie, somit n=11, d. h. 11 Linien müssen auf dem Nonius aufgetragen und in 12 gleiche Theile getheilt werden.

Zur Vermeidung jeder Wiederholung verweisen wir noch auf den §. 76.

Anmerkung. Diese scharfsinnige Erfindung, Linien durch den Unterschied der Intervalle zweier Maßstäbe zu messen, verdanken wir dem Portugiesen Nunnoz (er war geboren zu Alcazar del Sol 1492 und Professor der Mathematik zu Coimbra); aber der Franzose Pater Vernier hat fast 100 Jahre später, nämlich im Jahre 1631, erst gezeigt, die Erfindung des Nunnoz auch auf die Winkel anzuwenden, weshalb man sie die Eintheilung des Nunnoz oder des Vernier und kürzer, wie oben angegeben wurde, den Nonius oder Vernier selbst nennt.

Genauigkeit der Messung der Linien auf dem Papiere.

§. 61. In den §§. 34 bis inclus. 39 sind die Gründe angeführt worden, weshalb eine gegebene Linie auf der Erdfläche nicht absolut genau gemessen werden

kann; nun wollen wir die Umstände untersuchen, von welchen die Genauigkeit der Messung einer Linie auf dem Papiere abhängt.

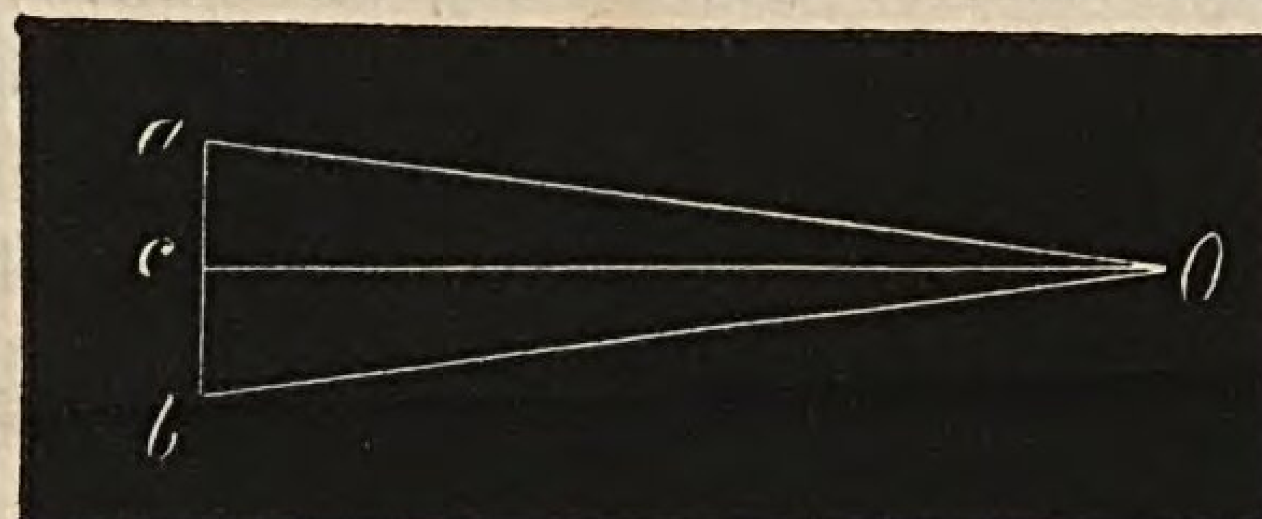
Den wesentlichsten Einfluß auf die Genauigkeit jeder Messung hat die Schärfe der Augen.

Bekanntlich ist die deutliche Sehweite für jedes Auge etwas verschieden; ist nun der Gegenstand so klein, oder seine Entfernung von unserm Auge so groß, daß die von dem Gegenstande reflektirten Strahlen eben aufhören auf der Netzhaut eine Empfindung zu erzeugen, so nennt man den optischen Winkel, unter welchem der Gegenstand erscheint, den kleinsten Sehwinkel.

Dieser wird offenbar desto kleiner sein, je günstiger die Beleuchtung und je größer der Kontrast zwischen der Farbe des Gegenstandes und der seiner Umgebung ist.

Durch Versuche hat man gefunden, daß für ein gesundes Auge die deutliche Sehweite 8 bis 10 Zoll und der kleinste Sehwinkel für einen schwarzen Punkt auf weißem Grunde bei günstiger Beleuchtung 30 bis 60 Sekunden, für eine Linie aber unter denselben Umständen 1·5 bis 2·5 Sekunden betrage.

Ist also Fig. 41 ab eine Linie, von dem Auge O in der deutlichen Sehweite, ferner Oc=d senkrecht auf ab; ac=bc und aOb $=\alpha$, so ist ac $=$ d tang. $\frac{\alpha}{2}$,

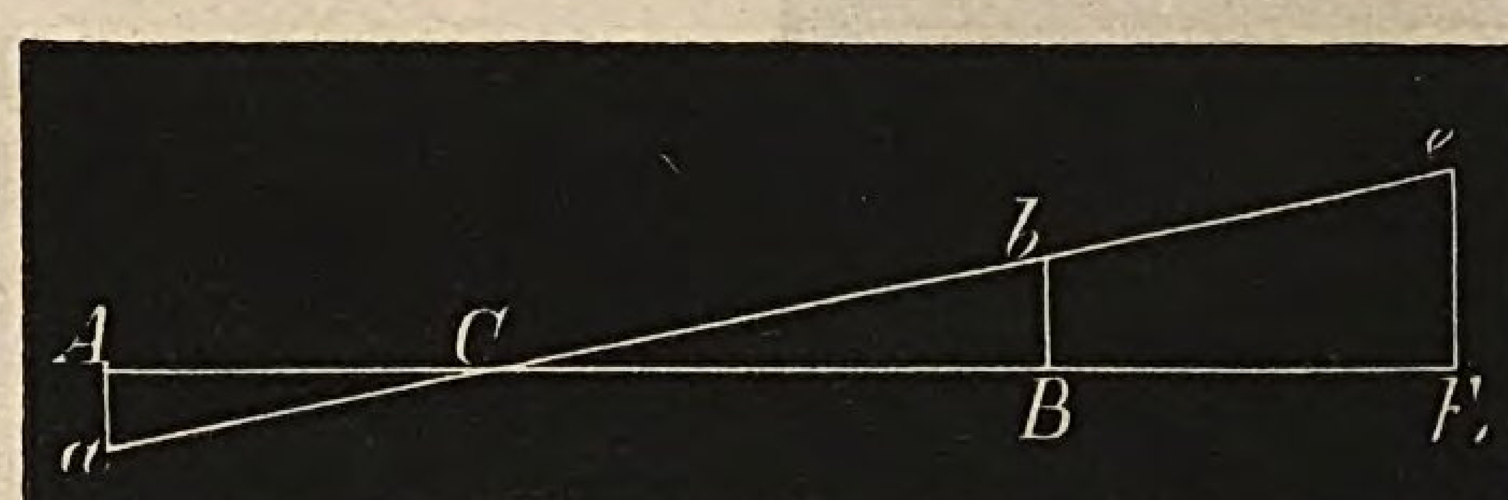


ab=2d tang. $\frac{\alpha}{2}$ und statt der Tangente der Bogen gesetzt ab=dα. . . . , 1).

Für einen schwarzen Punkt auf weißem Grunde ist α zwischen 30 und 60, also im Mittel 45 Sekunden d=8 Zoll, somit ab=0·0017 Zoll, d. h. ein Kreis von diesem Durchmesser wird mit freiem Auge nur bei erhöhter Aufmerksamkeit und günstiger Beleuchtung sichtbar sein; dies ist zugleich die Gränze, bis zu welcher die Länge einer Linie auf dem Papiere, von den übrigen Einflüssen abgesehen, gemessen werden kann.

§. 62. Sobald ein Punkt vom obigen Durchmesser nicht mehr scharf gesehen werden kann, so ist man bei der Anlegung des Lineals an solche zwei Punkte um eben dieselben Durchmesser unsicher.

Sind in der Fig. 51 A und B die Punkte, durch welche eine Linie bestimmt ist, so kann das Lineal auch an a und b angelegt, wo Aa=Bb=0″.0017 ist, somit statt AB die Linie ab gezogen worden sein.



Bezeichnen wir den Winkel ACa mit α, bB mit h und AB mit d, so ist $\alpha = \frac{2h}{d}$ . . . . . 1).

Nehmen wir z. B. d=6 Zoll, h=0·001745, so ist α=2 Minuten.

Der Winkel α wird, wie die Gleichung 1) zeigt, bei gleichem h desto kleiner, je größer d ist; d. h. die Richtung einer Linie ist durch zwei Punkte desto genauer bestimmt, je weiter die beiden von einander entfernt sind.

Soll eine Linie AB Fig. 51 verlängert werden, und setzen wir die Verlängerung BE=l, die Abweichung von der wahren Richtung Ee=x und behalten wir für CB und Bb die frühere Bezeichnung $\frac{d}{2}$ und h bei, so ist $x=\frac{h(d+2l)}{d}$ ..... 1)



somit desto größer, je größer l und je kleiner d ist.

§. 63. Soll eine durch Zahlen gegebene Länge von einem Maßstabe abgenommen, und auf das Papier aufgetragen werden, so sind hiebei ebenfalls kleine Fehler unvermeidlich, denn

1. dehnt sich der Maßstab durch die Wärme aus, und hat nur bei einer bestimmten Temperatur seine wahre Länge.

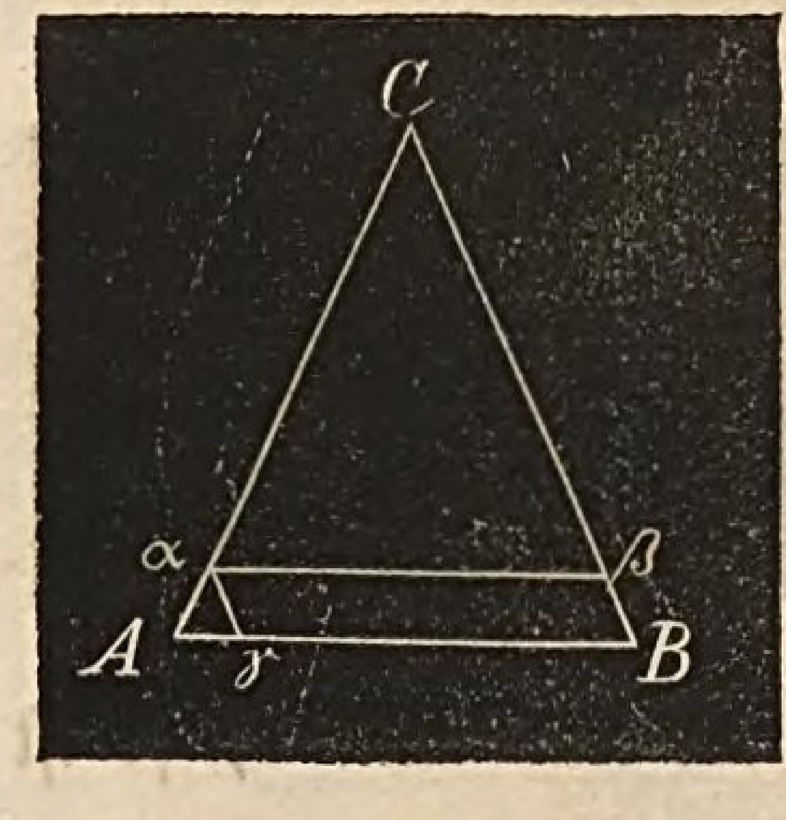
Diese Ausdehnung beträgt nach der Formel 1) §. 35, wenn wir die dort angenommene Bezeichnung beibehalten, $x=nlk(\beta-\alpha)$. Setzen wir den Fall, der Maßstab sei aus Messing, habe bei 10 Graden Réaumur seine richtige Länge, werde aber bei 28 Graden gebraucht und von demselben 32·0156 Zoll abgenommen *), so ist n=32·0156, l=1, k die Ausdehnung des Messings für einen Grad =0·0000233, β=28, α=10, somit x=0·0134 Zoll ein nicht unbedeutender Fehler.

Zu einem Maßstabe ist daher jenes Material am geeignetsten, welches durch eine bestimmte Temperatur die kleinste Ausdehnung erleidet.

2. Da man vermöge §. 61 eine Linie nur bis auf 0·0017 Zoll genau fassen und diesen Fehler bei einer Linie im ungünstigsten Falle beiderseits begehen kann, so ist man bei der Abnahme einer Linie einem Fehler von 0·0035 ausgesetzt.

3. Ist die Linie auf das Papier aufzutragen, so wird ihre Länge durch das Einstechen der Zirkelspitzen bestimmt, aber hiedurch kann bei einem gewöhnlichen Zirkel abermals ein kleiner Fehler begangen werden.

Denn sind Fig. 52 AC=BC=d die Schenkel eines gewöhnlichen Zirkels, AB=l die Entfernung seiner Spitzen, und sind diese in das Papier um das Stück Aa=Bβ=a eingedrungen, so ist nicht AB, sondern αβ aufgetragen worden, und αβ—AB=x der so begangene Fehler. Wird aγ mit BC parallel gezogen, so ist $A\gamma=x=\frac{la}{d}$ ..... 1).



Der Werth von x ist also kleiner als a so lange l<d, gleich a wenn l=d, endlich größer als a wenn l>d ist. Daher die Regel, mit einem gewöhnlichen Zirkel nur solche Längen aufzutragen, welche kleiner oder höchstens gleich der Länge der Schenkel des Zirkels sind.

---

*) Dies ist wohl die größte Länge, welche in der praktischen Geometrie auf das Papier aufzutragen kommt, so lange nämlich ist die Diagonale eines Rechteckes, dessen Seiten 20 und 25 Zoll betragen.

Da $\frac{AB}{2} = AC \cos. A$, somit $AB = 2 \cos. A$ und $A = 90 - \frac{C}{2}$ ist, so ist $l = 2d \sin. \frac{C}{2}$; substituirt man diesen Werth in die Gleichung 1), so ist

$x = 2a \sin. \frac{C}{2} \ldots\ldots 2)$.

Bei einem Stangenzirkel sind die Zirkelspitzen parallel, somit der Winkel C gleich Null, also auch x, Gleichung 2), gleich Null; bei dem Auftragen einer Linie auf das Papier ist also ein guter Stangenzirkel den gewöhnlichen Handzirkeln vorzuziehen.

§. 63. Die Genauigkeit der Messung auf dem Papiere hängt endlich noch von dem Umstande ab, daß dasselbe ein hygroskopischer Körper ist, nämlich ein solcher, der die Wasserdünste anzieht, und dadurch eine Ausdehnung erleidet, und daß diese Aenderung nicht unbedeutend ist, dürfte jedem Zeichner bekannt sein.

Soll daher auf dem Papiere eine Zeichnung genau konstruirt werden, so muß der Einfluß, den die Feuchtigkeit der Luft auf das Papier ausübt, *entweder unschädlich gemacht oder ganz verhindert werden.*

Das Erste geschieht, indem man gleich anfangs den verjüngten Maßstab auf das Papier aufzeichnet und von demselben stets die Längen abnimmt; da in dem Verhältniß, als sich der Maßstab ändert, auch die abgenommenen Maße geändert sind, so ist die Zeichnung von diesem Einflusse unabhängig.

Das Zweite wird erreicht, indem man das Zeichenpapier in der ganzen Fläche an das Reißbrett anklebt. Zu diesem Zwecke wird sowohl das Brett als auch das Papier, dieses an der zum Zeichnen nicht bestimmten Seite mit dem Schaume von Eiweiß hinreichend angefeuchtet, und nachdem die benetzten Flächen an einander gelegt worden sind, das Papier mit einem trockenen Bogen bedeckt und von der Mitte nach auswärts mit einem Tuche so lange gerieben, bis es gut auf dem Brette aufliegt; zuletzt wird der über das Brett vorstehende Rand des Papieres an die Seitenflächen des Zeichenbrettes mittelst arabischem Gummi befestiget. Ein auf diese Art aufgespanntes Papier erleidet durch die Feuchtigkeit der Luft keine Aenderung; doch wird hiezu ein starkes festes Zeichenpapier erfordert, weil es beim Abnehmen vom Brette eine ziemliche Spannung auszuhalten hat.

Wird auf dasselbe Bret das zweite Mal aufgespannt, so muß das alte Eiweiß sehr gut abgewaschen werden, wird diese Vorsicht unterlassen, oder kommt unter die Eierklar etwas Dotter, so haftet das Blatt an einigen Stellen so fest, daß man es nur stückweise abzulösen vermag; denselben Anstand beim Abnehmen hat man auch zu erwarten, wenn das aufgespannte Blatt naß geworden ist, stellt man aber das Brett durch einige Zeit der Sonne aus, so bringt man die Zeichnung im Ganzen herunter.

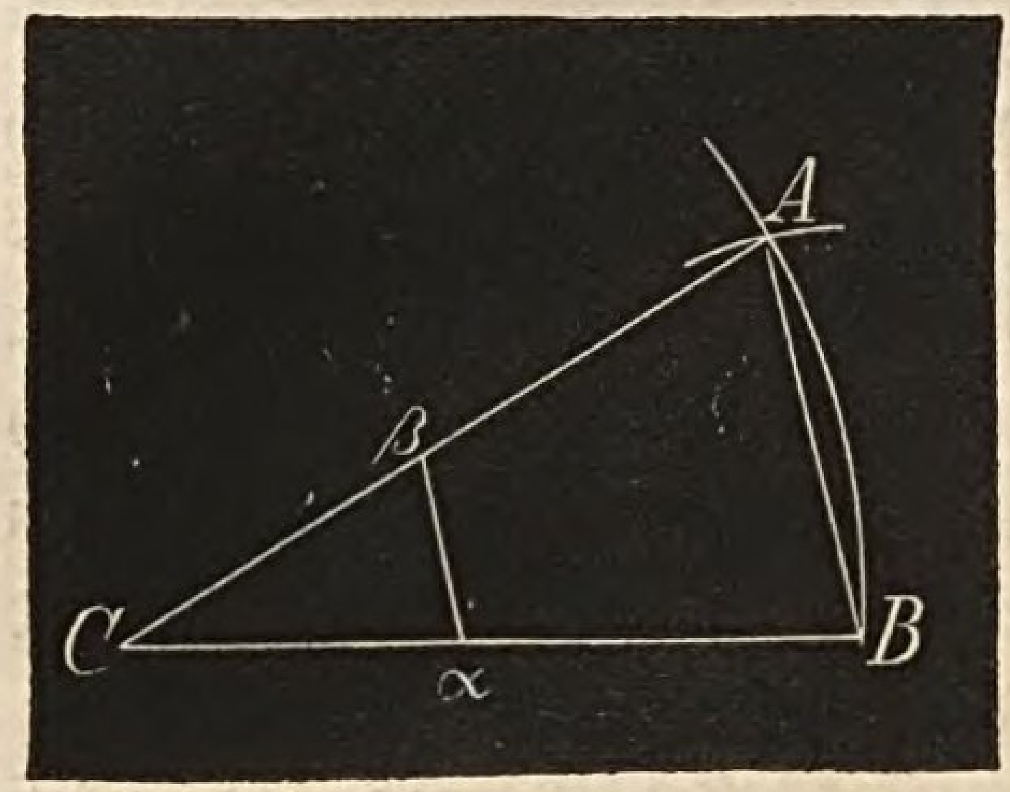
Konstruktion gegebener Winkel auf dem Papiere.

§. 64. Bei der Konstruktion eines Winkels auf dem Papiere ist die Art, wie er gegeben ist, zu berücksichtigen; der Winkel kann nämlich

a) *dadurch bestimmt sein, daß er in einem Dreiecke, gegenüber einer namhaft gemachten Seite, vorkommt, von dem alle drei Seiten gemessen worden sind, oder*

b) daß er in Graden gegeben ist.

Ad a. Werden die Längen der gemessenen Seiten des Dreieckes in Zollen ausgedrückt durch a, b, c vorgestellt, und soll der zu konstruirende Winkel der Seite c gegenüber liegen, so trage man vorerst mittelst des tausendtheiligen Maßstabes die a Zoll auf die gegebene oder willkürlich gewählte Linie CB Fig. 53, also CB=a Zoll, hierauf nimmt man von demselben Maßstabe b Zoll und beschreibt aus C als Mittelpunkt einen Bogen, zuletzt nimmt man c Zoll und durchschneidet den vorigen Bogen aus B, so wird hiedurch der Punkt A, somit auch der Winkel ACB bestimmt.



Wäre b=a, so dürfte man nur aus C mit dem Halbmesser a von dem Schenkel CB angefangen einen Bogen beschreiben, diesen mit der Sehne c von B aus durchschneiden, und würde auf diese Art den Punkt A einfacher erhalten.

Zusatz. Sind die Längen a, b, c in Klaftermaß gegeben, so konstruire man ein Dreieck, in welchem die Seiten in Zoll ausgedrückt mit den Zahlen a, b, c in einem bekannten Verhältnisse stehen.

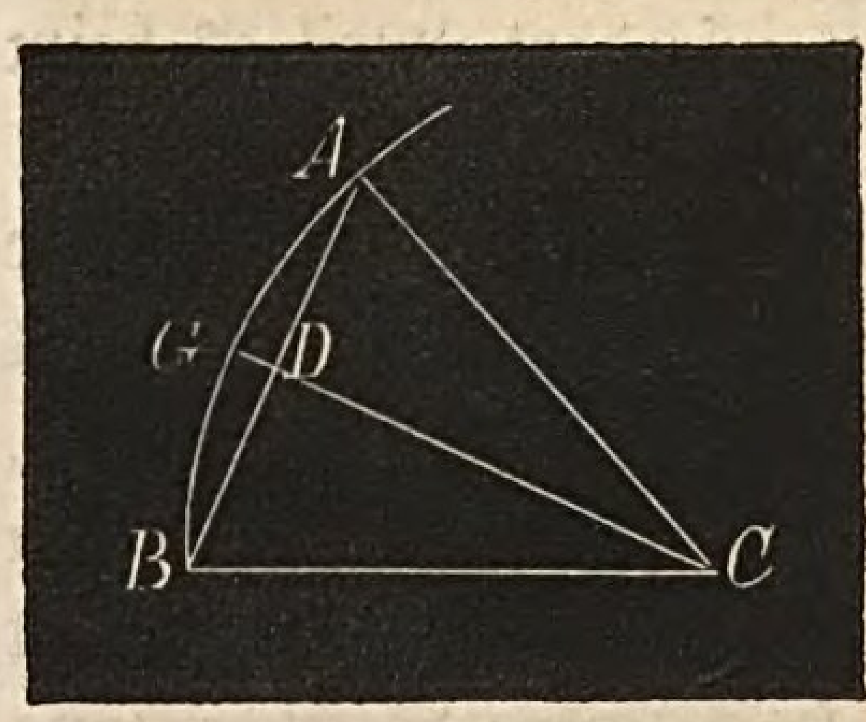
Oder man konstruire ein Dreieck $C\alpha\beta$ Fig. 53 (siehe obere Zeichnung), wo die eine Seite $C\alpha$ willkürlich angenommen ist, und suche die übrigen Seiten im Verhältniß der gegebenen Zahlen.

Ist z. B. a=40·6, b=32·8, c=27·5 Klafter, so nehme man $C\beta$, z. B. 5 Zoll an, und dann findet man aus der Proportion $a:b=C\beta:C\alpha$, so auch $a:c=C\beta:\alpha\beta$, nachdem die bekannten Werthe substituirt worden sind, $C\alpha=4{\cdot}039$ und $\alpha\beta=3{\cdot}387$ Zoll. Konstruirt man also statt mit a, b, c mit $C\beta$, $C\alpha$, $\alpha\beta$ ein Dreieck, so ist wieder C der gesuchte Winkel.

Auf dieselbe Art könnte man verfahren, wenn zwar a, b, c in Zollen, aber durch zu kleine Zahlen ausgedrückt wären.

Ad b. Ist der zu konstruirende Winkel ACB Fig. 54 in Graden gegeben, und $=\alpha$, so denke man sich mit einem bekannten Halbmesser r den Bogen BGA beschrieben, CD auf AB senkrecht gefällt, so ist $AD=r \sin. \frac{\alpha}{2}$, die Sehne

$$AB=2r \sin. \frac{\alpha}{2} \;\ldots\ldots 1);$$

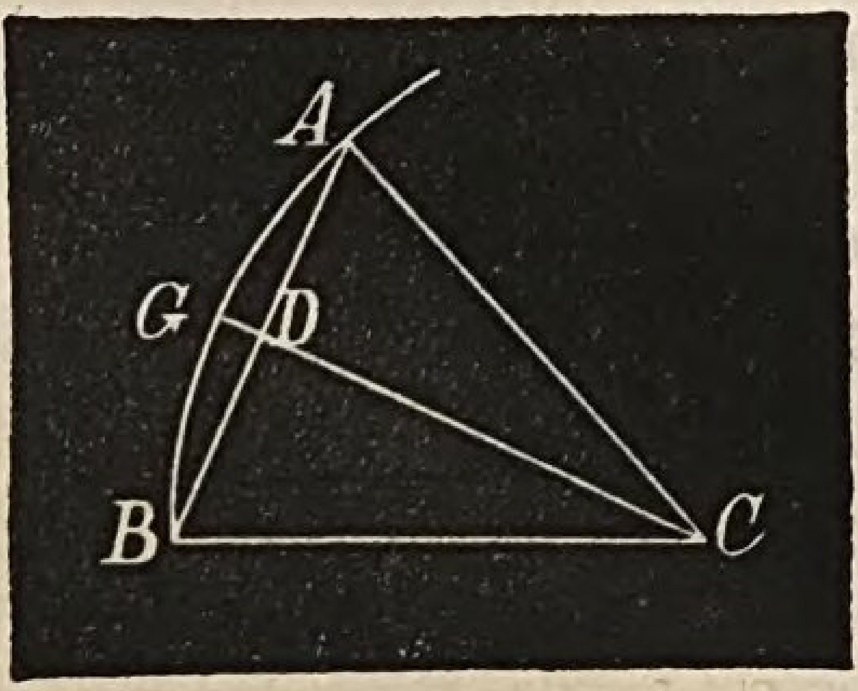


erlaubt es also die Größe des Papiers, so wird die Rechnung erleichtert, wenn man r=5 Zoll nimmt, dann ist die Sehne $= 10 \sin. \frac{\alpha}{2}$. Die Konstruktion selbst ist aus dem Vorhergehenden bekannt.

Zur Bequemlichkeit des Geometers sind in manchen logarithmischen Tafeln die Sinus und auch die Sehnen aller Winkel von 0 bis 90 berechnet, wodurch man bei der Konstruktion der Winkel fast jeder Rechnung überhoben ist.

Statt eines sehr stumpfen Winkels ist es besser seinen Nebenwinkel zu konstruiren.

Zusatz. Aus der Fig. 54 ist zugleich ersichtlich, wie man verfahren müßte wenn ein auf dem Papier gegebener Winkel in Graden bestimmt werden sollte; man müßte nämlich aus dem Scheitel C mit einem hinreichend großen Halbmesser r zwischen den Schenkeln einen Bogen beschreiben, und nebst dem Halbmesser auch die Sehne AB messen, und hätte sodann aus der Gleichung 1)



$$\sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2r}.$$

Z. B. $AB = 5\cdot512$, $r = 7$ Zoll, so ist $\log. \sin. \frac{\alpha}{2} = 9\cdot5951812$, $\frac{\alpha}{2} = 23^{0}\,11'\,9''$ und $\alpha = 46^{0}\,22'\,18''$, wobei man die Sekunden nicht verbürgen wird.

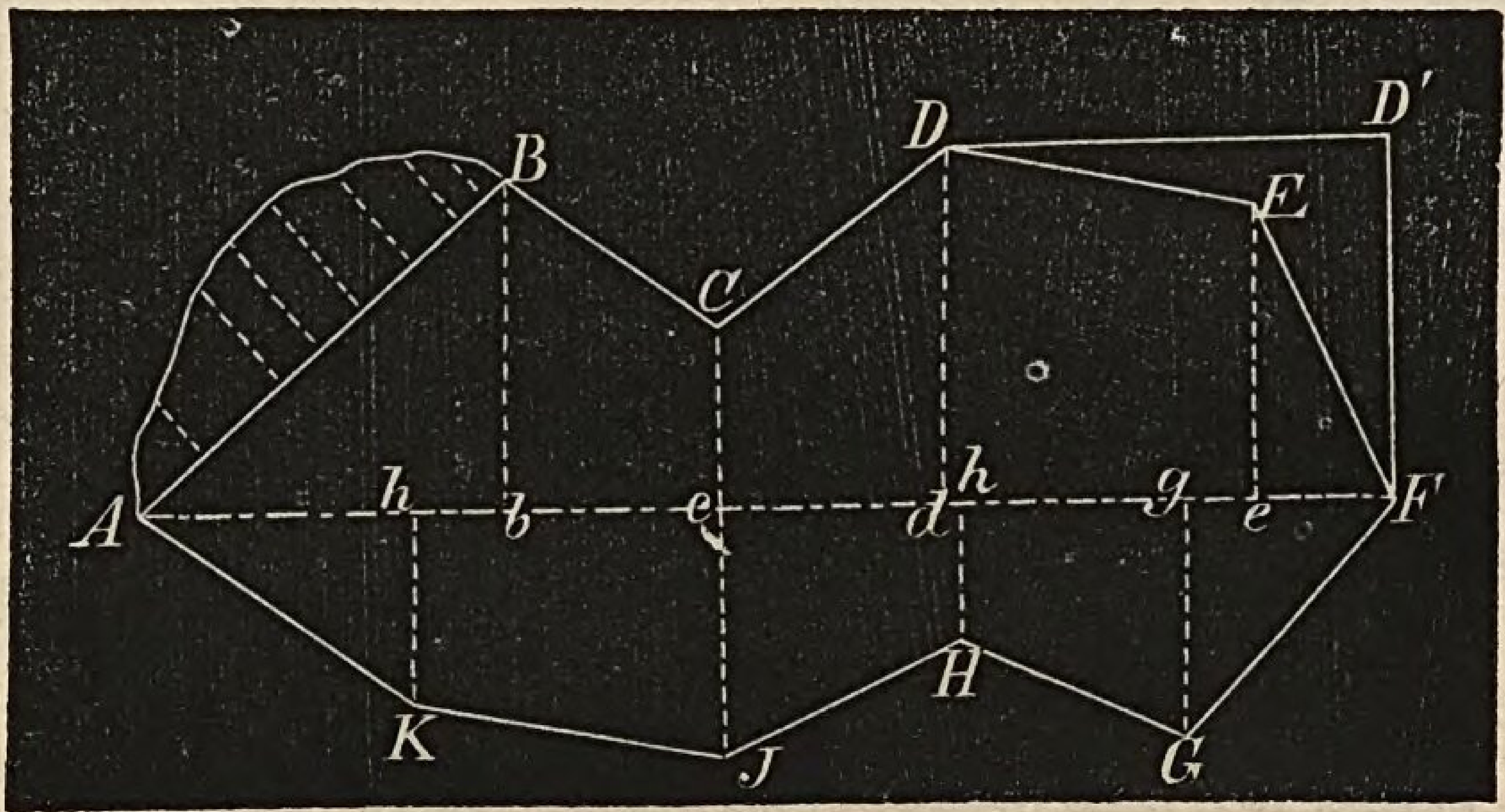
Zur Erleichterung der Konstruktion jener Winkel, die in Graden gegeben sind, oder zum Messen und Uebertragen solcher Winkel, die auf dem Papier bereits gezeichnet sind, hat man ein eigenes Instrument (Transporteur), welches mittelst eines Nonius die Winkel bis auf eine Minute genau angibt.

Anwendung des Vorhergehenden auf die Vermessung einzelner Polygone.

§. 65. Ein Polygon vermessen heißt von demselben so viele Stücke bestimmen, daß die übrigen nicht gemessenen Stücke entweder durch Konstruktion des Polygons im verjüngten Maßstabe oder durch Rechnung gefunden werden können.

Zur Vermessung eines Polygons mittelst Kette und Stäben sind folgende Auflösungen die brauchbarsten.

1. Auflösung. Kann man innerhalb des Polygons ungehindert messen, so nehme man die längste Diagonale z. B. die AF Fig. 55 als Abszissenlinie, spanne von A in der Richtung AF die Kette aus, fälle von den übrigen Ecken des Polygons die Ordinaten Bb, Cc, Gg...., messe diese und ihre zugehörigen Abszissen Ab, Ac, Ag ...., so ist hiedurch das Polygon vollkommen bestimmt.



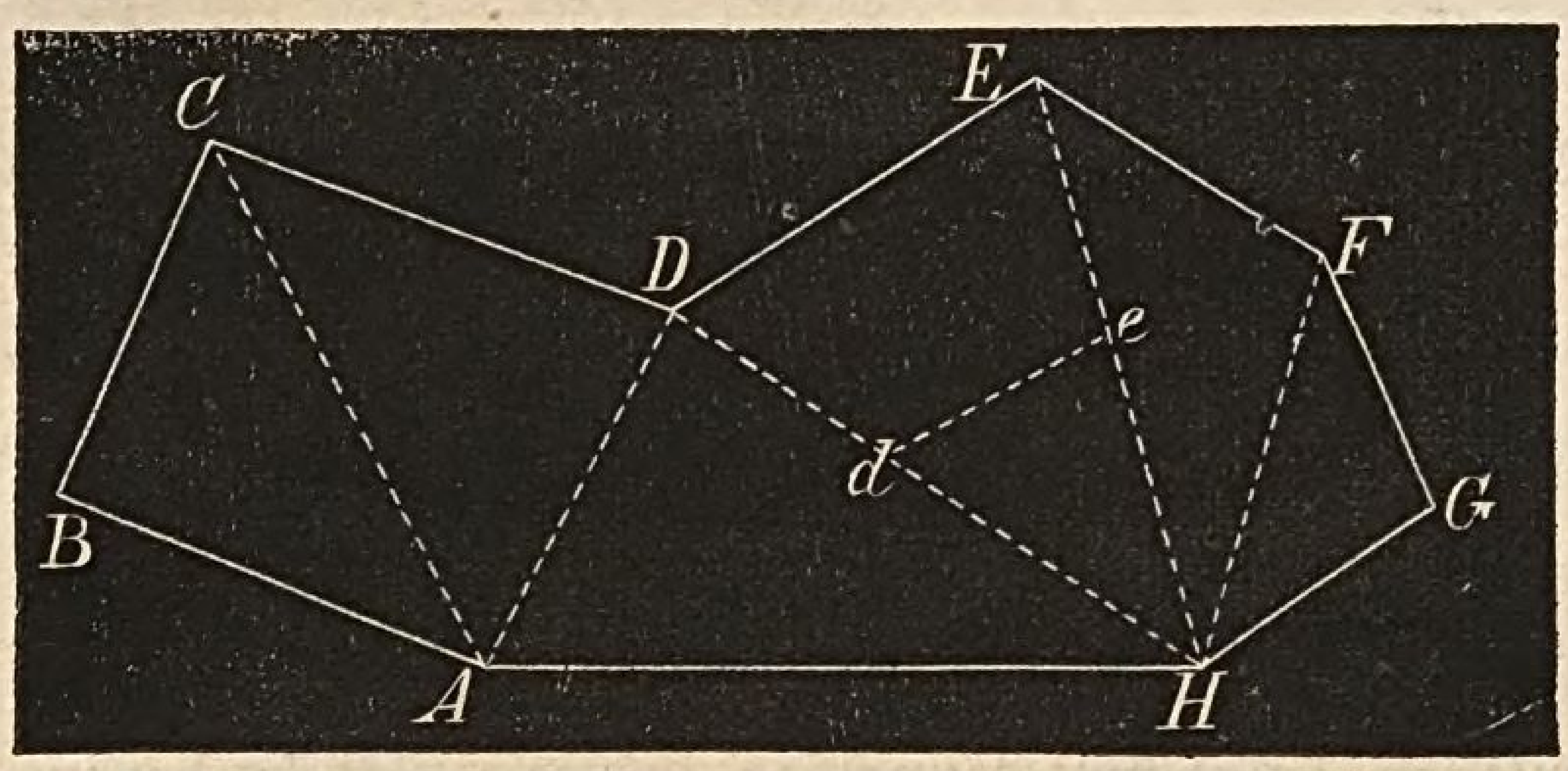
Vor dem Beginne der Messung wird ein Entwurf angefertigt, und die gefundenen Maße an die zugehörigen Linien geschrieben.

Wäre das Polygon zum Theil von einer krummen Linie begränzt, wie es in der Fig. 55 (siehe die zweite Zeichnung auf dieser Seite) von A bis B der Fall ist, so nehme man AB als Abszissenlinie und fälle auf diese die entsprechenden Ordinaten, so ist durch das Maß der Abszissen und Ordinaten auch die krumme Linie bestimmt.

Diese Art, das Polygon zu vermessen, hat das für sich, daß man die Fläche desselben aus den durch die Messung erhaltenen Daten bestimmen und das Polygon

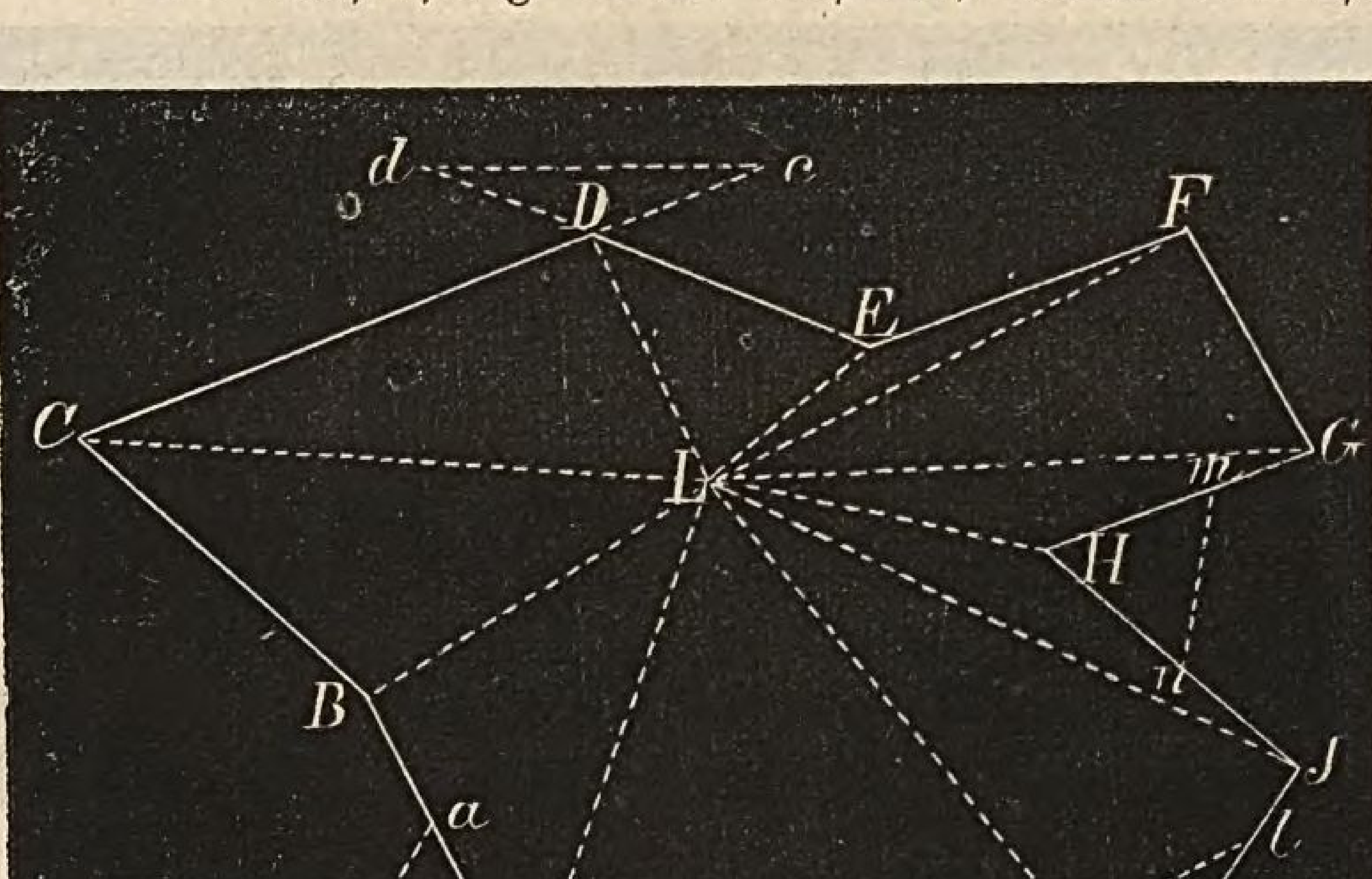
leicht konstruiren kann, dabei zieht man vorerst auf dem Papiere eine gerade Linie, trägt auf dieser von einem angenommenen Punkte die Abszissen nach einem zweckmäßig gewählten verjüngten Maßstabe auf, errichtet sodann in den so erhaltenen Punkten nach Angabe des Brouillons senkrechte Linien und auf diese das Maß der entsprechenden Ordinate, so erhält man durch die Verbindung der zuletzt bestimmten Punkte das Polygon selbst.

2. Auflösung. Kann man innerhalb des Polygons ungehindert messen, und will man das Fällen der Ordinaten vermeiden, so messe man von einem Scheitel des Polygons z. B. von H, Fig. 56, alle Diagonalen und Seiten des Polygons, so hat man dasselbe in lauter Dreiecke zerlegt, und von jedem alle drei Seiten gemessen.



Wäre man gehindert von demselben Punkte H alle Diagonalen zu messen, so kann man die übrigen von einem andern Punkte z. B. von A messen, nur muß die Verbindung zwischen beiden Messungen dadurch hergestellt werden, daß man die Entfernung des Punktes D von H und A bestimmt; und könnte man irgend eine der Seiten z. B. DE nicht direkt messen, so messe man die Diagonalen DH, HE, trage auf diese dieselben aliquoten Theile Hd und He, bestimme de, so ist dadurch auch DE gegeben. Auf diese Art könnte man alle Seiten des Polygons finden.

Die Auflösung bleibt dieselbe, wenn innerhalb des Polygons ein Punkt L, Fig. 57, angenommen wird, und die Entfernung der Umfangsecken von L nebst den Seiten des Polygons gemessen werden. Ist es möglich, so wähle man den Punkt L so, daß die einzelnen Dreiecke möglichst gleichseitig werden.

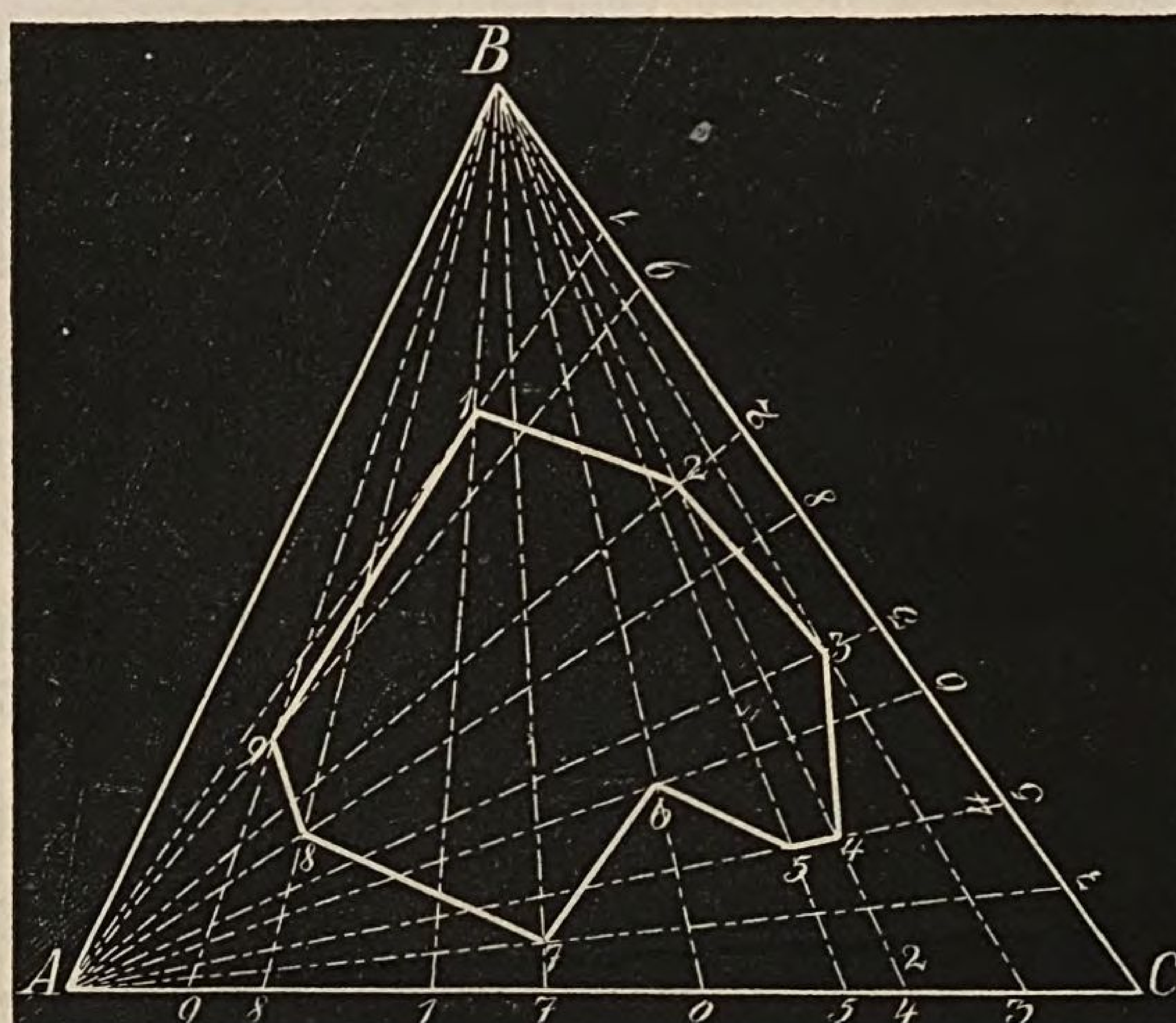


Das Polygon ist auch bestimmt, wenn von den Endpunkten einer Seite alle Diagonalen gemessen werden, dann braucht man die übrigen Seiten des Umfanges nicht zu messen.

Bei der Konstruktion des Polygons im verjüngten Maßstabe fängt man mit einem Dreiecke an, welches ziemlich in der Mitte liegt, also z. B. Fig. 56 (siehe die erste Zeichnung auf dieser Seite) mit dem Dreiecke ADH, konstruirt an der Seite DH das nächste Dreieck DEH u. s. w.; von der andern Seite wird das Dreieck ACD, an dieses ACB angesetzt, so erhält man das ganze Polygon. Dadurch, daß man von der Mitte zu konstruiren anfängt, werden die unvermeidlichen Fehler der Konstruktion nach beiden Seiten gleichförmig vertheilt, und können

sich nicht so anhäufen, als wenn das Polygon von der äußersten Seite angefangen, konstruirt wird.

3. Auflösung. Der Geometer errichtet durch drei Figurirfahnen um das Polygon zunächst ein nahe gleichseitiges Dreieck, wie die Figur zeigt, bestimmt dessen Seiten allenfalls noch näher durch Absteckstäbe und pflöckt das Polygon aus.



Ist dies geschehen und will der Geometer die Vermessung von A beginnen, so schickt er einen Gehilfen (Handlanger) mit einer Figurirfahne zu dem nächstgelegenen Punkte 9, einen zweiten nach 1 mit der Weisung, daß jeder auf einem der numerirten Plätze seine Fahne so lange vertikal zu halten und erst dann in der angegebenen Richtung (der eine von 9 gegen 8, der andere von 1 gegen 2) zu dem nächsten Punkte zu gehen habe, wenn das ihn betreffende Zeichen gegeben worden ist. (Das eine Zeichen kann durch ein Signalhorn, das andere mittelst einer Figurirfahne, oder beide durch leicht unterschiedliche Töne des Signalhorns gegeben werden.)

Der Geometer zeichnet auf einem Blatte Papier ein dem abgesteckten nahe ähnliches Dreieck, läßt die Meßkette von A in die Linie AC legen, und geht, während der eine Handlanger die Fahne in der nächsten Ecke, in diesem Falle 9 hält, so weit bis ihm diese und die Fahne B in einer vertikalen Ebene erscheinen, wo er sodann in dem Durchschnitte der Linie B9 und AC steht. Diesen Punkt bezeichnet er allenfalls auch mit 9, schreibt die in der Kette abgelesene Entfernung vom A, d. i. A9 auf, und gibt dem Handlanger das verabredete Zeichen. Dasselbe Verfahren wiederholt er bei jedem folgenden Punkte, läßt, sobald eine Entfernung mehr als 10 Klafter beträgt, die Kette um einen Kettenzug weiter legen, und bekommt auf diese Art die Längen A9, A8, A1, A7 ꝛc. und endlich AC selbst.

Nun läßt der Geometer die Kette von C angefangen in die Linie CB legen, wenn er die Messung von C gegen B anfangen will, der eine Handlanger geht von 7 gegen 8 bis 1, der andere von 6 nach 5 bis 2; der Geometer bestimmt wieder die Durchschnitte auf der Linie CB, notirt ihre Entfernung von C, so auch jene der CB.

Einer Irrung in den Punkten ist dadurch leicht vorgebeugt, daß jeder der Handlanger etwa nach jedem 5ten Punkte das Nummer desselben durch ein Zeichen angibt. Sollten nicht alle Punkte entweder von AC oder BC bestimmt worden sein, so muß für diese die Operation an der dritten Seite vorgenommen, jedenfalls aber auch diese gemessen werden.

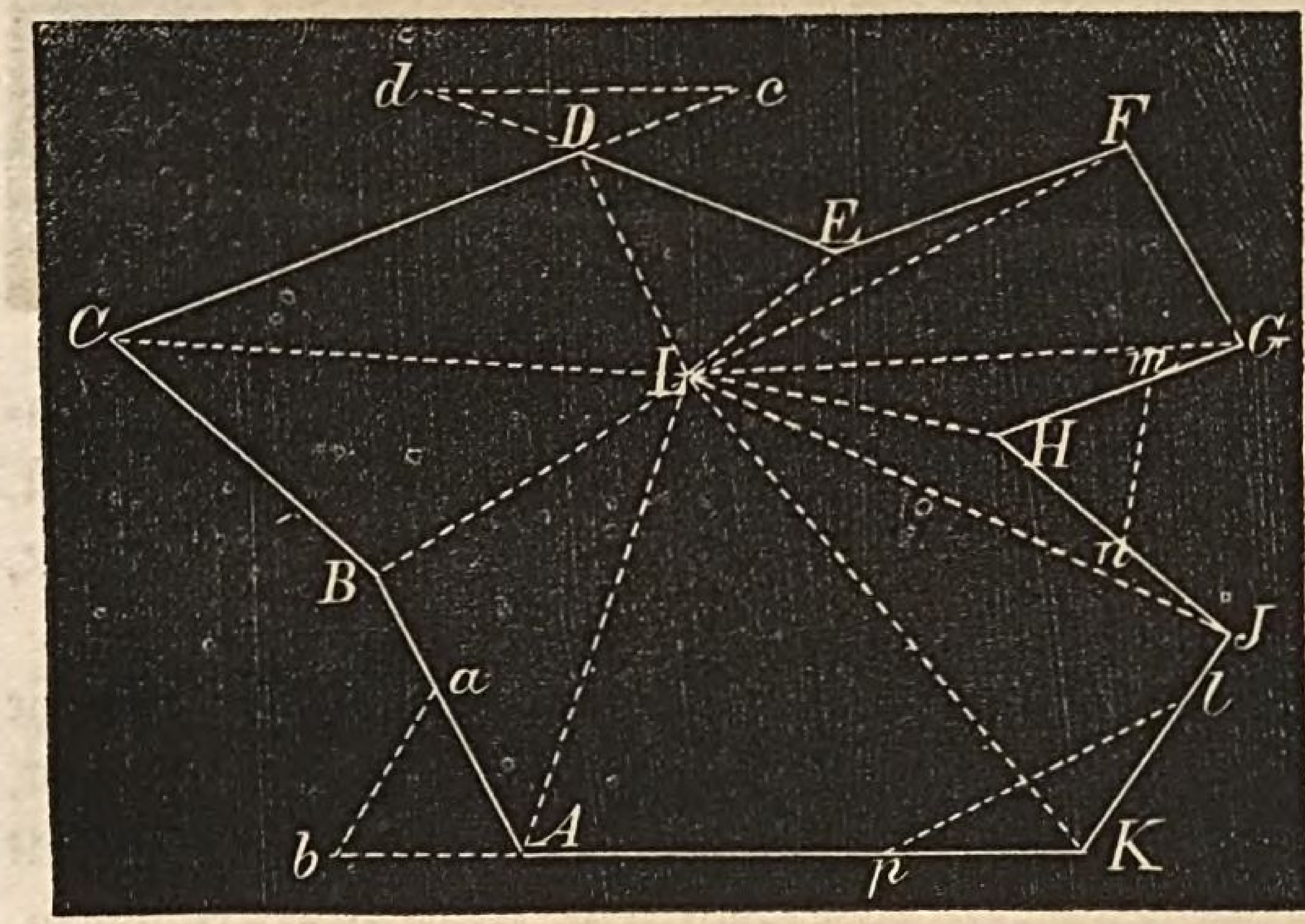
Sind nun die Maße alle adnotirt, so wird mit den gemessenen Seiten das Dreieck im verjüngten Maßstabe auf dem Papier konstruirt, die Entfernung der Punkte von A, sodann von C aufgetragen, die Linien von B zu jenen, die in der AC, und von A zu jenen, die in der BC liegen, mit Blei gezogen; die Durchschnitte der gleich bezeichneten Linien gehörig verbunden, geben die Figur des Polygons *).

Anmerkung. Mit Hilfe eines Distanzmessers läßt sich die Aufgabe auch in dem Falle sehr leicht auflösen, wenn man die Seite des Dreieckes mit der Kette zu messen gehindert wäre.

4. Auflösung. Bei den drei vorhergehenden Auflösungen wurde vorausgesetzt, daß man innerhalb oder außerhalb des Polygons ungehindert messen kann; geht dies aber nicht an, so messe man die Seiten und Winkel des Umfanges selbst, so ist der Zweck auch erreicht.

Bei dieser Vermessungsart ist ein gutes Brouillon von wesentlichem Nutzen, in dasselbe werden die Zahlen für die Länge der Seiten auf die zugehörigen Linien eingetragen und daselbst muß auch angemerkt werden, wie ein Winkel bestimmt worden ist.

Die Art, wie ein Winkel mittelst Kette und Stäben bestimmt werden könne, ist aus den §§. 49 und 65 bekannt; ist z. B. Fig. 57 der Winkel K zu messen, so trägt man auf den Schenkel KI und KA von K aus gleichviel am besten 5 Klafter auf, so daß Kl = Kp wird, und mißt auch pl, so kann mit diesen Zahlen der Winkel lKp auf dem Papiere aufgetragen werden.



Sollte man innerhalb des Polygons die gleichen Theile nicht bestimmen können, so kann man, wie bei A dargestellt ist, den Nebenwinkel bAa, oder wie bei D, den Scheitelwinkel dDc, oder wie bei H, den hohlen Winkel mHn messen, nur muß wie gesagt, im Brouillon ersichtlich gemacht werden, welcher Winkel bestimmt wurde.

Will man nun das gemessene Polygon und z. B. in dem Maßstabe 30 Klafter = 1 Zoll konstruiren, so kann man entweder

a) die durch die Messung der Seiten erhaltenen Zahlen durch 30 dividiren, so bedeuten die Quotienten die entsprechenden Seiten in Zoll ausgedrückt, oder was einfacher ist

b) man zeichnet für das Auftragen der Seiten einen verjüngten Maßstab, nach der obigen Annahme $30^0 = 1''$, und nimmt von diesem die Länge der Seiten ab.

Zur Konstruktion der Winkel ist aber am besten, die Länge einer Klafter durch einen Zoll darzustellen, und nach diesem Maßstabe die Winkel zu konstruiren.

*) Diese Methode hat Nernst in Grunenet's Archiv, eilften Theil, viertes Heft bekannt gemacht; die Ausführung derselben jedoch wie sie hier angegeben ist, dürfte einfacher sein.

Hat man also bei einem Winkel die gleichen Schenkel 5 Klafter genommen, und die Grundlinie 4°763 gefunden, so hat man auf dem Papiere ein gleichschenkeliges Dreieck zu konstruiren, dessen beide Schenkel 5 und die dritte Seite 4·763 Zoll lang sind.

Nach welcher Seite der gemessene Winkel konstruirt werden müsse, damit man den gesuchten des Polygons erhalte, wenn dieser nicht bestimmt werden konnte, ist in dem Brouillon angegeben.

Konstruktion der Polygone, wenn nicht alle Stücke gemessen werden konnten.

§. 66. Von einem Polygone können drei Stücke unbekannt sein (drei Seiten ausgenommen), und doch ist dasselbe vollkommen bestimmt, kann somit konstruirt werden.

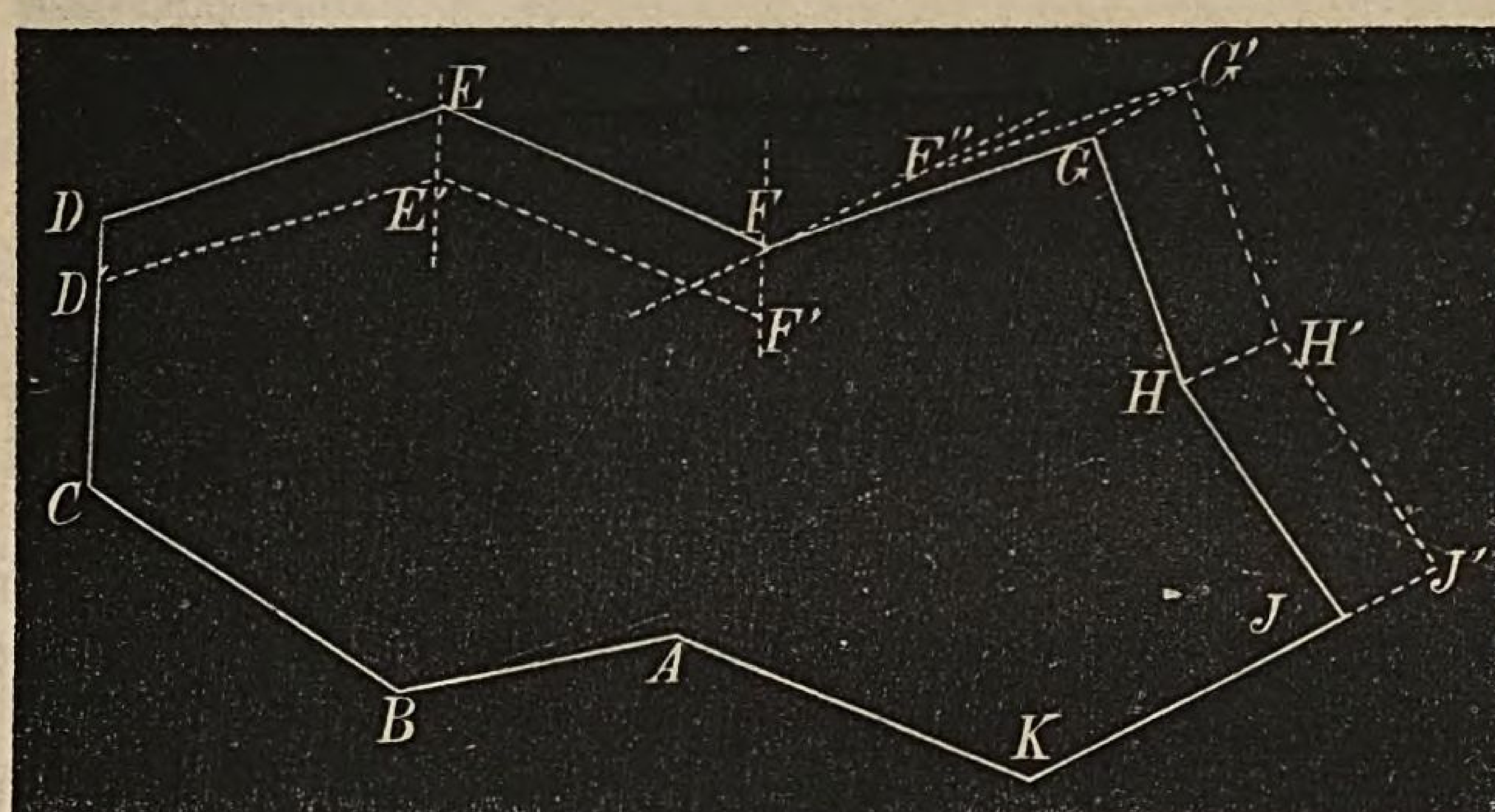
Hinsichtlich der unbekannten Stücke sind folgende Fälle zu unterscheiden: es ist unbekannt.

a) ein Winkel und zwei Seiten;

b) zwei Winkel und eine Seite; endlich

c) drei Winkel.

Ad a. In dem Polygone, Fig. 58, konnte CD, KI und der



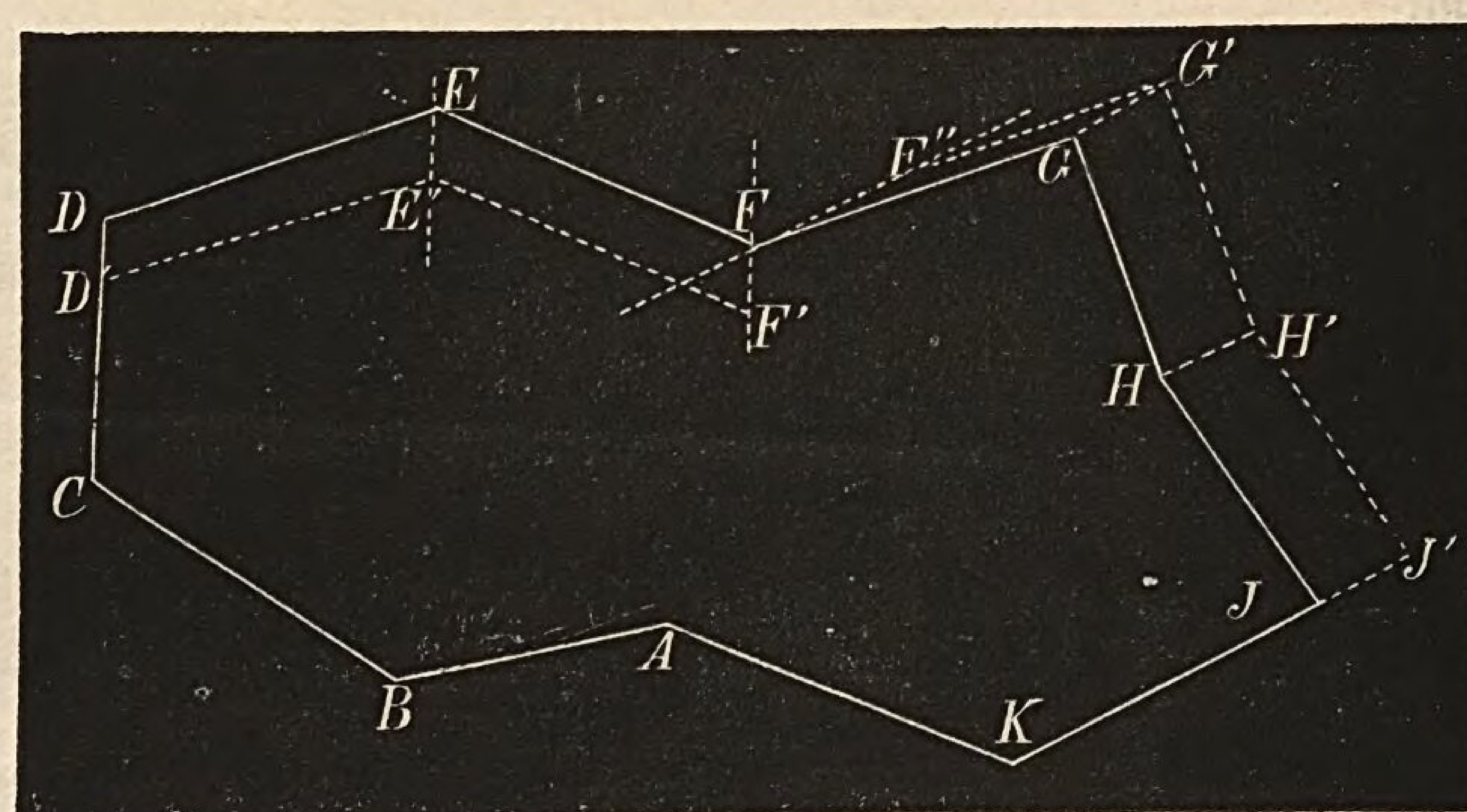
Winkel EFG nicht gemessen werden, mit den gemessenen Stücken das Polygon zu konstruiren.

Auflösung. Man konstruire nach den Angaben des Brouillons einen der gemessenen Winkel (hier A), der von den unbekannten nach beiden Richtungen ziemlich gleich weit absteht, trage auf den Schenkeln die gemessenen Seiten AK und AB im verjüngten Maßstabe auf, wodurch die Punkte K und B bestimmt werden; nun konstruire man an die Schenkel AK, AB die bekannten Winkel AKI' und ABC, trage an den Schenkel BC die gemessene Seite BC auf, und verfahre so fort, bis man an die unbekannten Seiten KI und CD kommt, diese Weiten nimmt man willkürlich an, also die eine KI', die andere CD' und konstruirt mit diesen das Polygon bis zu dem unbekannten Winkel. Dadurch erhält man das nicht geschlossene Polygon F'E'D'CBAKI'H'G'F''; durch F' zieht man eine parallele Linie FF' mit der unbekannten Seite CD', durch F'' die FF'' parallel mit KI', der Punkt, in dem sich diese beiden Linien schneiden, also F,

ist die gesuchte Ecke des Polygons. Konstruirt man von F aus wieder nach beiden Richtungen bis zu den unbekannten Seiten, indem man GG′ und HH′ parallel mit KI′, ferner EE′ mit CD′ zieht, auf der einen Seite FG//F″G′, GH//G′H′, HI//H′I′, auf der andern EF//E′F, ED//D′ macht, so erhält man das gesuchte Polygon AB . . . . . HIK.

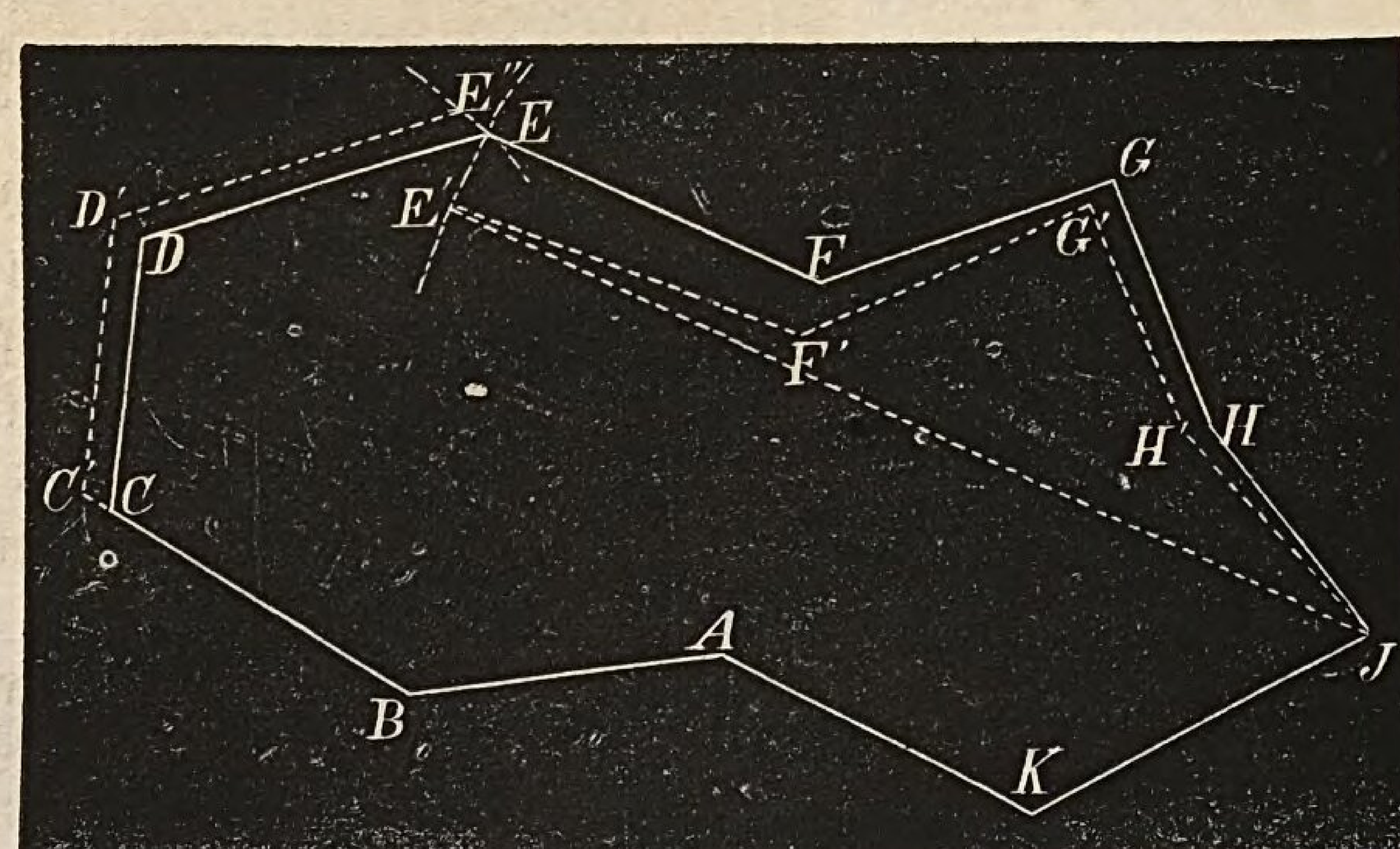
Ist der unbekannte Winkel von den unbekannten Seiten eingeschlossen, so ist die Konstruktion einfacher; denn angenommen, die Seiten FG, HG und der eingeschlossene Winkel G sind die unbekannten Stücke, so fängt man das Polygon von A nach der rechten Seite bis zu dem Punkte H nach der andern bis I zu konstruiren, in H und I aber zeichnet man an die Schenkel HI und FE die bekannten Winkel IHG und EFG, so erhält man durch den Durchschnittspunkt G der beiden Schenkel HG und FG den Schluß des Polygons.

Sind die beiden nicht gemessenen Seiten parallel, so ist die Auflösung unmöglich, denn wäre Fig. 58 CD mit KI parallel, so wäre es auch die Linie F′F



und F″F, überdies aber wären die Abstände der Punkte F und F′ von der CD, so auch F und F″ von der KI gleich, also FF′ und FF″ nur eine Linie, es wäre somit unbestimmt, welcher der Punkte dieser Linie der richtige sei.

Ad b. In dem Polygone Fig. 59 konnte die Linie BC und die Winkel KIH, DEF nicht gemessen werden, es ist nun mit den gemessenen Stücken das Polygon zu konstruiren.



Auflösung. Man fange die Konstruktion bei einer bekannten Ecke an, hier bei K, zeichne diesen Winkel nach den bei der Messung erhaltenen Daten, und trage auf dem Schenkel AK das verjüngte Maß auf, wodurch der Punkt A bestimmt wird,

in A wird der gemessene Winkel aufgezeichnet, auf dem Schenkel AB das Maß dieser Linie aufgetragen, dadurch der Punkt B erhalten; nachdem aber der Winkel B konstruirt worden ist, wird die unbekannte Seite BC′ willkürlich angenommen und die Konstruktion, da die übrigen Stücke wieder bekannt sind, bis zu dem unbekannten Winkel E″ fortgesetzt.

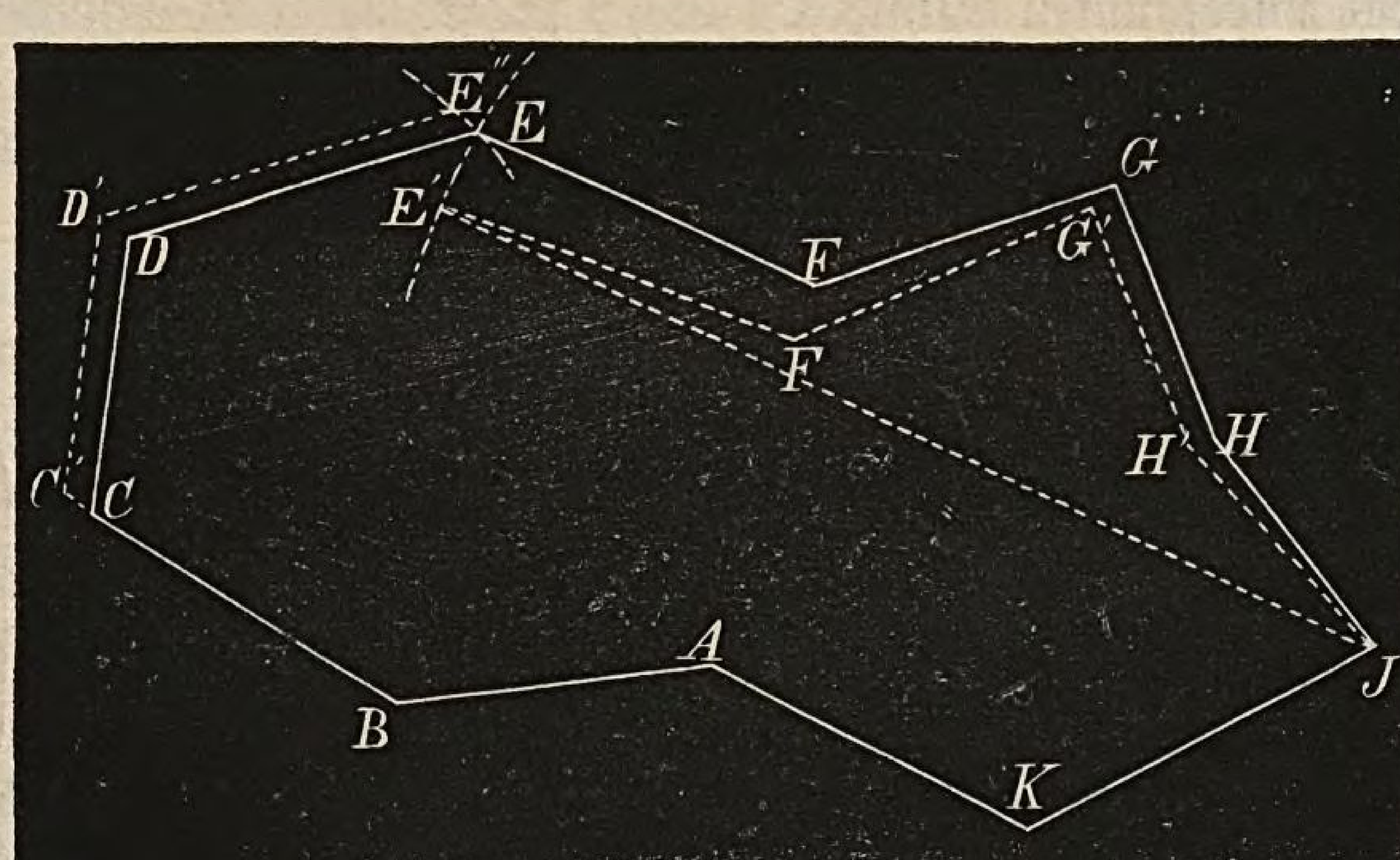
Nach der andern Seite trägt man von K aus das Maß der Seite KI auf, von I aber konstruire man das Polygon unter einem willkürlich gewählten Winkel KIH′ weiter, bis man wieder zu dem unbekannten Winkel E′ kommt; dadurch erhält man das nicht geschlossene Polygon E″D′C′ . . . . . IH′FE′.

Nun zieht man durch E″ eine mit der unbekannten Seite BC′ parallele Linie E″E und durchschneidet diese aus dem Scheitel des unbekannten Winkels I mit dem Halbmesser IE′ im Punkte E, und dieser ist die gesuchte Ecke des Polygons; von E aus konstruirt man gegen I das Polygon EFGHI, indem man E′ und E mit I verbindet, den Winkel IEF=IE′F′ macht, auf dem Schenkel EF das Maß desselben aufträgt, von F aus aber nach der bekannten Methode verfährt. Die Konstruktion des Theiles von E gegen C ist aus der Figur ersichtlich, das so erhaltene Polygon ABC . . . . . HIK ist das gesuchte.

Zusatz. Da die Peripherie eines Kreises von einer geraden Linie in zwei Punkten geschnitten wird (sobald es erwiesen ist, daß sich beide Linien schneiden), so wird diese Auflösung unbestimmt, wenn die Durchschnittspunkte des Kreises vom Halbmesser E′I mit der E″E nahe an einander liegen und der wahre Durchschnitt nicht durch andere Mittel näher bestimmt ist.

In diesem Falle ist es räthlich, eine Diagonale von einem der bekannten Ecken, z. B. von A nach E entweder direkt messen, oder nur durch Schritte zu bestimmen, und falls dies nicht möglich wäre, die Größe eines der unbekannten Winkel E oder F nach dem Augenmaße anzugeben.

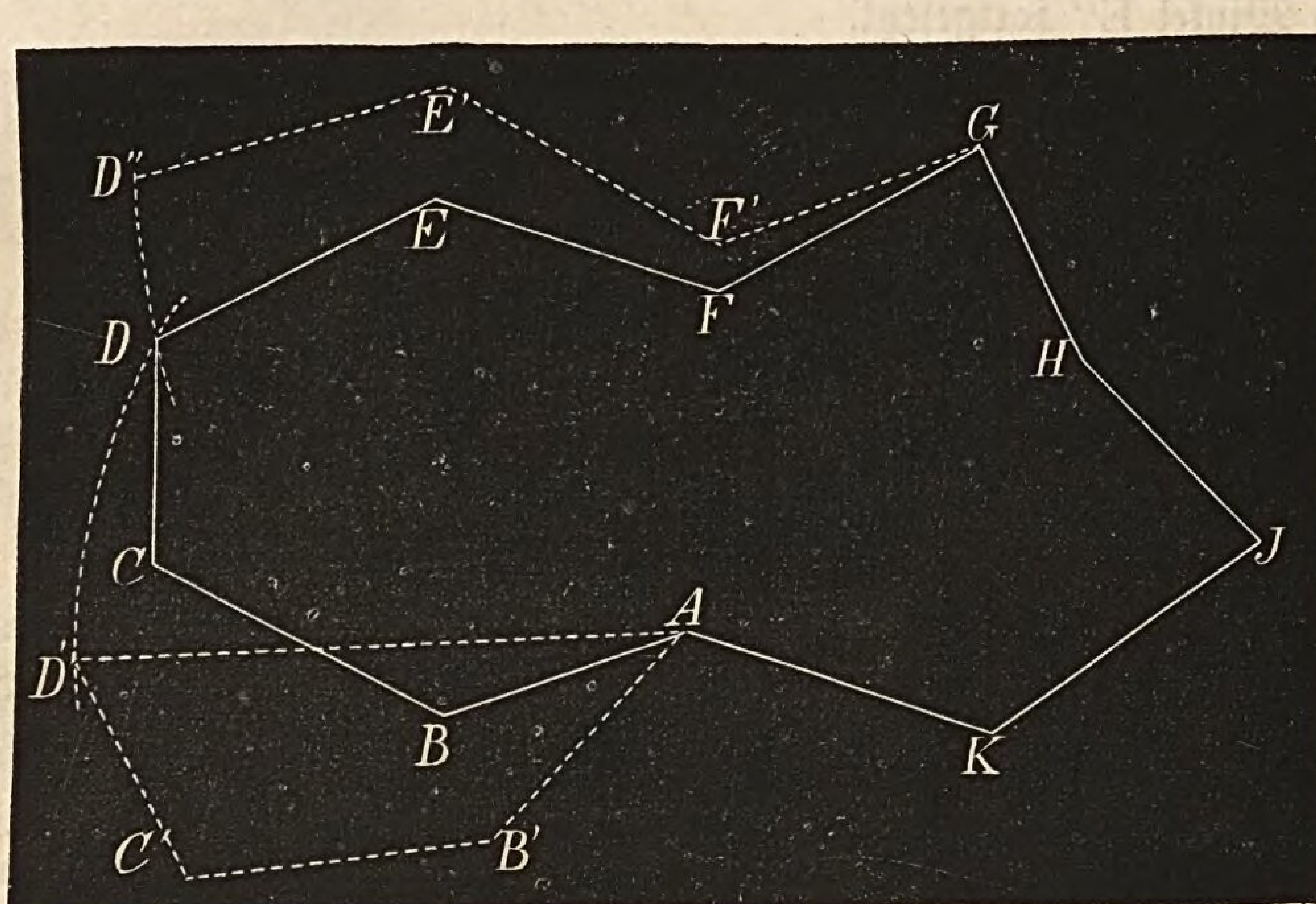
Der Fall, daß die Durchschnittspunkte sehr nahe an einander liegen, würde z. B. bei Fig. 59 eintreten, wenn die Seite IK, ferner der Winkel A und E unbekannt wären.



Liegen die unbekannten Winkel an einer bekannten Seite, so ist die Auflösung einfacher; wäre z. B. Fig. 59 die Seite BC und die Winkel DEF, EFG unbekannt, so kann man von der Ecke B angefangen den Theil BA . . . . . F zeichnen, da er lauter bekannte Stücke erhält; nun nimmt man die Seite BC beiläufig an, konstruirt den Theil BC′D′E″, zieht von E″ eine mit der unbekannten Seite parallele Linie, durchschneidet sie von F aus mit der bekannten Seite FE, erhält dadurch den Punkt E und konstruirt von diesem angefangen über D das Polygon zurück, so ist die Aufgabe aufgelöst.

Die Auflösung wird noch einfacher, wenn die unbekannten Winkel an der unbekannten Seite liegen; wäre z. B. EF sammt den anliegenden Winkeln unbekannt, so ist eine Erklärung der Auflösung überflüssig.

Ad c. Das Polygon, Fig. 60, zu konstruiren, wenn von



demselben die Winkel KAB, CDE und FGH unbekannt sind.

Auflösung. Das Stück AKIHG kann gezeichnet werden, da in demselben alle Stücke bekannt sind; von G und A aus konstruire man die Polygone unter willkürlich angenommenen Winkeln, so erhält man das nicht geschlossene Polygon D'C'B'A ..... E'D''. Nun beschreibe man aus G mit der Entfernung D''G einen Bogen und durchschneide denselben aus A mit der Entfernung D'A, der Durchschnitt beider Bogen, nämlich der Punkt D, ist der gesuchte Scheitel des unbekannten Winkels.

Nun verbinde man D'' und D mit G, so auch D' und D mit A, konstruire den Theil D''EF'G über DG, ferner D'C'B'A über DA, so ist das so erhaltene Polygon ABC ..... IK das verlangte.

Folgen die drei unbekannten Winkel unmittelbar auf einander, so wird durch diesen Umstand die Konstruktion erleichtert, denn sind z. B. die Winkel H, I, K unbekannt, die Seiten HI und IK aber gemessen, so kann das Polygon von K über A, D ..... bis H konstruirt werden; und weil die Punkte H und K bereits bestimmt sind, so beschreibe man aus H mit der Seite HI einen Bogen und durchschneide denselben aus K mit der Seite IK, der Durchschnitt I ergänzt das Polygon.

Zusatz. Da die Mittelpunkte der zu beschreibenden Kreisbogen immer bedeutend von einander entfernt fallen, so ist in diesem dritten Falle die Auflösung immer bestimmt.

Anmerkung. Der Beweis für die Richtigkeit der drei Auflösungen ist einzig in dem Umstande zu suchen, daß an den geschlossenen Polygonen die gemessenen Stücke in ihrer wahren Größe vorkommen.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Winkelinstrumente.

§. 67. Die Schenkel der Winkel sind gerade Linien, ihre Richtung daher durch zwei Punkte gegeben, jene werden also durch dieselben Mittel bezeichnet, welche wir für die Bezeichnung der Punkte im §. 23 angeführt haben.

Hinsichtlich der Art, wie die Größe eines Winkels gefunden wird, kann man die Instrumente in vier Klassen abtheilen.

1. In solche, mittelst welchen die horizontale Projektion eines Winkels konstruirt, oder, wie man sagt, graphisch bestimmt wird;

2. in solche, welche nur einen oder einige, aber konstante Winkel;

3. welche das Maß des Winkels in Graden, und

4. welche die Länge einer trigonometrischen Funktion des zu messenden Winkels angeben.

Wir werden in der Folge sehen, daß bei einigen Instrumenten ein oder zwei ebene Spiegel wesentliche Bestandtheile sind, und daß durch diese Spiegel die Art ihres Gebrauches bedingt ist; es scheint uns daher besser, die Instrumente hinsichtlich ihrer Bestandtheile und zwar auf folgende Art einzutheilen:

1. in Instrumente ohne Spiegel;

2. in Instrumente mit ebenen Spiegeln.

Die meiste Regelmäßigkeit in ihrem Baue haben die Instrumente ohne Spiegel, wir wollen also gegenwärtig hauptsächlich diese im Auge behalten, und nachher erst das den Instrumenten mit Spiegeln Eigenthümliche im vierten Abschnitte nachtragen.

Theorie der Winkelinstrumente ohne Spiegel.

§. 68. In der Regel wird die Größe eines Winkels durch die Anzahl Bogengrade angegeben, welche von der Peripherie eines Kreises zwischen seinen Schenkeln enthalten sind; in diesem Falle ist aber nothwendig, daß der Mittelpunkt des Kreises in dem Scheitel des Winkels und seine Ebene durch die beiden Schenkel gelegt ist, ferner, daß die Peripherie in Grade, und zur Erzielung einer größeren Genauigkeit, wo möglich noch in aliquote Theile des Grades abgetheilt ist.

Dieser eingetheilte Kreis, von welchem nicht immer die ganze Peripherie vorhanden ist, heißt Limbus.

Außer dem Limbus ist noch eine Vorrichtung erforderlich, mittelst welcher die Endpunkte des Bogens bezeichnet werden, welcher das Maß des zu messenden Winkels angibt. Diese Vorrichtung muß sich um den Mittelpunkt des Limbus

bewegen, und deshalb, mathematisch betrachtet, entweder ein Halbmesser oder Durchmesser des Limbus sein.

Dieser bewegliche Schenkel heißt Alhidade und liegt entweder in der Ebene des Limbus selbst oder mit ihr parallel.

Aus den §§. 13 und 14 ist bekannt, daß in der Flächenmessung nur die horizontale Projektion eines Winkels gesucht wird, in diesem Falle ist der Limbus die Ebene, auf welche die Winkel projizirt werden, und wird nicht, wie oben erwähnt wurde, in die Ebene der Schenkel selbst, sondern horizontal gelegt, und da die Alhidade mit dem Limbus parallel ist, so bewegt sich auch diese in einer horizontalen Ebene.

Die horizontale Projektion eines Winkels ist bekanntlich jener Winkel, unter welchem die durch die Schenkel eines Winkels gelegten vertikalen Ebenen gegen einander geneigt sind, und das Maß der Projektion eines solchen Winkels ist der Bogen des Limbus, welcher zwischen den beiden Ebenen enthalten ist.

Jede einzelne dieser vertikalen Ebenen ist die bereits im §. 25 Zusatz erwähnte Visirebene, sie muß also durch den Mittelpunkt des Limbus gehen, und ist mit der Alhidade unveränderlich verbunden.

Die Visirebene ist durch jene Mittel bestimmt, durch welche eine vertikale Ebene überhaupt bestimmt werden kann, diese sind:

1. zwei nicht in einer vertikalen Linie liegenden Punkte;
2. eine vertikale Linie und ein außerhalb derselben gelegener Punkt;
3. zwei vertikale somit parallele Linien;
4. eine nicht vertikale Linie.

Wird die Visirebene auf die erste Art bestimmt, so sind an den Enden der Alhidade zwei metallene Stifte befestigt, deren Spitzen die zwei erwähnten Punkte darstellen; bei der zweiten und dritten Art dagegen sind an den Enden der Alhidade zwei aus Messingblech verfertigte Aufsätze senkrecht befestigt, ungefähr 4 bis 6 Zoll hoch und 1 Zoll breit; diese Aufsätze heißen Diopter.

Das eine dieser Diopter hat im ersten Falle eine runde Oeffnung, diese höchstens $\frac{1}{2}$ Linie im Durchmesser groß, im zweiten Falle eine auf die Ebene der Alhidade senkrecht stehende enge Spalte und heißt Okulardiopter; das andere hat ebenfalls der Höhe nach etwa eine $\frac{1}{2}$ Zoll breite und 2 bis 4 Zoll hohe Oeffnung, in deren Mitte senkrecht auf die Alhidade ein feiner Faden eingespannt ist, und heißt Objektivdiopter.

Ist also die so bestimmte Visirebene und das anvisirte Signal vertikal, so ist es gleichgiltig, welcher Punkt der Achse des Signals anvisirt wird; somit braucht die Alhidade nur so bewegt zu werden, daß die Visur durch die Mitte des Signals geht.

§. 69. Durch die Diopter kann zwar die Visirebene in die Richtung eines Schenkels gebracht werden, wenn der Mittelpunkt des Limbus im Scheitel des zu messenden Winkels gestellt ist; da aber die Alhidade keine mathematische Linie, sondern ein physischer Körper ist, so muß auf ihr eine Linie angegeben sein, welche den eigentlichen Stand der Alhidade auf dem Limbus anzeigt; diese auf der Alhidade gezogene Linie nennt man den Index, und das Maß eines Winkels ist

jedesmal der Bogen des Limbus, welcher zwischen den beiden Angaben des Index enthalten ist.

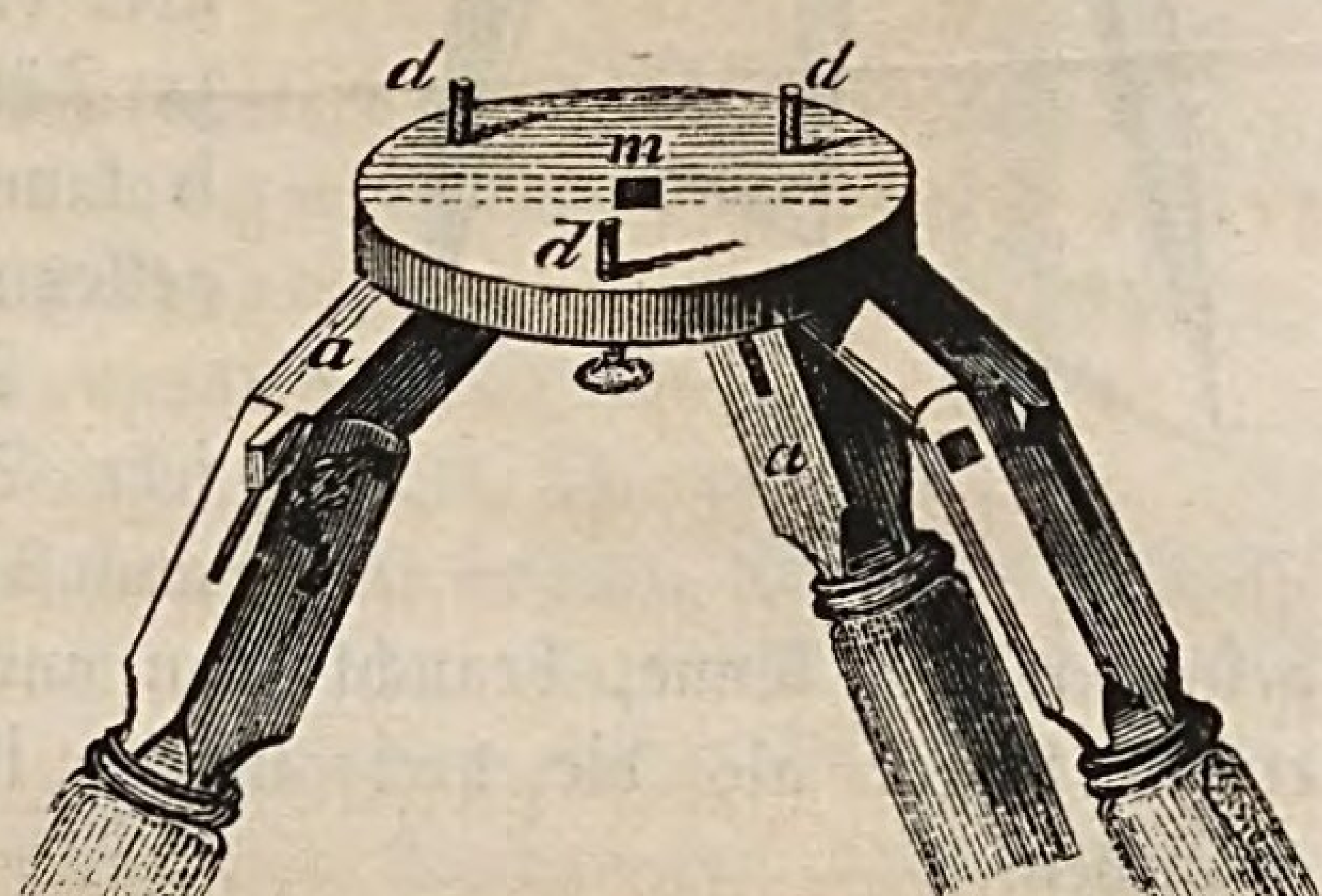
§. 70. Limbus, Alhidade, Diopter und Index, sind Bestandtheile, ohne welche ein Instrument der erwähnten Art nicht bestehen kann, allein außer diesen kommen noch andere Theile vor, welche entweder die Genauigkeit, oder die Bequemlichkeit im Gebrauche zum Zwecke haben.

Eines dieser Erfordernisse ist, daß der Limbus während des Gebrauches eine feste und horizontale Lage habe.

Das erstere wird durch ein Gestelle (Stativ), das letztere gewöhnlich durch Schrauben, welche Stellschrauben, oder ihres Zweckes wegen, obwohl sie in den meisten Fällen vertikal stehen, Horizontal-Schrauben heißen, erreicht. Daß die Stellschrauben unterhalb des Limbus angebracht sein müssen, versteht sich von selbst, sie können jedoch entweder ein Bestandtheil des Statives, oder des Instrumentes sein, was wieder von der Konstruktion der Stative abhängt.

Ein Stativ der ersten Art besteht aus einer hölzernen oder messingenen Scheibe (Kopf), in welcher die drei Stativfüße befestigt sind, die Art der Verbindung der Füße mit dem Stativkopfe ist wieder zweierlei.

Bei den älteren Stativen, welche meistentheils eine hölzerne Scheibe haben, sind in diese, wie die Fig. 61 zeigt, drei kurze, vierkantige, nach auswärts geneigte Stücke eingesetzt, in der Figur mit a bezeichnet, an diesen die Füße mittelst eines Zirkelgewindes beweglich und lassen sich bei jeder Stellung durch starke Flügelmütter b festklemmen, auch können die Füße, um das Stativ bequemer zu transportiren, in der Hälfte ihrer Länge auseinander geschraubt werden.



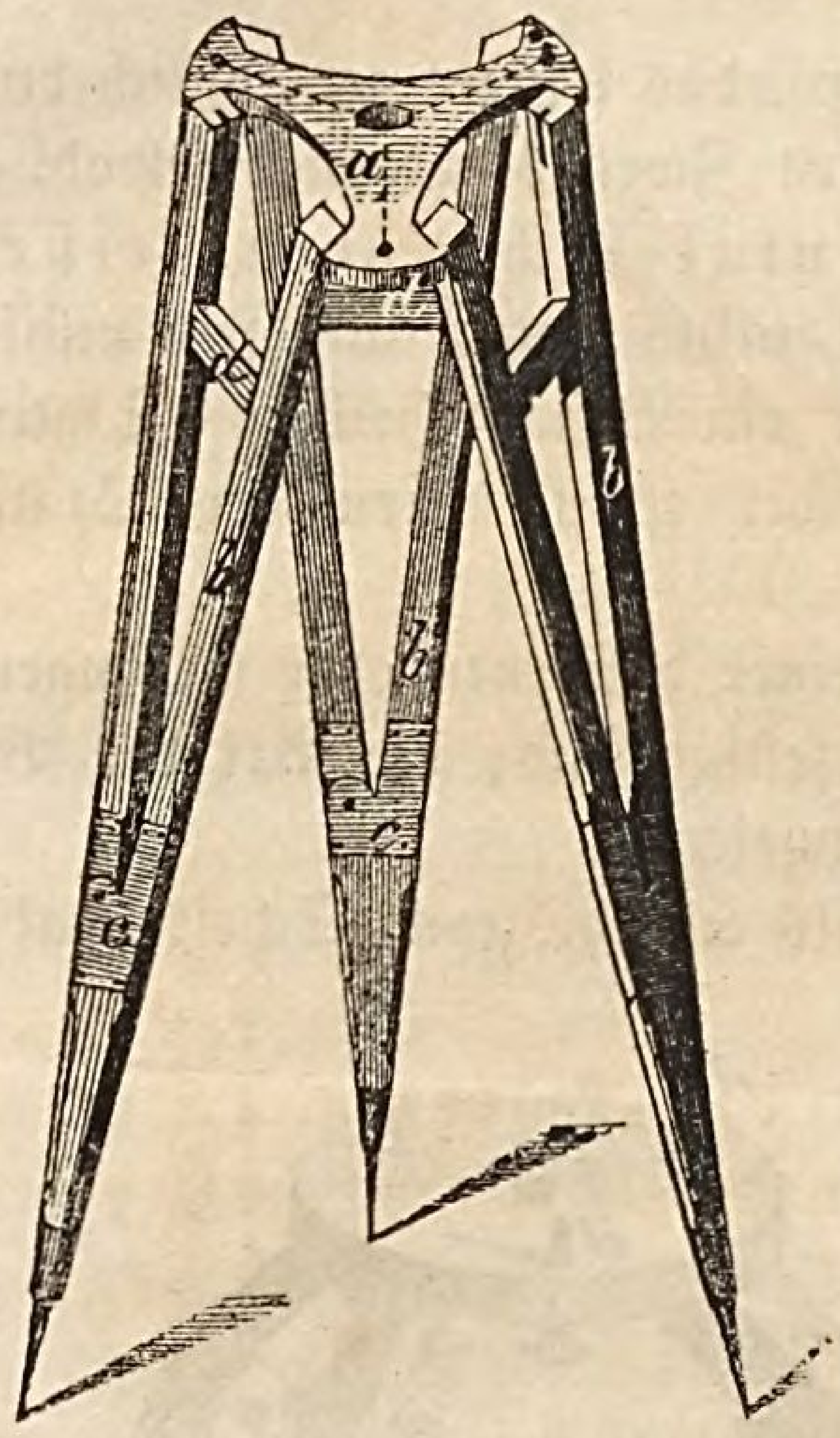
Durch diese Einrichtung wird aber die wesentliche Anforderung, die man an ein Stativ stellen muß, nämlich eine feste Haltung wesentlich beeinträchtigt, weil eine erhöhte Temperatur auf das Holz und die metallenen Gewinde eine entgegengesetzte Wirkung äußert; die so konstruirten Stative schlottern daher bei einer trockenen Luft sehr bald; auch werden durch einen längern Gebrauch die Stücke in den Gewinden bei a ausgerieben, doch diesem Uebelstande kann durch Einlegen von Kartenpapier recht gut abgeholfen werden.

Eine zweite einfachere Konstruktion der Scheibenstative (diese sind jedoch nur bei den Theodoliten anwendbar) ist folgende:

In eine hölzerne Scheibe von 3″ Dicke und 12″ Durchmesser sind drei starke Füße eingesetzt, in der Art wie die Stücke a, Fig. 61 (siehe die obere Zeichnung), also nicht beweglich; damit aber die Scheibe auch bei einem geneigten Boden nahe horizontal gestellt werden könne, ist einer der Füße unten in einer Länge von 12 bis 18 Zoll gebohrt, und kann durch eine in diese Bohrung eingesetzte eiserne Spindel verlängert, diese bei jeder Stellung durch eine Klemmschraube festgestellt werden.

Diese Stative schwanken zwar weniger als die vorher beschriebenen, sind aber unbequem zu transportiren, auch ist bei der Klemmung der Spindel nur die Reibung zweier Metalle in Anspruch genommen, jene somit nicht verläßlich.

Eine neuere Konstruktion dieser Stative (nicht nur für den Theodoliten, sondern für jedes andere Meßinstrument anwendbar) ist in der Fig. 62 dargestellt.

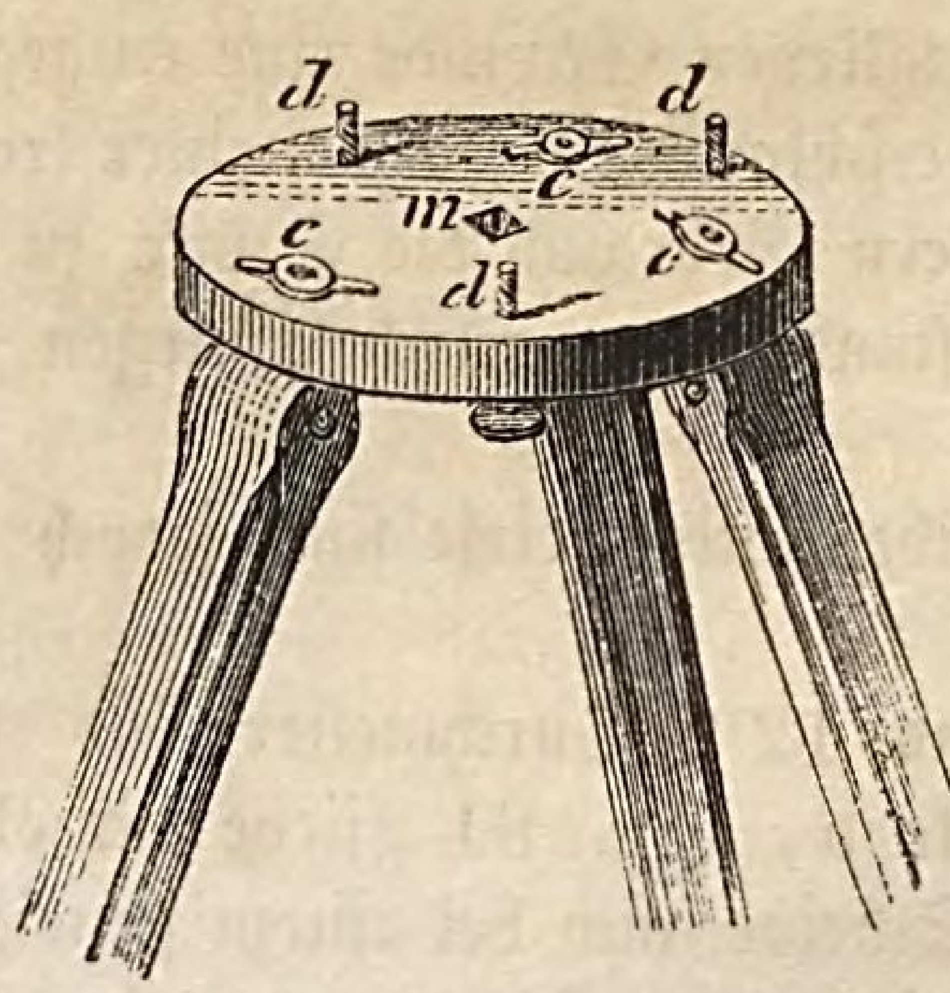


Eine metallene Platte, nach Erforderniß 10 bis 16 Zoll Durchmesser und höchstens 6''' Dicke, ist der Art ausgeschnitten, daß nur drei Arme, in der Figur mit a bezeichnet, übrig bleiben; diese Arme haben zur Verstärkung unterhalb schmale Rippen und am Ende parallel mit der obern Ebene runde Löcher.

Jeder Fuß besteht bis zur Hälfte aus zwei Theilen, die nach Innen der Länge nach Nuthen haben, der eine Theil b ist um das messingene Zirkelgewinde bei c beweglich; die oberen Theile beider Stücke sind mit Messing beschlagen und mit Zapfen versehen, welche in die runden Löcher der Platte genau passen und darin wohl beweglich, aber durch die Querhölzer d, welchen die Nuthen zur Führung dienen, fest erhalten werden; der Theil b kann auch durch eine Schraubenmutter bei c geklemmt werden.

Die Stative sind leicht transportabel und jede Schwenkung ist beseitigt; damit die Platte auch bei einem geneigten Boden mehr horizontal gestellt werden könne, braucht man nur einen Fuß anfertigen zu lassen, welcher etwas kürzer als die drei andern ist, die Auswechslung ist augenblicklich geschehen.

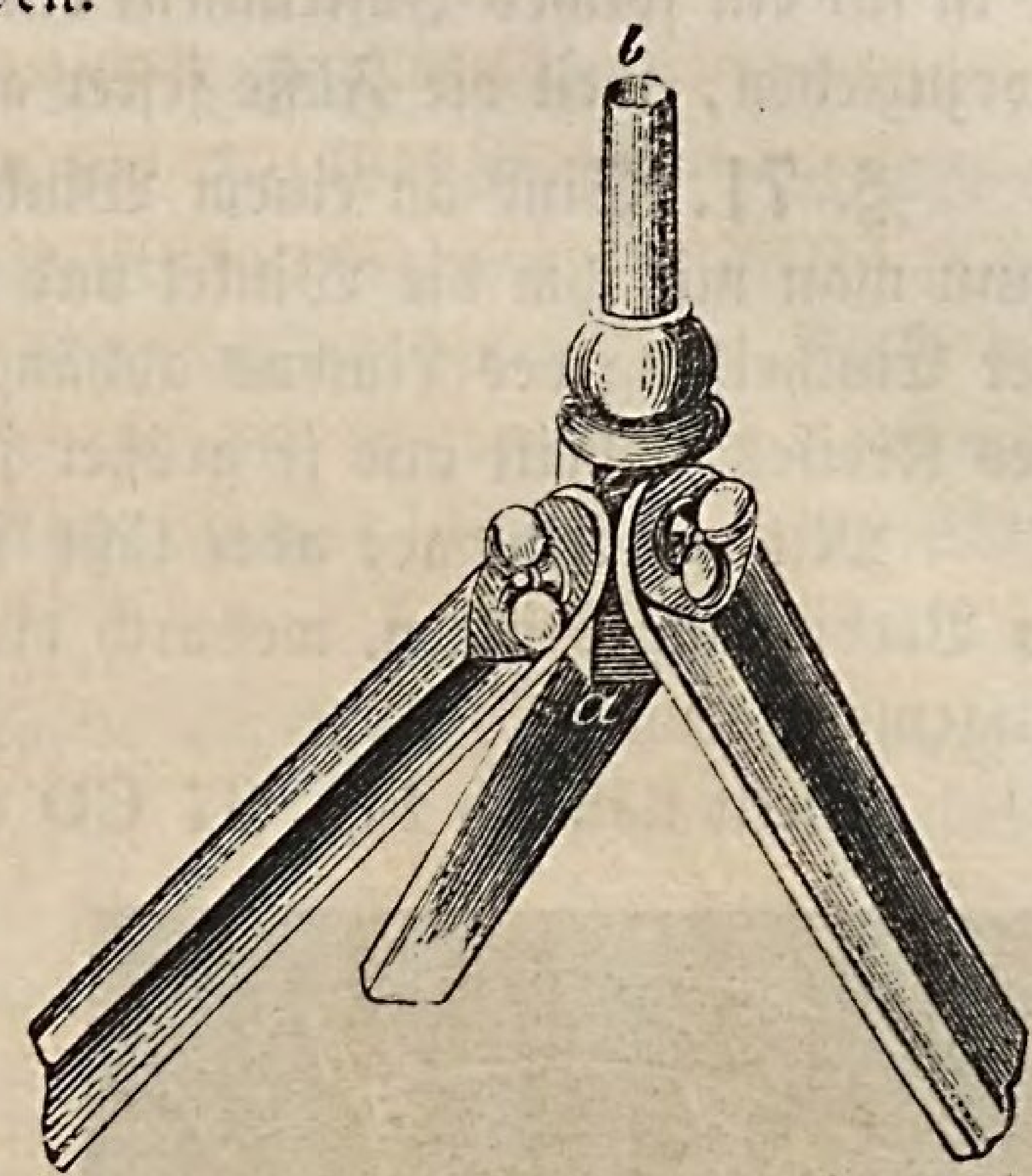
Der berühmte Reichenbach hat den zuerst beschriebenen Stativen eine einfachere und gefälligere Form gegeben; bei den Reichenbach'schen Stativen werden, wie die Fig. 63 zeigt, die Füße unmittelbar in den Vertiefungen des Kopfes durch die Flügelmutter c festgehalten, und lassen sich ohne die Mutter zu lüften, beliebig auseinander stellen.



Bei den Scheibenstativen haben die Schrauben zur horizontalen Stellung des Limbus (in der Fig. 61 und 63 mit d bezeichnet) ihre Mutter in der Scheibe zwischen den Stativfüßen, diese Schrauben gehören also zum Stativ. Der Limbus hat unterhalb eine, durch seine Mitte gehende Schraube, Mittelschraube, die Spindel wird durch die Oeffnung m des Scheibenstativs gesteckt und auf diese Art der Limbus mittelst einer Flügelmutter entweder unmittelbar oder mittelbar, d. h. sammt den dazwischen liegenden Theilen, an die drei Stellschrauben angepreßt. Läßt man die Flügelmutter der Mittelschraube nach, so kann durch

die Drehung der Stellschrauben der Limbus horizontal, und ist dies geschehen, mittelst der Flügelmutter wieder festgestellt werden.

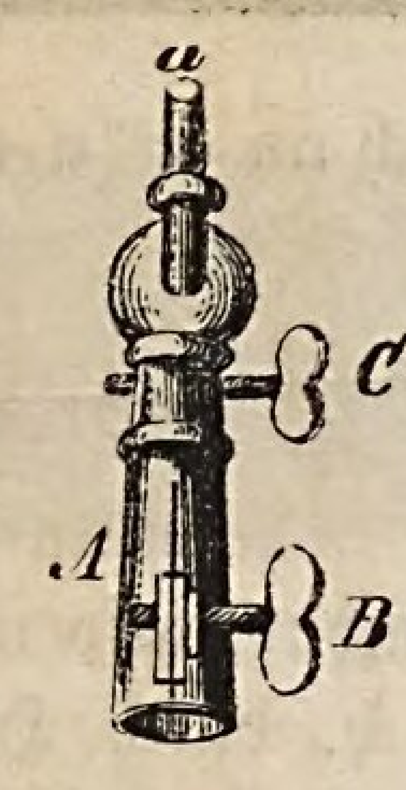
Die Stative der zweiten Art sind die sogenannten Zapfenstative.



Wie die Fig. 64 zeigt, werden bei diesen Stativen die Füße mittelst starker Flügelmutter an ein dreiseitiges Prisma a angeklemmt, sobald sie die erforderliche Lage haben.

Das Prisma endet in einem abgestutzten Kegel oder Zapfen b, und das Instrument wird sammt den Stellschrauben auf diesem aufgesetzt.

Zu diesem Zwecke hat jedes Instrument, welches auf ein Zapfenstativ gestellt wird, unterhalb des Limbus ein Hülse A, Fig. 65, diese wird durch die Klemmschraube B an den Zapfen des Stativs angepreßt und auf diese Art das Instrument gehalten.

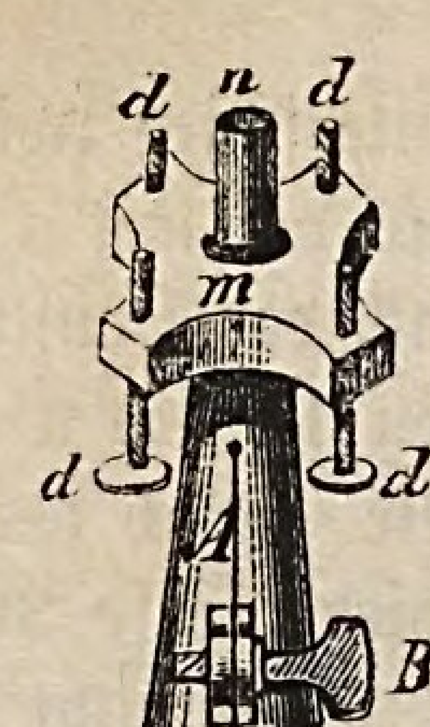


Manche Instrumente von minderer Genauigkeit werden nur auf einem Stocke gehalten.

Die Verbindung des Limbus mit der Hülse und die Art, den Limbus horizontal zu stellen, ist bei den Instrumenten wieder verschieden.

Die erste Art ist aus dieser Figur ersichtlich; die Hülse A endet in eine messingene Kugelfläche, in dieser befindet sich eine Kugel (Nuß), die mit dem Zapfen a aus einem Stücke besteht. Wird die Klemmschraube C nachgelassen, so kann die Nuß, also auch der Zapfen a bewegt, somit der letztere vertikal gestellt und in dieser Lage durch dieselbe Schraube an die Kugelschale angepreßt, also festgestellt werden. Der Limbus hat unterhalb senkrecht auf seine Ebene, eine dem Zapfen a entsprechende Vertiefung, mit dieser sitzt er auf jenem, und da der Zapfen vertikal gestellt wurde, so ist die Ebene des Limbus horizontal.

Die zweite Art der Verbindung des Limbus mit der Hülse ist in der Fig. 66 dargestellt; die Hülse A endet oben in einen kurzen Cylinder, der mit der Platte m aus einem Stücke ist, in jenem liegt die Nuß, ihr Zapfen n geht durch die Oeffnung der Platte m und hat darin einen kleinen Spielraum; an den Zapfen n ist der Limbus festgeschraubt und kann somit durch die vier gegenüberstehenden Schrauben d beliebig geneigt, also auch horizontal, zugleich aber festgestellt werden; daher müssen stets alle vier Stellschrauben an den Limbus genau anstehen.



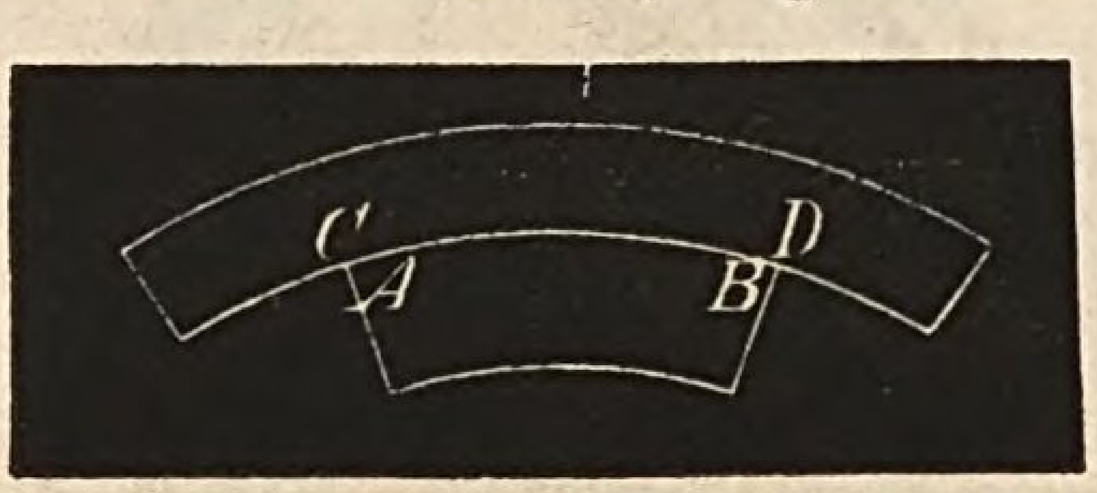
Um den Limbus horizontal zu stellen, wird die eine der Schrauben d nach der einen Seite und die gegenüber gelegene nach der entgegengesetzten Seite gedreht, bis der eine Durchmesser horizontal ist, hierauf werden die beiden andern Schrauben angewendet, und sind auf diese Art je zwei Durchmesser horizontal, so ist es die Ebene des Limbus selbst.

Hat der Limbus keine bedeutende Ausdehnung und auch kein großes Gewicht, so ist für ein solches Instrument ein Zapfenstativ den andern auch aus dem Grunde vorzuziehen, weil die Füße fester an das Prisma angepreßt werden können.

§. 71. Sind an einem Winkelinstrumente die besprochenen Bestandtheile, so kann man mit ihm die Winkel und zwar mit einer Genauigkeit messen, welche von der Eintheilung des Limbus abhängig ist, d. h. in je mehr Theile die Peripherie des Kreises getheilt und je größer jeder einzelne Theil selbst ist.

Mit der Alhidade aber läßt sich sehr leicht der in §. 60 erklärte Nonius in Verbindung bringen, wodurch die Genauigkeit bei der Ablösung der Bogengrade ungemein gewinnt.

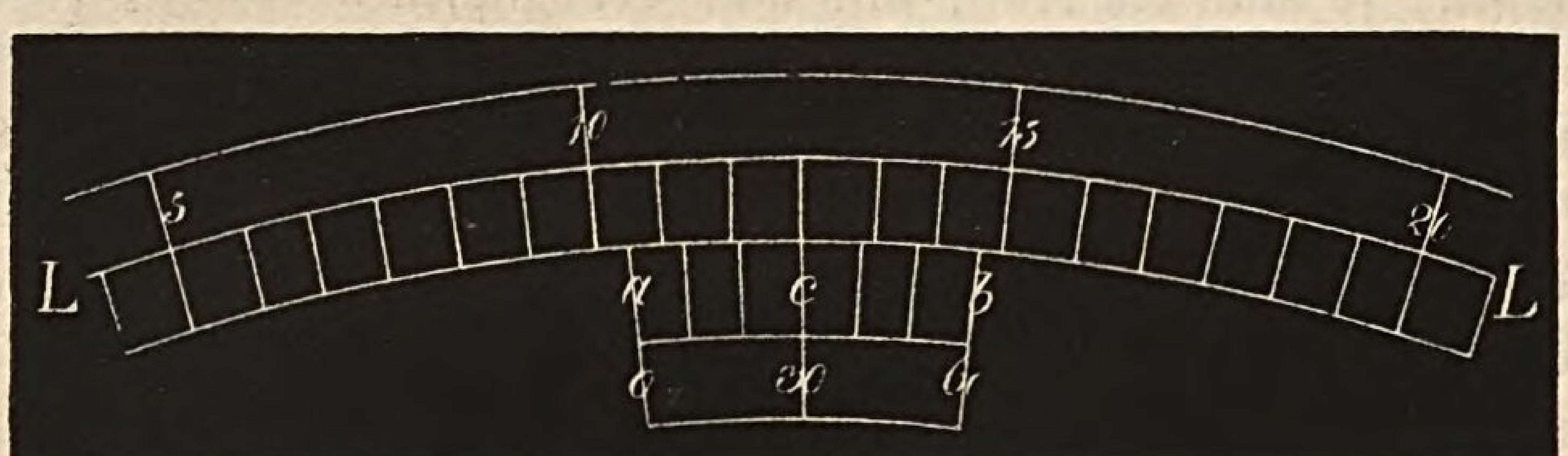
Stellt nämlich Fig. 67 CD einen Bogen des Limbus, welcher in n gleiche Theile getheilt ist und a den Werth eines Theiles vor, so ist $CD = na$; ist ferner AB mit CD konzentrisch und gleich, aber in $(n+1)$ Theile getheilt, der Werth eines solchen Theiles b, so ist $AB = (n+1)b$, somit weil $AB = CD$ ist,



auch $na = (n+1)b$ und $b = \frac{na}{n+1}$; setzen wir den Unterschied $a - b = d$, so ist

$$d = \frac{a}{n+1} \ldots 1).$$

Nehmen wir z. B. an, $CD = 5$ Theilen eines in ganze Grade getheilten Limbus, also $n = 5$, $a = 1^0 = 60$ Minuten, so ist Gleich. 1) $d = 10$ Minuten, d. h. durch Hülfe des Nonius kann man an einem Limbus, der nur in ganze Grade getheilt ist, bei dieser Anordnung die Winkel schon bis auf 10 Minuten ablesen. Die Konstruktion dieses Nonius stellt Fig. 68 vor; LL ist ein Stück des in Grade abgetheilten Limbus, die Länge von 5 Graden ist auf dem Nonius ab aufgetragen, aber in 6 gleiche Theile getheilt, daher der



Unterschied zwischen einem Intervalle des Limbus und Nonius 10 Minuten. Ist nun der mit a bezeichnete Strich zugleich der Index der Alhidade, so zeigt dieser nach der Konstruktion 10 ganze Grade mehr der Anzahl Minuten, die dem Bogen von 10 bis a entsprechen, dieser Bogen beträgt aber, da der dritte mit c bezeichnete Strich des Nonius mit einem Striche des Limbus übereintrifft, drei Unterschiede, also 30 Minuten, der abgelesene Stand des Index ist demnach $10^0\ 30'$.

Stimmt der mit a bezeichnete Strich des Nonius mit einem Strich des Limbus, z. B. mit dem zweiten zwischen 10 und 15 überein, so ist der Stand der Alhidade bei dieser Anordnung 12 Grade und keine Minuten, deshalb ist auf den mit a bezeichneten Strich unten Null geschrieben.

Wird der Nonius nach rechts geschoben und der nächste an a liegende Strich mit dem dritten zwischen 10 und 15 liegenden des Limbus zum Uebereinstimmen

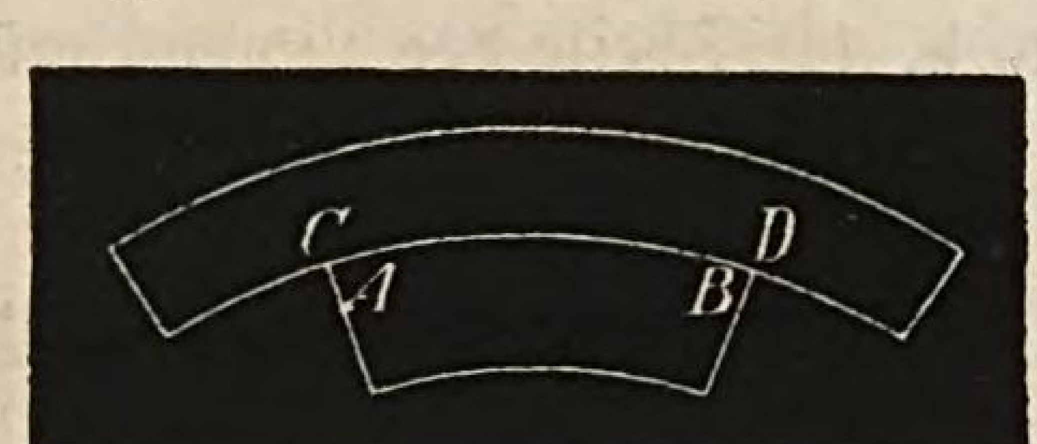
gebracht, so ist der Stand der Alhidade 12 Grade mehr einer Differenz, also $= 12^0\ 10'$.

Liegt der zweite Strich des Nonius mit dem vierten zwischen 10 und 15 liegenden Striche in einer geraden Linie, so ist der Stand $12^0\ 20'$; und stimmt der 3. Strich des Nonius mit einem Striche des Limbus überein, so ist bei dieser Anordnung der Bogen von dem letzten Striche des Limbus bis zu dem Index des Nonius 30 Minuten, daher sind auf diesem die 30 Minuten aufgeschrieben, wodurch das Zählen, der wievielte Strich des Nonius übereinstimmt, überflüssig wird.

Wäre ein Limbus von 20 zu 20 Minuten abgetheilt, und hätte man 9 solche Intervalle auf dem Nonius aufgetragen und in 10 gleiche Theile getheilt, so wäre in diesem Falle $a = 20$, $n = 9$ und $d = 2$ Minuten, mit einem solchen Nonius könnte man die Winkel bis auf 2 Minuten genau ablesen.

Die bisher beschriebene Art des Nonius kommt bei den meisten Winkelinstrumenten vor, und ein so konstruirter Nonius heißt ein nachtragender.

Man sieht aber leicht ein, daß die Linie CD, Fig. 67, wieder in n, die AB dagegen in (n—1) gleiche Theile hätte getheilt werden können, wo sodann, wenn wieder $b - n = d$ gesetzt wird, aus der Gleich. $an = b(n - 1)$



$$d = \frac{a}{n+1} \ldots\ldots\ 2)\ \text{folgt.}$$

Ein so konstruirter Nonius heißt ein vortragender, das Ablesen ist wie bei dem nachtragenden.

Z. B. Ein Limbus ist in ganze Grade getheilt, 7 Grade desselben sind 6 Theilen des Nonius gleich, so ist $a = 60$ Minuten, $n = 7$ und d aus der Gleichung 2) gleich 10 Minuten.

Hat der Geometer mit einem Winkelinstrumente zu operiren, an dem ein Nonius vorkommt, so muß er vorerst den aliquoten Theil des Grades ausmitteln, welchen er mittelst des Nonius unmittelbar ablesen kann, und dies kann er auf folgende Art:

Man stelle den Nonius so, daß sein Nullpunkt mit einem Striche, am besten mit einem ganzen Gradstriche des Limbus genau übereinstimmt, so wird, wenn der Nonius fleißig gearbeitet ist, der letzte Strich desselben abermals mit einem Striche des Limbus in einer geraden Linie liegen; nun zähle man die Anzahl Intervalle des Limbus, die zwischen den äußersten Strichen des Nonius enthalten sind, so erhält man hierdurch die Zahl n; hierauf sehe man nach, wie viel Minuten das kleinste Intervall des Limbus vorstellt, diese Anzahl ist $= a$, endlich beurtheile man, ob die Theile des Nonius kleiner oder größer sind, als die des Limbus, so kann man den Werth von d im ersten Falle nach der Gleichung 1), im zweiten nach 2) berechnen.

Z. B. An einem Instrumente ist ein nachtragender Nonius, der Limbus von 10 zu 10 Minuten getheilt, und 59 Intervalle desselben sind gleich 60 Theilen am Nonius, so folgt nach der Gleichung 1), daß man unmittelbar 10 Sekunden ablesen kann.

Man erkennt auf den ersten Blick, ob ein Nonius ein nachtragender oder vortragender ist, denn beim ersten sind, wie gesagt, die Intervalle kleiner, beim letztern größer, als die einzelnen Intervalle des Limbus, ferner ist bei dem nachtragenden die Bezeichnung der Minuten oder Sekunden auf dem Nonius nach derselben Seite wie bei dem Limbus, sind also die Grade des letzteren nach der rechten Seite hin mit fortlaufenden Zahlen bezeichnet, so sind es auch die Differenzen des Nonius, bei vortragenden dagegen ist die Bezeichnung des Limbus jener des Nonius entgegengesetzt.

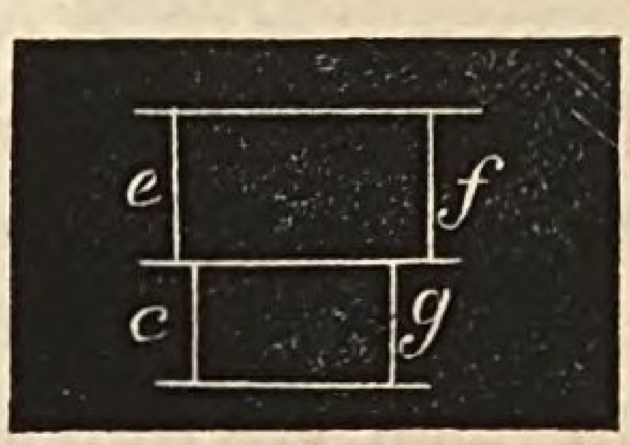
Will der Geometer zu einer vorhandenen Eintheilung des Limbus einen nach- oder vortragenden Nonius anfertigen lassen, mittelst welchen eine festgesetzte Differenz angezeigt wird, so ist a und d bekannt, man kann somit aus der Gleichung 1) oder 2) das n, also die Anzahl Intervalle des Limbus bestimmen, die zu nehmen und auf dem Nonius entweder in ein Theil mehr oder weniger zu theilen sind.

Z. B. Zu einem Limbus, an dem jeder Grad wieder in drei Theile getheilt ist, soll ein nachtragender Nonius konstruirt werden, mittelst dessen die einzelnen Minuten abgelesen werden können, so ist $a = 20$, $d = 1$ und aus 1) $n = 19$; d. h. 19 Theile des Limbus müssen 20 Theilen des Nonius gleich sein.

Zusatz. Für Anfänger in der praktischen Geometrie ist noch Folgendes zu bemerken:

1. an manchen Instrumenten sind die Intervalle des Limbus nach beiden Richtungen numerirt, an solchen Instrumenten kommen zwei Nonien nebeneinander vor, diese haben den Index gewöhnlich gemeinschaftlich, und der eine Nonius liegt links, der andere rechts von dem Index, es sind aber beide von derselben Art;
2. von den Künstlern, welche dergleichen Meßinstrumente anfertigen, werden manchmal sowohl vor dem Index, als am Ende des Nonius einige Intervalle mehr aufgetragen, diese Theile, sogenannte Excedenz, haben aber sich keine Bezeichnung, so daß als die eigentliche Anzahl Striche des Nonius jene zu nehmen sind, die von Null angefangen bis zu jenem enthalten sind, bei welchem die höchste Zahl der Bezeichnung steht.

Es kann geschehen, daß bei einem bestimmten Standpunkte der Alhidade streng genommen kein Strich des Nonius mit einem des Limbus in einer geraden Linie liegt. Um nun auch in diesem Falle ein Mittel an die Hand zu geben, den Winkel richtig abzulesen, sei, Fig. 69, c jener Strich des Nonius, der dem Striche e des Limbus am nächsten steht, mit ihm jedoch nicht scharf in einer geraden Linie liegt; der nächstfolgende Strich des Nonius ist g, des Limbus f.



Wird der Abstand zwischen e und c mit x, zwischen g und f mit y, der Werth eines Intervalles am Nonius mit b, am Limbus mit a bezeichnet, so ist $x + b + y = a$.

Nun schätze man das Verhältniß der Abstände ec und gf, wobei man ec als die Einheit annimmt; findet man $x : y = 1 : r$, so ist $y = rx$, daher aus dieser und der obigen Gleichung $x = \frac{a-b}{r+1}$, und wenn man statt $a-b = d = \frac{a}{n+1}$ substituirt

$$x = \frac{a}{(n+1(r+1)} \;.\;.\;.\;.\; 3).$$

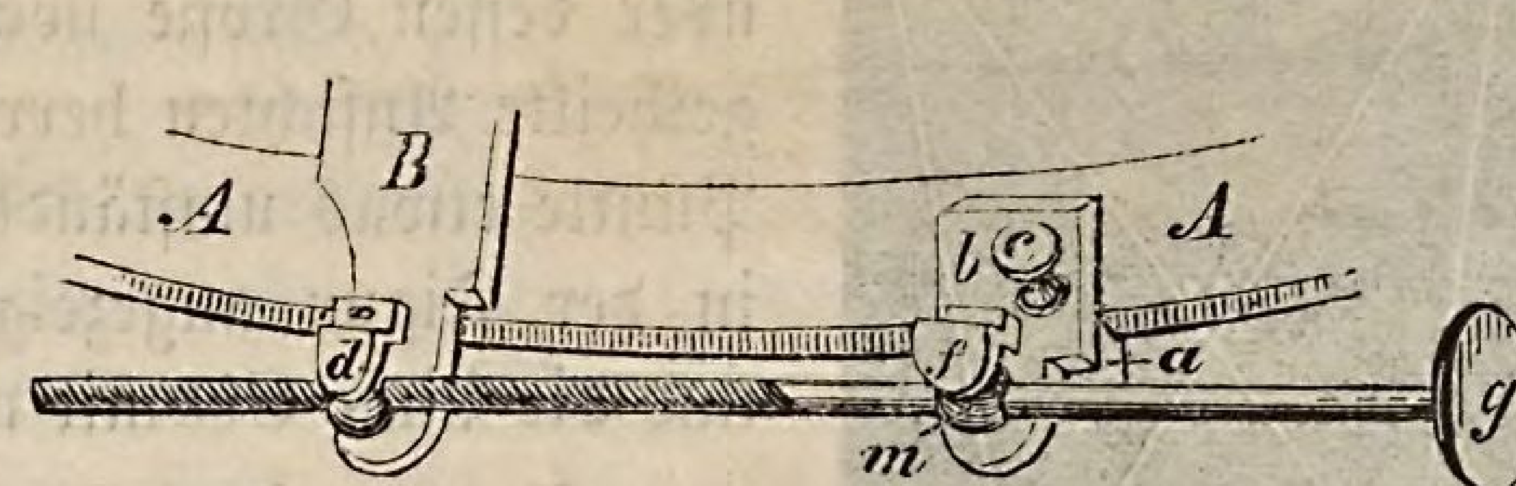
Dabei ist noch zu berücksichtigen, ob das x additiv oder subtraktiv zu nehmen ist.

z. B. Bei einem Instrumente ist jeder Grad am Limbus in drei gleiche Theile getheilt, der Nonius gibt einzelne Minute, doch kein Strich des Nonius stimmt mit einem des Limbus überein, das Verhältniß zwischen den zwei zunächst übereinstimmenden Strichen sei 1 : 5, so ist a = 20, n = 19, r = 5, daher nach der Gleichung 3) x = 10 Sekunden.

§. 72. Wenn auch die Alhidade mit dem größten Fleiße in den einen Schenkel des Winkels einvisirt worden ist, so muß man doch besorgen, daß sie durch irgend einen Umstand aus ihrer Lage verrückt wurde, bevor noch ihr Stand auf dem Limbus abgelesen worden ist.

Dieser Besorgniß überhoben zu sein, hat man ein Mittel erdacht, mittelst welchem die Alhidade bei jedem beliebigen Stande an den Limbus befestigt, also geklemmt werden kann; die hiezu bestimmte Schraube heißt die Klemmschraube. Allein während der Klemmung selbst kann die Alhidade eine, wenn auch kleine Verrückung erlitten haben, so daß die Visirebene nicht scharf durch die Achse des anvisirten Signals geht, daher muß die Alhidade wohl an den Limbus angeklemmt, aber auch dann noch eine kleine Bewegung erhalten können; dieses letztere erreicht man durch eine zweite sogenannte Mikrometer-Schraube.

Die Anordnung der Klemm- und Mikrometer-Schraube zeigt die Fig. 70, a und b sind zwei messingene Stücke (Backen), welche sich bei der Bewegung der Alhidade auf dem Limbus AA schleifen, aber bei jedem Stande der ersten durch die Schraube c an einander oder eigentlich an den Limbus angepreßt werden können; B ist ein Stück, welches mit der Alhidade in Verbindung steht. Die Mutter für die Mikrometer-Schraube g liegt zwischen dem Aufsatze d und dem Arme B, wird aber so gehalten, daß sie sich nur um eine vertikale Achse drehen kann; einen zweiten Unterstützungspunkt hat die Schraubenspindel an der mit ihr verbundenen Kugel m, die in kleinen Kugelschalen zwischen dem Aufsatze f und dem Backen b liegt, die Mikrometer-Schraube hat somit wohl eine drehende, aber keine fortschreitende Bewegung. Sind also die Backen an den Limbus angeklemmt, so kann die Alhidade eine kleine Bewegung durch die Mikrometer-Schraube erhalten.



Untersuchung der Fehlerquellen bei der Winkelmessung.

§. 73. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir vorausgesetzt, daß bei der Messung eines Winkels

1. der Mittelpunkt des Limbus genau in den Scheitel des zu messenden Winkels gestellt werde;

2. die Alhidade sich um den Mittelpunkt des Kreises bewege, von welchem der Limbus eingetheilt worden ist;

3. der Limbus horizontal gestellt sei für den Fall, als die horizontale Projektion eines Winkels gesucht wird;

4. die Visirebene senkrecht auf die Ebene des Limbus stehe;

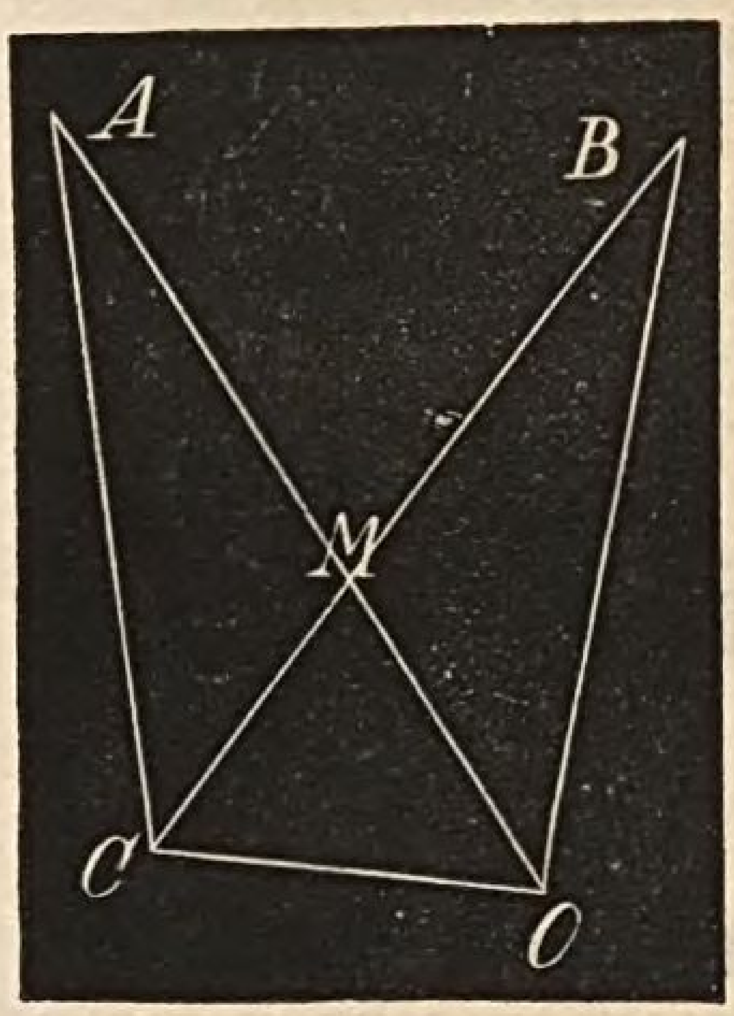
5. die Visirebene durch den Mittelpunkt des Limbus gehe;
6. jedes Signal vertikal gestellt;
7. die Visirebene eine mathematische Ebene sei, und
8. scharf auf die Achse des Signals einvisirt wurde.

Diese Voraussetzungen werden in der Praxis fast gar nie mit einer absoluten Genauigkeit eintreffen; es entsteht daher die Frage: welchen Einfluß hat das nicht genaue Eintreffen eines dieser Punkte auf die Schärfe der Messung?

Fehler wegen der excentrischen Aufstellung des Instrumentes.

§. 74. Wenn der Mittelpunkt des Limbus genau in den Scheitel des zu messenden Winkels gestellt ist, so sagt man das Instrument ist centrisch, findet das Gegentheil statt, so sagt man dasselbe ist excentrisch aufgestellt.

Es sei Fig. 71 C der Scheitel des zu messenden Winkels ACB; das Instrument aber in O aufgestellt, daher statt ACB der Winkel AOB gemessen worden; wenn nun beide als gleich groß angenommen werden, so begeht man einen Fehler, und weil über dessen Größe noch mehr aber über dessen Einfluß so getheilte Ansichten herrschen, so wollen wir diese beiden Punkte etwas umständlicher untersuchen, dabei vorerst den in der Figur angezeigten Standpunkt im Auge behalten, und die Linie CO mit wenigen Ausnahmen klein annehmen.



Setzen wir AC = a, BC = b, AOB = β, CO = E, AOC = γ als gegeben, den gesuchten Winkel ACB = α, den Fehler = x, so ist offenbar

$$\alpha - \beta = x \; . \; . \; . \; . \; . \; 1).$$

Die Größe E heißt die Excentricität der Aufstellung, γ der Direktionswinkel und x die Reduktion auf das Centrum; γ wird stets von der Excentricität nach der rechten Seite (von O gegen C gesehen) bis zu dem linken Schenkel des gemessenen Winkels gerechnet.

Aus dem Dreiecke AOC findet man $\sin. A = \frac{E \sin. \gamma}{a}$, da aber dieser Winkel in den meisten Fällen sehr klein ist, so kann man den Sinus mit dem Bogen verwechseln und $A = \frac{E \sin. \gamma}{a}$ setzen.

In dem Dreiecke BOC findet man $\sin. B = \frac{E \sin. (\beta + \gamma)}{b}$ oder aus dem eben angeführten Grunde $B = \frac{E \sin. (\beta + \gamma)}{b}$.

Wegen der Gleichheit der Winkel AMC und BMO ist $\alpha + A = \beta + B$, daher $\alpha - \beta = B - A$, somit der gesuchte Unterschied

$$x = \alpha - \beta = B - A = \; . \; . \; . \; . \; 2).$$

Werden für B und A die oben gefundenen Werthe substituirt, und x in Sekunden ausgedrückt, so ist

$$x'' = \frac{E}{\sin. 1''}\left\{\frac{\sin.(\beta+\gamma)}{b} - \frac{\sin.\gamma}{a}\right\} \ldots . 3).$$

Aus dieser Gleichung folgt:

1. der Fehler ist Null, wenn entweder E oder $\frac{\sin.(\beta+\gamma)}{b} - \frac{\sin.\gamma}{a}$, somit B—A Null wird, und dieser Fall tritt ein, wenn der Standpunkt O in der Peripherie des durch die Punkte ABC bestimmten Kreises liegt, dann sind A und B Peripheriewinkel auf der Sehne OC, somit einander gleich. Der Abstand E hat in diesem Falle auf die Größe des Fehlers keinen Einfluß.

2. Der Fehler wird desto kleiner, je kleiner E oder je weiter die beiden anvisirten Signale sind, weil ein Wachsen der Werthe a und b eine Abnahme in A und B bei übrigens gleichen Umständen zur Folge hat. Bei hinreichend großen a und b werden A und B nahe gleich Null, somit hat ihre Summe und ihr Unterschied die Null zur Grenze.

Diese Abnahme findet desto rascher statt, je mehr die Werthe a und b einander gleich sind, denn unter der Voraussetzung a = b wird in 3, wenn man die Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner stellt, $x = \frac{E}{\sin. 1''}\left\{\frac{\sin.(\beta+\gamma) - \sin.\gamma}{a}\right\}$ ist also, weil β und γ unveränderlich vorausgesetzt werden, im Zähler konstant, während nach dem Gesagten der Nenner ohne Ende als wachsend gedacht wird; es wird somit x schneller abnehmen, als wenn auch im Zähler zunehmende Größen als Faktoren vorkommen, was in dem Falle geschieht, als a von b verschieden gedacht und die Brüche in 3) auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden.

Wir wollen das Gesagte durch einige Beispiele erläutern.

1. Beispiel. Es sei a = 500, b = 10, E = $\frac{1}{12}$ Klafter, β = 73° 29′ γ = 30° 16′, mit diesen Zahlen findet man x = 27′ 32″3.

Diese Daten von a und b sind wohl ungewöhnlich aber nicht unmöglich und können bei dem Meßtische in dem Fall sehr leicht eintreffen, wenn man im Punkte C steht, den Tisch nach A orientirt und B rayonirt hat; trägt man noch, wie es üblich ist, diese kurze Distanz auf den gezogenen Rayon auf, so ist B um 27′32″3 fehlerhaft bestimmt. Ob dieser Fehler viel oder wenig beträgt, werden wir später untersuchen.

Lassen wir x = 10″, β, γ, a und b die obigen Werthe bedeuten, so ist E = 0·04 Zoll, d. h. der Limbus müßte bis auf 0·04 Zoll centrisch gestellt sein, wenn der Unterschied zwischen dem gemessenen und gesuchten Winkel nur 10″ betragen sollte. Eine so genaue Einstellung ist kaum zu erreichen.

Wird a = b = 500 Klafter angenommen, die Größe der übrigen beibehalten, so ist x = 20″2.

2. Beispiel. Wenn beide Signale gleich weit entfernt sind, wie groß müßte diese Entfernung sein, damit bei den obigen Werthen E = $\frac{1}{12}$, β = 73° 29, γ = 30° 16, der Fehler nur 1″ betrage.

Mit diesen Daten findet man a = 8032·7 Klafter, also nahe zwei Meilen; da nun jeder Limbus mit Leichtigkeit bis auf 6 Zoll centrisch gestellt werden kann, so sieht man aus diesem Beispiele, daß eine Excentricität von 6 Zoll bei

Entfernungen der Signale über zwei Meilen keinen merklichen Fehler verursacht, allein so große Entfernungen kommen selten vor.

Bei der graphischen Triangulirung einer Quadratmeile kann man also eine größere Excentricität zulassen als bei der Aufstellung des Meßtisches zu der Detailaufnahme.

3. Beispiel. Ist $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$, $a = 800$, $b = 4000$, $E = 4$ Klafter, so ist die Reduktion auf das Centrum $= -15'28''2$.

§. 75. Wir haben bisher die Umstände erörtert, unter welchen der Fehler entweder Null oder doch sehr klein ausfällt; suchen wir nun die Umstände auf, bei welchen das Maximum eintritt.

Es braucht wohl nicht erst bemerkt zu werden, daß es sich in diesem Abschnitte nicht darum handelt, die Größe des bei irgend einer Messung zu befürchtenden Fehlers etwa durch eine Rechnung auszumitteln und zu beseitigen; solche Untersuchungen über die Maxima haben einzig den Zweck, den größten Werth den ein Fehler erreichen und die Umstände bei welchen er ihn erreichen kann, kennen zu lernen, damit man in der Praxis bei ähnlichen Fällen seine Aufmerksamkeit verdoppelt, denn schon in der Nähe des durch die Rechnung erhaltenen Maximum tritt der Fehler nahe mit seinem größten Werthe auf.

Hinsichtlich der Größen a und b wird x ein Größtes, wenn eine dieser Größen Null wird, da dieß in der Praxis jedoch nicht vorkommen kann, so folgt nur daraus, daß der Fehler desto größer wird, je größer der Unterschied in den Entfernungen der anvisirten Signale ist.

Zur Verminderung dieses Fehlers ergibt sich hieraus die Regel, bei Triangulirungen die Signale wo möglich der Art zu stellen, daß je drei ein gleichseitiges Dreieck bilden, und von einem Standpunkte nur die Winkel zwischen den gleichweit entfernten Signalen zu messen.

Die Größe x hängt ferner von den Winkeln β und γ ab; lassen wir nun E, a, b konstant sein, und differenziren die Gleichung 3) einmal in Bezug auf β, das andere Mal nach γ, so finden wir $\frac{dx}{d\beta} = \frac{E \cos. (\beta + \gamma)}{b \sin. 1''} = 0$, somit $\cos. (\beta + \gamma) = 0$, daher ist $\beta + \gamma = 90^0$, oder $\beta + \gamma = 270$, ferner ist

$$\frac{dx}{d\gamma} = \frac{E}{\sin. 1''} \left\{ \frac{\cos. (\beta + \gamma)}{b} - \frac{\cos. \gamma}{a} \right\} = 0 \;.\;.\;.\;. \;4),$$

also $\frac{\cos. (\beta + \gamma)}{b} - \frac{\cos. \gamma}{a} = 0$, und weil nach dem Vorhergehenden $\cos. (\beta + \gamma) = 0$ ist, so folgt, daß auch $\cos. \gamma = 0$, daher $\gamma = 90^0$ oder $\gamma = 270^0$ ist.

Aus der Kombination der Werthe γ und β ergeben sich nur zwei unterschiedliche Fälle, bei welchen x ein Größtes wird, nämlich $\gamma = 90$ und $\beta = 0$, oder $\gamma = 90$ und $\beta = 180^0$, also bei der Messung sehr spitzer oder sehr stumpfer Winkel.

Die Formel 3) übergeht in

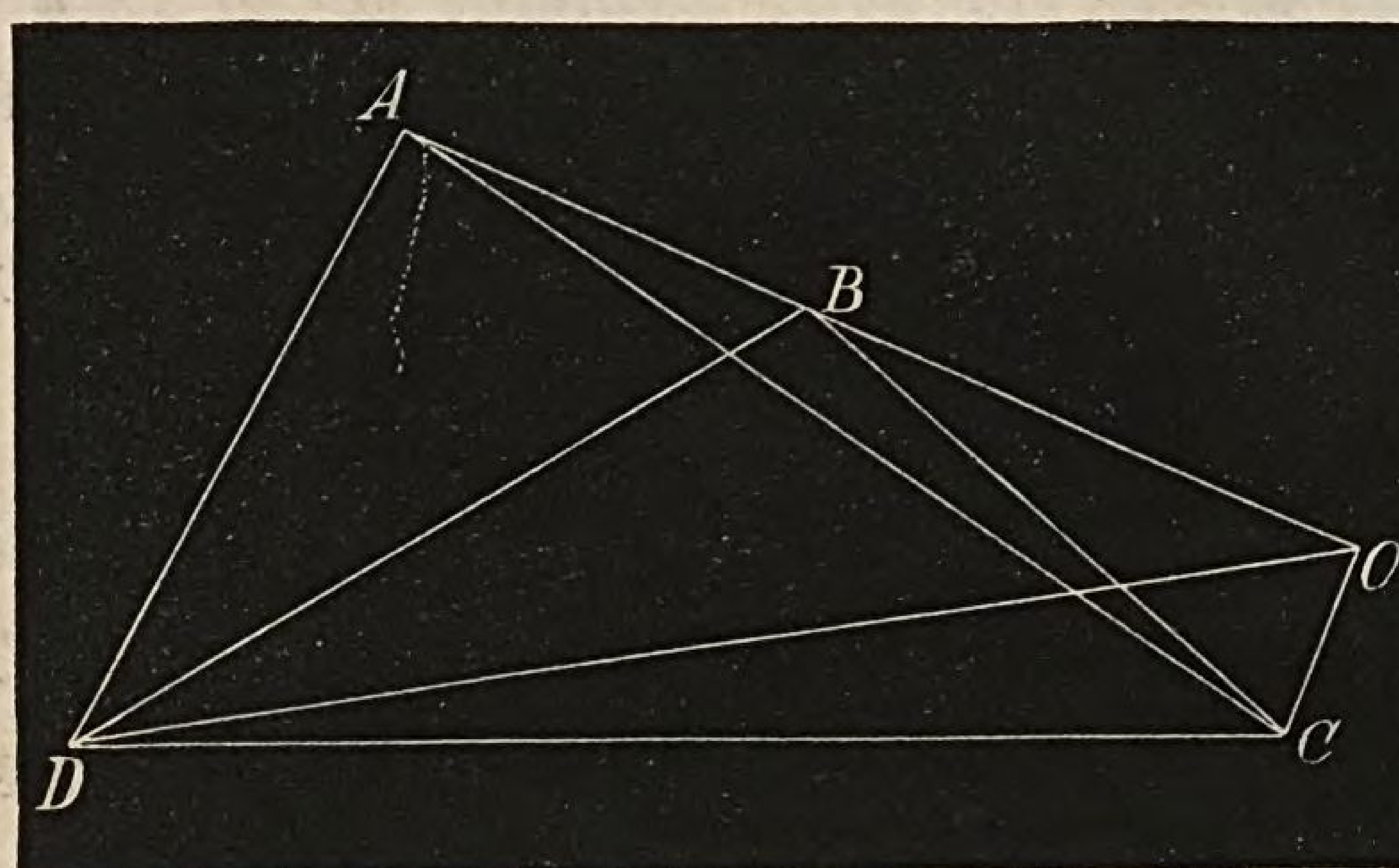
$$x'' = \frac{E\,(a - b)}{ab \sin. 1''} \text{ oder } x'' = -\frac{E\,(a + b}{ab \sin. 1''} \;.\;.\;.\;. \;5),$$

je nachdem $\beta = 0$ oder $\beta = 180^0$ angenommen worden ist.

Lassen wir hier $E = 6$ Zoll, $a = 400$, $b = 50$ Klafter bedeuten, so folgt aus der ersten Gleichung $x = 5'1''$, aus der zweiten $x = -6'26''8$; wird

aber in 3) $\beta = 170^0$, $\gamma = 90^0$ angenommen, die übrigen Daten beibehalten, so findet man $x = -6'21''5$, also nur um $5''3$ weniger.

Daß aber in der Praxis Fälle vorkommen, wo das eine oder das andere Maximum streng genommen eintreten kann, ist aus den Figuren 72 und 73 ersichtlich. Ist nämlich CD, Fig. 72, die gemeinschaftliche Basis der Dreiecke CAD und CBD, hat man das Instrument dagegen in O gestellt, so kann es leicht geschehen, daß die Signale A und B mit O in einer geraden Linie zu liegen kommen, daher AOB Null wird; wäre das Instrument in C centrisch gestellt, so hätte man ACB gemessen.



Bei den obigen Angaben begeht man hier wegen der excentrischen Aufstellung von 6‴ einen Fehler von 5′ 1″.

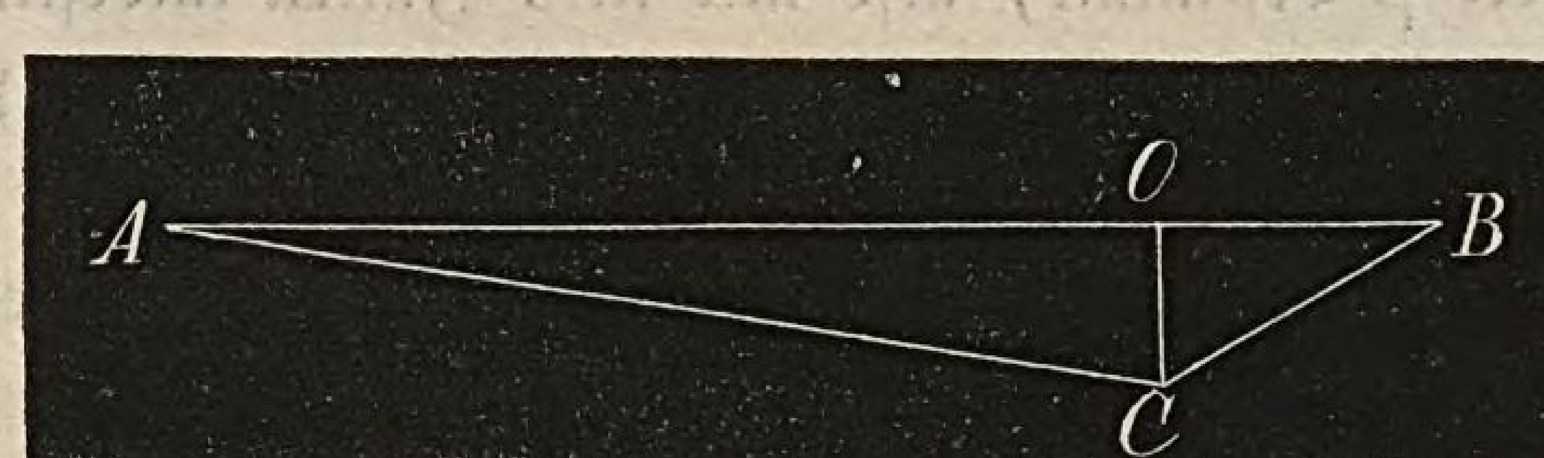
Beim Meßtische kommt der Fall, daß zwei und mehrere Punkte in einer geraden Linie erscheinen, häufig vor.

In manchen Fällen ist noch der Winkel CDO (siehe die obere Zeichnung), sehr zu beachten, nehmen wir CD = 80 Klafter, OC = 6 Zoll, COD = 90^0, so ist CDO = $3'31''6$.

Bei einer Aufnahme mit dem Meßtische habe man denselben statt von C von O nach D orientirt, so ist die Orientirung um $3'31''6$ fehlerhaft, und dieser Fehler zieht die nachtheiligsten Folgen nach sich.

Das zweite Maximum kann ganz streng eintreten, wenn innerhalb eines Polygons ein Punkt angenommen und von diesem die Winkel gemessen werden, welche die Ecken desselben, in dem angenommenen Punkte als Scheitel betrachtet, bilden.

Ist C, Fig. 73, der gewählte Punkt, wurde aber das Instrument über O centrisch gestellt, so kann der Fall leicht eintreten, daß AOB eine gerade Linie, somit $\beta = 180^0$ ist, fällt noch die Excentricität senkrecht auf diese Linie, so ist $\gamma = 90$, unter diesen Umständen ist der Unterschied zwischen dem wahren und gemessenen Winkel schon bedeutend und beträgt, wenn b = 50, E = 6″ angenommen wird, $6'26''8$.



Wenn man nun C und B auf irgend eine Art auf dem Meßtische gut bestimmt, diesen sodann statt in C über O centrisch gestellt und nach B orientirt hätte, so ist die Orientirung um $5'43''8$ fehlerhaft, so viel beträgt nämlich der Winkel CBO.

Wird der Standpunkt des Instrumentes in der Mitte einer 450 Klafter langen Linie, somit a = b = 225^0 angenommen, E = 6″, $\gamma = 90$, $\beta = 180^0$ beibehalten, so ist $x = 2'32''8$, also bedeutend kleiner.

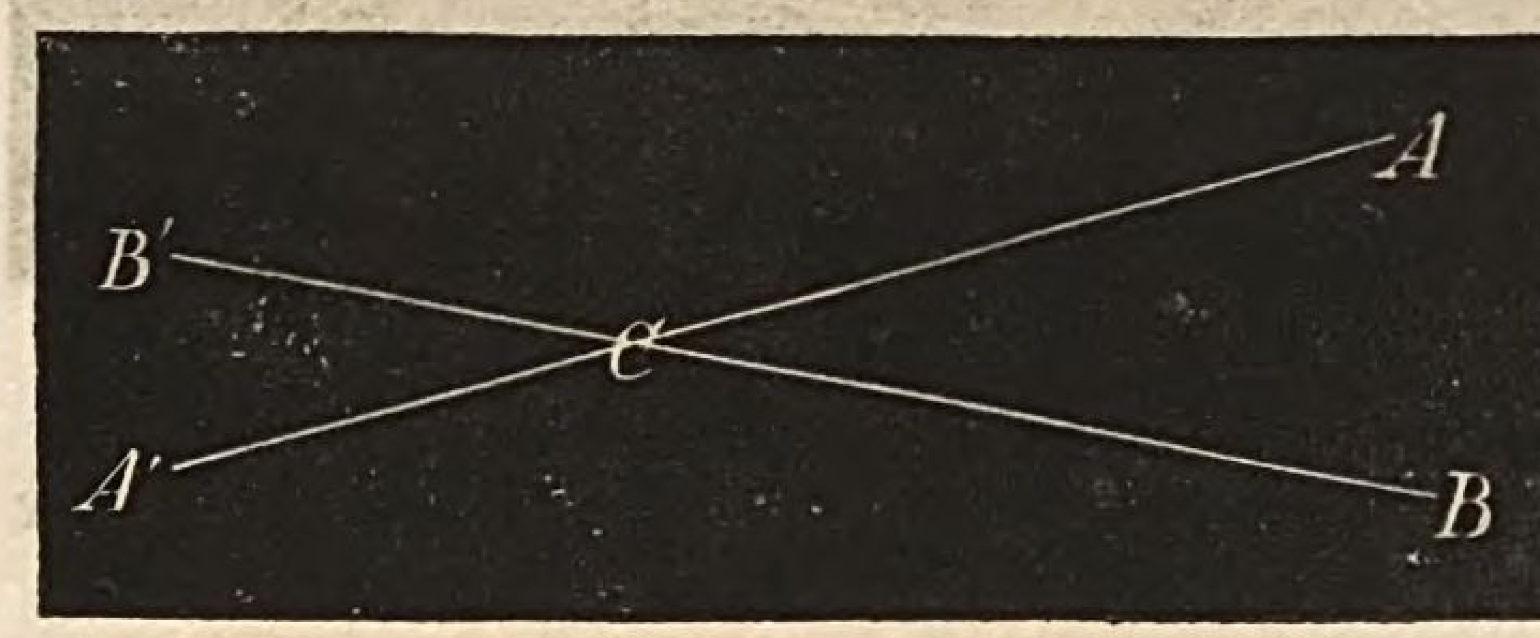
Da nun bei jeder Messung der Winkel aus einem Punkte innerhalb eines Polygons das Maximum des Fehlers eintreten kann, so sehen wir in diesem

Beispiele, daß der Fehler bedeutend vermindert wird, sobald das Instrument von den Ecken gleich weit absteht, und da die Größe γ in der Regel unbekannt ist, so ist es räthlich das Winkelinstrument wo möglich von allen Ecken des Polygons gleich weit zu stellen.

Zusatz. Auch in dem Falle als $\frac{\sin.(\beta+\gamma)}{b} - \frac{\sin.\gamma}{a} = 0$, also auch x Null wird, kann $\gamma \lesseqgtr 90^0$ werden, je nachdem der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC Fig. 71 beschriebenen Kreises auf der rechten Seite der AC, in diesem Schenkel selbst oder auf der linken Seite desselben liegt, der Winkel γ wird 90^0, wenn $b = a \cos. \beta$ ist.

§. 76. Untersuchen wir nun den Einfluß, welcher eine Aenderung des γ allein auf die Größe x ausübt.

Der Winkel γ kann alle zwischen 0 und 360^0 liegenden Werthe haben, und ist, Fig. 74, 1. Null, wenn der Standpunkt in der Verlängerung des Schenkels AC liegt;



2. liegt er innerhalb des Winkels A'CB, so ist $\beta + \gamma < 180^0$;

3. kommt der Punkt O in dem Schenkel BC selbst, so ist $\beta + \gamma = 180^0$;

4. zwischen ACB ist $\beta + \gamma > 180^0$;

5. ist der Standpunkt in der AC, so ist $\gamma = 180^0$;

6. innerhalb des Winkels B'CA beträgt $\gamma + \beta$ mehr als 180^0, aber weniger als 360^0;

7. fällt der Standpunkt in die Verlängerung des Schenkels BC, so ist $\beta + \gamma = 360^0$;

8. innerhalb des Winkels B'CA' ist $\gamma + \beta > 360$.

Im 1. und 5. Falle ist γ an sich, im 3. und 7. durch die Messung des Winkels β bestimmt, also nur in 4 Fällen unbestimmt.

In jedem dieser Standpunkte kann man die Reduktion auf das Centrum aus der Gleichung 3) berechnen, sobald γ von der Excentricität nach der rechten Seite bis zu dem linken Schenkel jenes Winkels gerechnet wird, der eben zu messen ist. Im 4. Standpunkte z. B. liegt der Winkel B auf der linken Seite des Schenkels BC, ist somit negativ, A bleibt positiv, daher ist $x = -(B + A)$; aber in diesem Falle ist $\beta + \gamma > 180$, γ kleiner als 180^0, diesen Werth erhält es erst beim fernern Wachsen; in der erwähnten Gleichung sind somit beide Glieder negativ zu nehmen und sie giebt ein richtiges Resultat.

Wir wollen nun an einem Beispiele die Wirkung ersichtlich machen, welche eine Aenderung des γ allein hervorbringt, nehmen den zu messenden Winkel $\alpha = 60$, $E = \frac{1}{12}$, $a = 80$, $b = 300$ Klafter an, im 2. Falle $\gamma = 85^0$, im 6. $\gamma = 275^0$, im 4. Falle halbirt die Excentricität, im 8. ihre Verlängerung den Winkel α, mit diesen Daten findet man die Reduktion auf das Centrum

beim 1. Falle = ... + 49″6
„ 2. „ = ... — 3′ 1″2
„ 3. „ = ... — 3′ 6″1

beim 4. Falle = ... $-2'16''1$
„ 5. „ = ... $-49''.6$
„ 6. „ = ... $+3'10''$
„ 7. „ = ... $+3'6.''1$
„ 8. „ = ... $+2'6.''1$.

Diese bedeutenden Unterschiede in den Resultaten veranlassen uns zu der Frage, welcher Werth von γ bei einem und demselben Winkel β die Reduktion zu einem Maximum macht?

Zu diesem Zwecke suchen wir aus Gleich. 4) §. 75 den Werth γ und finden

$$\text{tang.}\, \gamma = \frac{a \cos.\beta - b}{a \sin.\beta} \quad \ldots . \; 6).$$

Ist tang. $\gamma = 0$, so tritt das Maximum im 1. und 5. der oben angeführten Standpunkte ein, ist tang. γ positiv, so wird x sowohl für γ als auch $180 + \gamma$, somit im 2. und 6. Standpunkte ein Größtes, ist endlich tang. γ negativ, so kann $\gamma > 90$ und auch $> 270^0$ sein, die Maxima hängen hier noch von der Größe des Winkels β ab, und können nach Umständen beim 2., 3., 5., 6., 7. und 8. Standpunkte eintreten.

Lassen wir $\beta = 60^0$, $a = 80$, $b = 300$ Klft. bedeuten, so ist $\gamma = 104^0 55' 15''$ und die Reduktion auf das Centrum $x = -5' 56''7$.

Sind die Schenkel eines auf dem Meßtische gegebenen Winkels bedeutend ungleich, und sieht man, daß die Excentricität des im Scheitel dieses Winkels aufgestellten Tisches in die Richtung des längern Schenkels fällt, so machen uns die vorhergehenden Beispiele aufmerksam, die Aufstellung ja zu ändern, denn dann nähert sich die Reduktion ihrem Maximum, fällt jedoch die Excentricität in die Richtung des kürzern Schenkels und ist sie nicht über 6 Zoll, so kann die Stellung beibehalten werden.

Bisher haben wir die Untersuchung blos auf den Fehler eines Winkels beschränkt, es bleibt noch den Einfluß nachzuweisen, welchen eine excentrische Aufstellung auf alle aus einem Standpunkte gemessenen Winkel ausübt.

Wir nehmen an, daß aus einem Standpunkte die in der nachstehenden Rubrike β enthaltenen Winkel gemessen worden sind, daß die Excentricität 6 Zoll, der Direktionswinkel mit dem ersten rechts liegenden Schenkel $30^0 22' 35''$ betragen habe. Für jeden folgenden Winkel ist γ durch den eben gemessenen und den ersten Direktionswinkel bestimmt, was leicht durch eine Zeichnung versinnlicht werden kann.

Länge des linken Schenkels in Klafter	Länge des rechten Schenkels in Klafter	Dreieckkreis-Winkel γ	Der gemessene Winkel β	Reduktion auf das Centrum	Der richtige Winkel α.
80	120	30° 22′ 35″	59 37 25	+ 34″6	59° 37′ 59″·6
120	158	90 0 0	72 19 15	— 1′50″2	72° 17′ 24″·8
158	112	162 19 15	47 41 55	— 1′49″8	47 40′ 5″2
112	148	210 1 10	63 47 25	— 39″1	63 46 45″9
148	90	273 48 35	58 37 40	+ 27″5	58 38 7″5
90	80	332 26 15	57 56 20	+ 3′17″0	57° 59′ 37″0

Nimmt man nun statt α die gemessenen Winkel in die Rechnung, so ist jeder mehr oder weniger fehlerhaft, und weil die Summe sowohl der α als β 360^0 beträgt, so ist man gar nicht veranlaßt einen Fehler zu vermuthen.

Zusatz. Die auffallende Größe der letzten Reduktion erklärt sich durch den Umstand, daß beide Schenkel ziemlich kurz und in der Gleichung 3) die Summe beider Glieder zu nehmen ist.

§. 77. Es bleibt noch die Frage zu beantworten, welchen Einfluß der wegen der excentrischen Aufstellung begangene Fehler auf die diesem Winkel gegenüber liegende Seite oder überhaupt auf das Resultat der Messung hat? Daß dieser Einfluß doch nicht gar so bedeutend ausfallen kann als man nach der Größe der Reduktionswinkel erwarten dürfte, folgt aus dem Vorhergehenden selbst: denn sind die Schenkel des zu messenden Winkels lang, so ist der Fehler bei einer halbwegs aufmerksamen Aufstellung unbedeutend, und in den Fällen, wo eine kleine Excentricität schon einen bedeutenden Unterschied in den Winkeln verursacht, ist wieder der eine Schenkel kurz; berechnet man also mit den zweiten Seiten und dem unrichtigen Winkel die gegenüber liegende Seite, so wird das Resultat in den meisten Fällen von der Wahrheit nicht viel abweichen.

Diese Behauptung nachzuweisen sei in einem Dreiecke $AC = a$, $BC = b$; der richtige Winkel $ACB = \alpha$, daher $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos.\alpha}$, wegen der excentrischen Aufstellung habe man durch die Messung $\alpha - x$ erhalten, so ist die berechnete Länge $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos.(\alpha - x)}$, und wenn der Unterschied beider mit ζ bezeichnet wird

$$\zeta = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos.\alpha} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos.(\alpha - x)}.$$

Da wir nur eine kleine Excentricität voraussetzen, so ist x und als Folge dessen auch ζ klein, wir können somit hinreichend genau $\cos. x = 1$, $\sin. x = x$ setzen; nach der Substitution und einer einfachen Reduktion, bei welcher die zweite Potenz vom ζ vernachlässigt worden ist, findet man $\zeta = \dfrac{ab \sin.\alpha\, x}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos.\alpha}}$,
und wenn x in Sekunden ausgedrückt wird

$$\zeta = \frac{ab\sin.\alpha\,(x'' \sin. 1'')}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos.\alpha}} \quad \ldots . 7).$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke, daß ζ im allgemeinen nicht bedeutend werden kann, den Fall ausgenommen, wenn das Instrument sehr excentrisch gestellt wäre, doch die Voraussetzung schließen wir bei unserer Untersuchung aus.

1. Beispiel. Es sei $\alpha = 90^0$, $\gamma = 0$, $a = 230^0$, $b = 180$, $E = \frac{1}{12}$ Klft., so findet man $x = 95''5$, $\zeta = 0{\cdot}065$, die wahre Länge der dem Winkel α gegenüber liegenden Seite 292·06 Klafter.

2. Beispiel. Mit den Daten $a = 500$, $b = 10$, $E = \frac{1}{12}$ Klft., $\beta = 73^0 29'$ und $\gamma = 30^0 16$, haben wir $x = 27'32''3$ gefunden, daher ist $\alpha = 73^0 56\ 32''$ und $\zeta = 0{\cdot}077$, die Länge der $AB = 497{\cdot}33$ Klafter.

Die Gleichung 7) wird in den Fällen als die Reduktion auf das Centrum wegen β und γ ein Maximum erreicht noch einfacher, denn ist $\beta = 0$, so ist Gleich. 1) $\alpha = x$, und wenn $\beta = 180^0$, so ist $\alpha = 180 + x$, somit in beiden Fällen $\sin.\alpha = \pm \sin. x$, und weil $\sin.\alpha$ klein ist, so kann $\sin.\alpha = x'' \sin. 1''$

cos. $\alpha = 1$ gesetzt werden, unter dieser Annahme übergeht die Gleichung 7) in

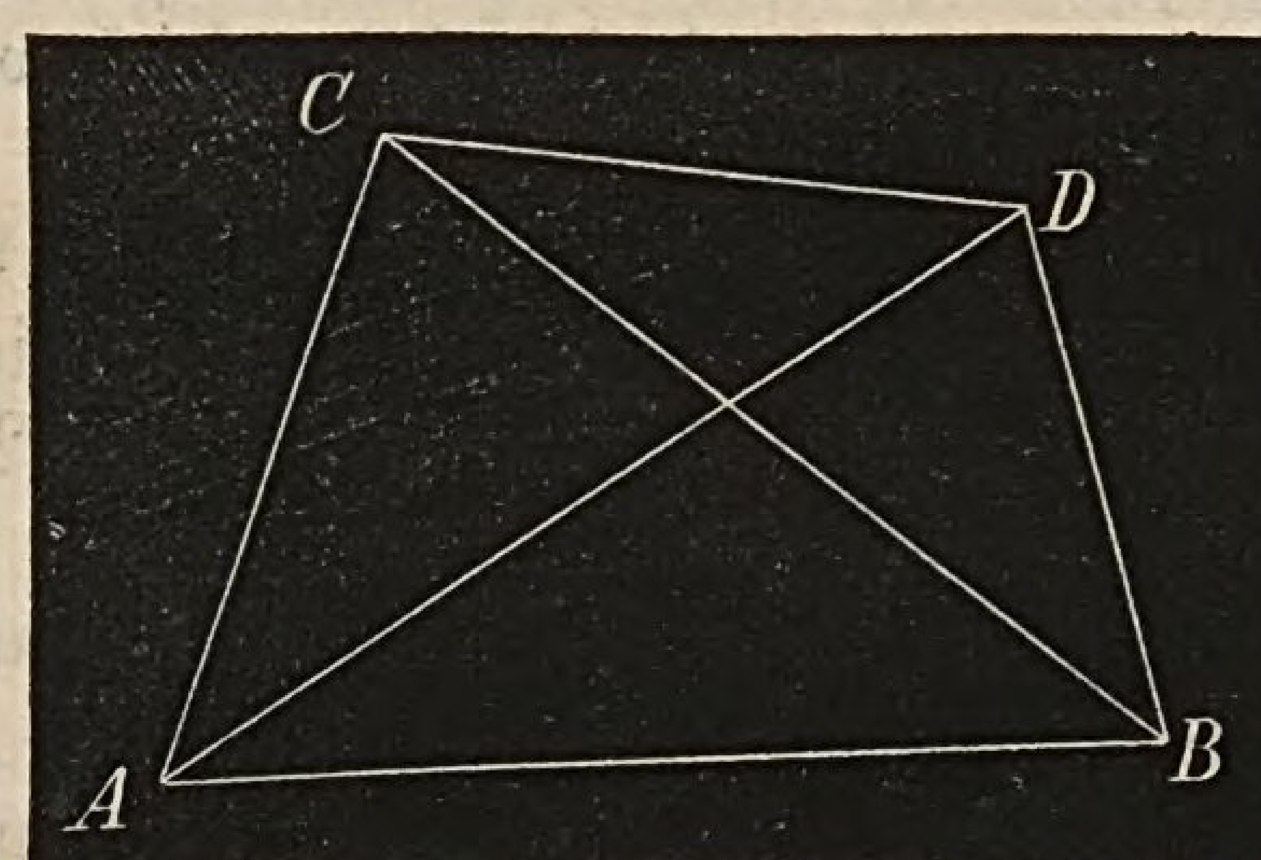
$$\zeta = \pm \frac{ab\,(x''\ \sin.\ 1'')^2}{a \mp b} \ldots 8),$$

wobei das obere Zeichen im Nenner für $\beta = 0$ und das untere für $\beta = 180^0$ zu nehmen ist.

Nach dieser Formel findet man für $\beta = 180^0$ $a = 500$, $b = 600$, $E = \frac{1}{12}$ Klafter, $x = 5''$, ζ hat erst in der 7. Dezimalstelle eine bedeutende Ziffer.

Wenn aber ein Punkt oder eine Linie aus einer Basis und den anliegenden Winkeln bestimmt wird, so kann sowohl in dem einen als auch in dem andern Standpunkte wegen der excentrischen Aufstellung ein Fehler begangen werden.

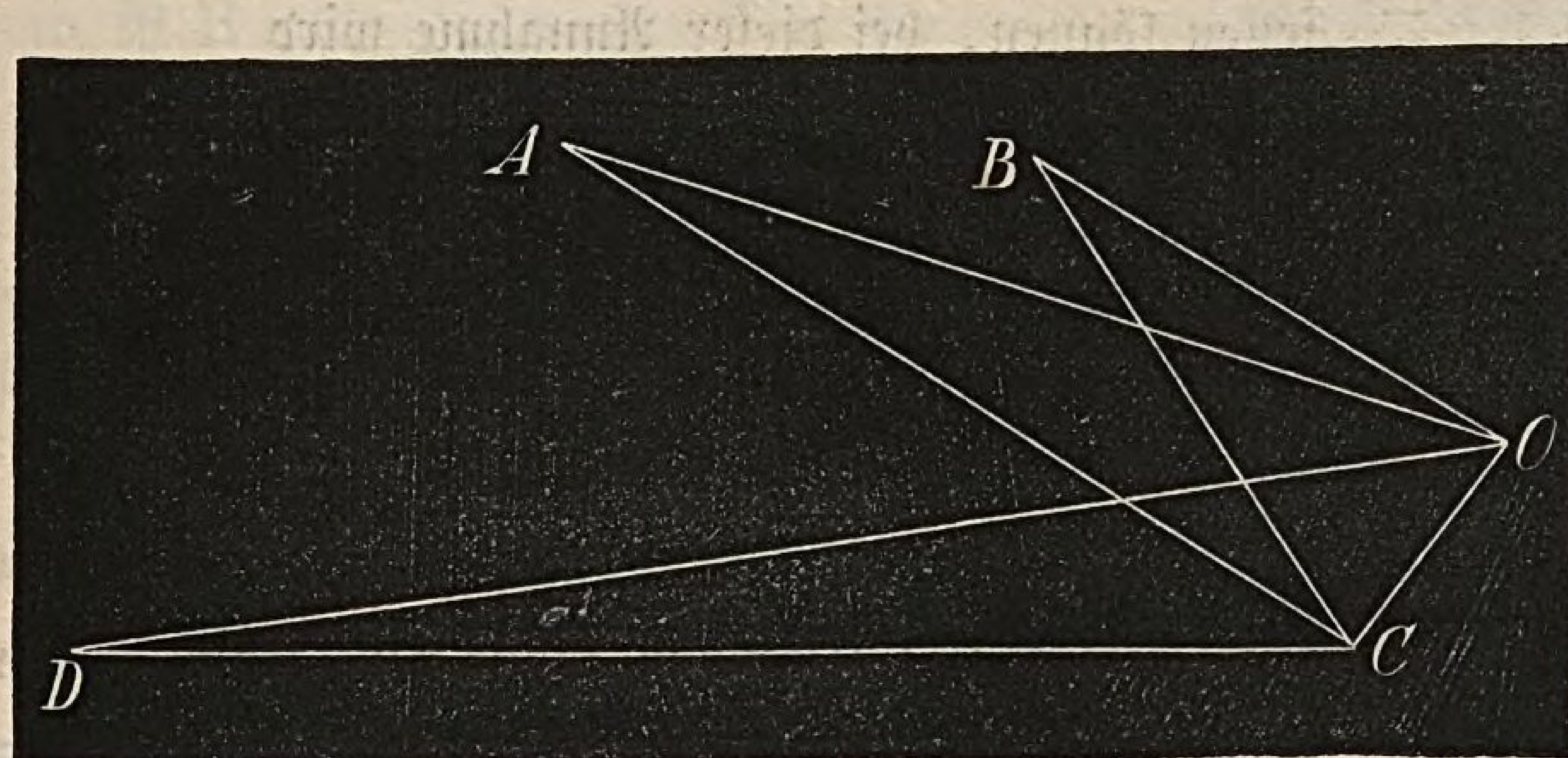
Nehmen wir an in dem Vierecke Fig. 75 sei AB = 200 Klafter, die richtigen Winkel sind CAD = $42^0 5$ 20, DAB = $36^0 15' 36''$, ABC = $21^0 42' 15''$, CBD = $35^0 54'$ $20''$, mit diesen Angaben findet man AC = 75·115, AD = 169·28, BC = 198·93, BD = 118·56, CD = 124·195 Klafter.



Dagegen habe sowohl in A als B die excentrische Aufstellung 6 Zoll, in A der Winkel $\gamma = 180$ und 270 in B betragen, so sind die durch die Messung erhaltenen Winkel CAD = 42^0 $6'$ $28''$, DAB = 36^0 $15'$ $52''$, ABC = 21^0 $42'$ $21''$, CBD = $35^0 55' 1''3$, die Resultate der Rechnung mit diesen Winkeln AC = 75·128, AD = 169·298, BC = 198·94, BD = 118·57, CD = 124·22, wir sehen somit, daß durch eine kleine Excentricität die Länge der Linien in diesem Falle wohl nicht viel verfehlt wird.

Aber außer der Länge kommt noch die Lage einer Linie derselben zu berücksichtigen, welchen Einfluß kann also eine excentrische Aufstellung von 6 Zoll auf die Lage der diesem Winkel gegenüber gelegenen Seite äußern?

Zu dieser Untersuchung nehmen wir in der Fig. 76 CB = 10, AC = 500,



CD = 30, CO = $\frac{1}{12}$ Klafter; $\beta = 10$, $\gamma = 90$, AOD = 18^0 $15'$; CD als Abszissenlinie, C als den Anfangspunkt an. Reduzirt man die gemessenen Winkel auf das Centrum und berechnet die Coordinaten von A und B einmal mit dem gemessenen, das andere Mal mit dem richtigen Winkel, so findet man

im 1. Falle:		im 2. Falle:	
Ordinate von B . . .	4·69	Ordinate von B . . .	4·77
Abszisse „ „ . . .	8·83	Abszisse „ „ . . .	8·79
Ordinate „ A . . .	154·51	Ordinate „ A . . .	155·36
Abszisse „ „ . . .	475·53	Abszisse „ „ . . .	475·25

Die Lage der Linie ist daher merklich unrichtig bestimmt, und zwar differirt der Winkel, welcher die Linie AB nach beiden Bestimmungen mit der Abszissenlinie macht, um 2′ 31″.

Die excentrische Aufstellung hat daher auf die Bestimmung der Lage einer Linie einen größeren Einfluß als auf ihre Länge; diese ist im 1. Falle 490·15, im 2. 490·17 Klafter.

Der Praktiker sieht aus dieser Untersuchung, daß bei der Aufstellung eines Instrumentes selbst eine Excentricität von 6 Zoll in manchen Fällen nicht als unbedeutend anzusehen ist.

§. 78. Wird die Excentricität bedeutend groß, so bestimmt man außer β auch γ und E, und bringt die Reduktion in die Rechnung, es ist nun die Frage, welchen Einfluß hat eine fehlerhafte Bestimmung des Direktionswinkels auf das Resultat?

Es sei in einem gegebenen Standpunkte γ das wahre Maß des Winkels, man habe aber durch die Messung $\gamma + \Delta$ erhalten, somit um Δ gefehlt.

Wird nun $\gamma + \Delta$ in der Gleichung 3) substituirt und das Resultat mit x_1'' bezeichnet, so ist $x_1'' = \frac{E}{\sin. 1''}\left\{\frac{\sin. (\beta + \gamma + \Delta)}{b} - \frac{\sin. (\gamma + \Delta)}{a}\right\}$, somit

$$x_1'' = \frac{E}{\sin. 1''}\left\{\frac{\sin. (\beta + \gamma) \cos. \Delta}{b} + \frac{\cos. (\beta + \gamma) \sin. \Delta}{b} - \frac{\sin. \gamma \cos. \Delta}{a} - \frac{\cos. \gamma \sin. \Delta}{a}\right\}.$$

Die Größe Δ dürfte doch in jedem Falle so klein sein, daß wir $\sin. \Delta = \Delta$ $\cos. \Delta = 1 - \frac{\Delta^2}{2}$ setzen können, bei dieser Annahme wird

$$x_1'' = \frac{E}{\sin. 1''}\left\{\frac{\sin. (\beta + \gamma)}{b} - \frac{\sin. \gamma}{a}\right\} + \frac{E \Delta}{\sin. 1''}\left\{\frac{\cos. (\beta + \gamma)}{b} - \frac{\cos. \gamma}{a}\right\} - \frac{E \Delta^2}{2 \sin. 1''}\left\{\frac{\sin. (\beta + \gamma)}{b} - \frac{\sin. \gamma}{a}\right\}.$$

In dieser Gleichung ist das erste Glied und der Faktor von Δ^2 im dritten Gliede die richtige Reduktion auf das Centrum somit x″, wenn daher das erste Glied auf die andere Seite übertragen wird, so ist

$$(x_1'' - x'') = \frac{E \Delta}{\sin. 1''}\left\{\frac{\cos. (\beta + \gamma)}{b} - \frac{\cos. \gamma}{a}\right\} - \frac{\Delta^2 x''}{2}.$$

Hier bedeutet, wie auch aus der Ableitung dieser Gleichung zu ersehen ist, Δ einen Bogen, wird dieser in Sekunden ausgedrückt mit Δ'', der Fehler des

Resultates ($x_1'' - x''$) mit y'' bezeichnet, so ist

$$y'' = E\,\Delta'' \left\{ \frac{\cos.(\beta + \gamma)}{b} - \frac{\cos.\gamma}{a} \right\} - \frac{(\Delta''\sin.\gamma'')^2\,x''}{2} \quad \ldots . 1).$$

Da in dieser Gleichung der wahre Werth des γ, somit auch x'' unbekannt ist, so dient sie nur den Fehler y unter bestimmten Annahmen zu schätzen, dabei kann in den meisten Fällen das letzte Glied vernachlässigt werden.

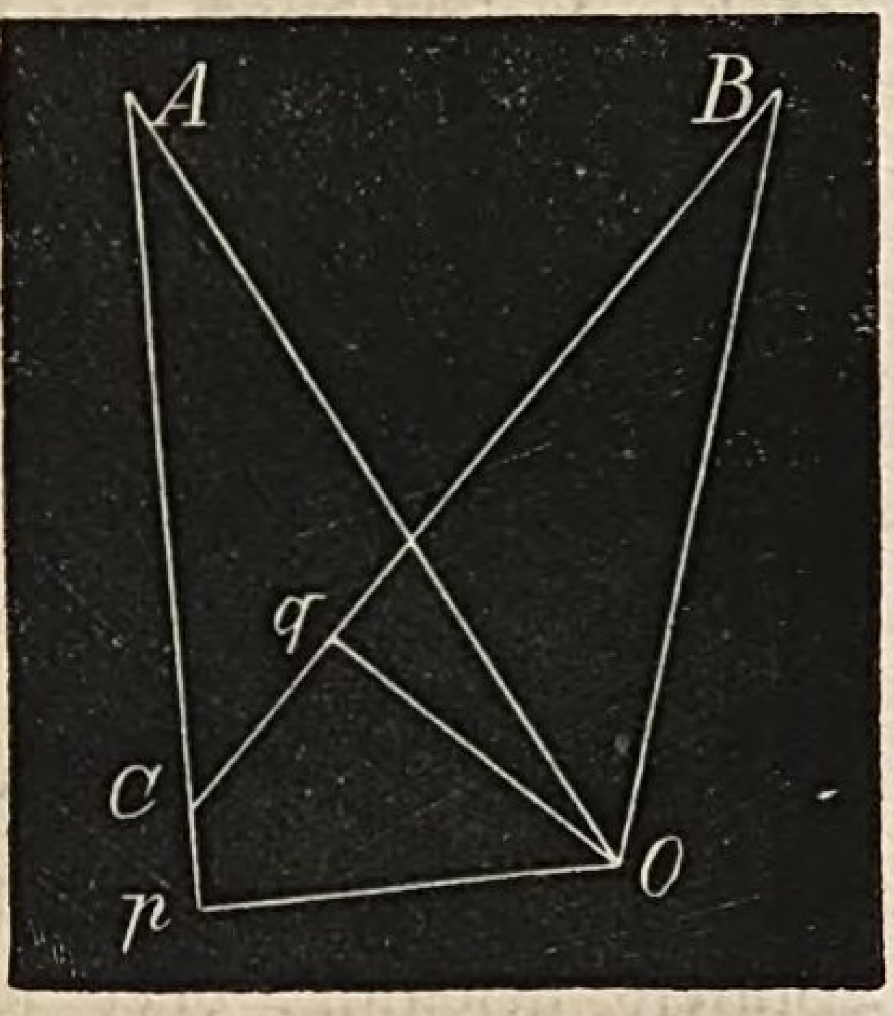
Hier tritt noch der merkwürdige Umstand ein, daß dieselben Werthe, welche x Gleich. 3) auf das Maximum steigern, gleichviel ob β und γ oder blos γ allein variabel ist, das erste Glied dieser Gleichung auf Null reduziren, somit y zu einem Minimum machen.

Als 1. Beispiel lassen wir $\beta = 60^0$, $a = 800$, $b = 4000$, $E = 4$ Klafter bedeuten, der richtige Werth des γ sei 20^0, so ist $x' - 12'46''$. Wird aber angenommen, daß γ um 2^0, also um 7200 Sekunden zu groß gemessen worden ist, so ist $y'' = 32''6$, somit ein unbedeutender Fehler.

2. Beispiel. Es sei wieder $\beta = 60^0$, $a = 800$, $b = 4000$, $E = 4$ Klft., $\gamma = 280^0\,53'\,36''$, so ist $x = + 15'\,59''$, und wenn wieder $\Delta = 7200''$ angenommen wird $y = - 0{\cdot}57$ Sekunden, so viel beträgt nämlich das zweite Glied, denn $\gamma = 280^0\,53'\,36''$ und $\gamma = 100^0\,53'\,36''$ sind die Werthe, welche unter den angegebenen Umständen $\beta = 60^0$, $a = 800$, $b = 4000$ die Reduktion zu einem Maximum machen, mit diesen Angaben wird das erste Glied Null.

Der Umstand, daß ein Fehler in γ auf die Reduktion so geringen Einfluß hat, ist für die Praxis von Wichtigkeit, denn eine genaue Messung des γ ist in vielen Fällen schwierig, während E ziemlich leicht bestimmt werden kann.

Endlich wollen wir noch beifügen, daß die Reduktion auf das Centrum auch auf eine zweite Art bestimmt werden kann.



Ist Fig. 77 ACB der zu messende Winkel, das Instrument dagegen in O gestellt, so ist wie bekannt $x = B - A$ die Reduktion. Fällt man von O auf die Schenkel AC und BC die Senkrechten Op und Oq, so ist $B = \frac{Oq}{OB}$, $A = \frac{Op}{OA}$. Nun kann offenbar $OB = CB$, $OA = CA$ angenommen werden, wird $Oq = c$, $Op = d$, $AC = a$, $BC = b$ gesetzt und die Reduktion in Sekunden ausgedrückt mit x'' bezeichnet, so ist

$$x'' = \frac{1}{\sin.1''} \left\{ \frac{c}{b} - \frac{d}{a} \right\} \quad \ldots . 2).$$

In diesem Ausdrucke ist c so auch d als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem die Senkrechte auf der rechten oder linken Seite des entsprechenden Schenkels liegt. Sind aber die Größen c und d um Δ c und Δ d fehlerhaft bestimmt, so ist der Fehler in der Reduktion

$$y'' = \frac{1}{\sin.1''} \left\{ \frac{\Delta c}{b} - \frac{\Delta d}{a} \right\} \quad \ldots . 3).$$

z. B. Die richtigen Werthe sind $c = -1{\cdot}8$, $d = 0{\cdot}9$, $a = 800$, $b = 4000$ Klafter, so ist $x = -11'33''{\cdot}4$.

Bei der Messung sei c um 0·2, d um 0·1 Klafter fehlerhaft bestimmt, so ist $\triangle c = +0{\cdot}2$, $\triangle d = +0{\cdot}1$ und $y'' = 36''1$.

Die Annahme, daß bei der Messung einer Linie von 1·8 um 0·2 und von 0·9 um 0·1 Klafter gefehlt wird, dürfte manchen unwahrscheinlich vorkommen, allein in dem Falle, daß die Signale von C nicht sichtbar, daher auch die Richtung der Schenkel AC und BC nicht scharf bestimmt ist, können die Senkrechten Oq und Op auch nur annäherungsweise bestimmt werden; und die oben angenommenen Fehler sind nicht übertrieben.

§. 79. Um sich zu überzeugen, ob ein Winkelinstrument centrisch aufgestellt ist, hat man ein einfaches Instrument, nämlich den Senkel oder die Lothgabel, welche die in der Fig. 78 und 79 dargestellte Form haben kann.

Fig. 78.

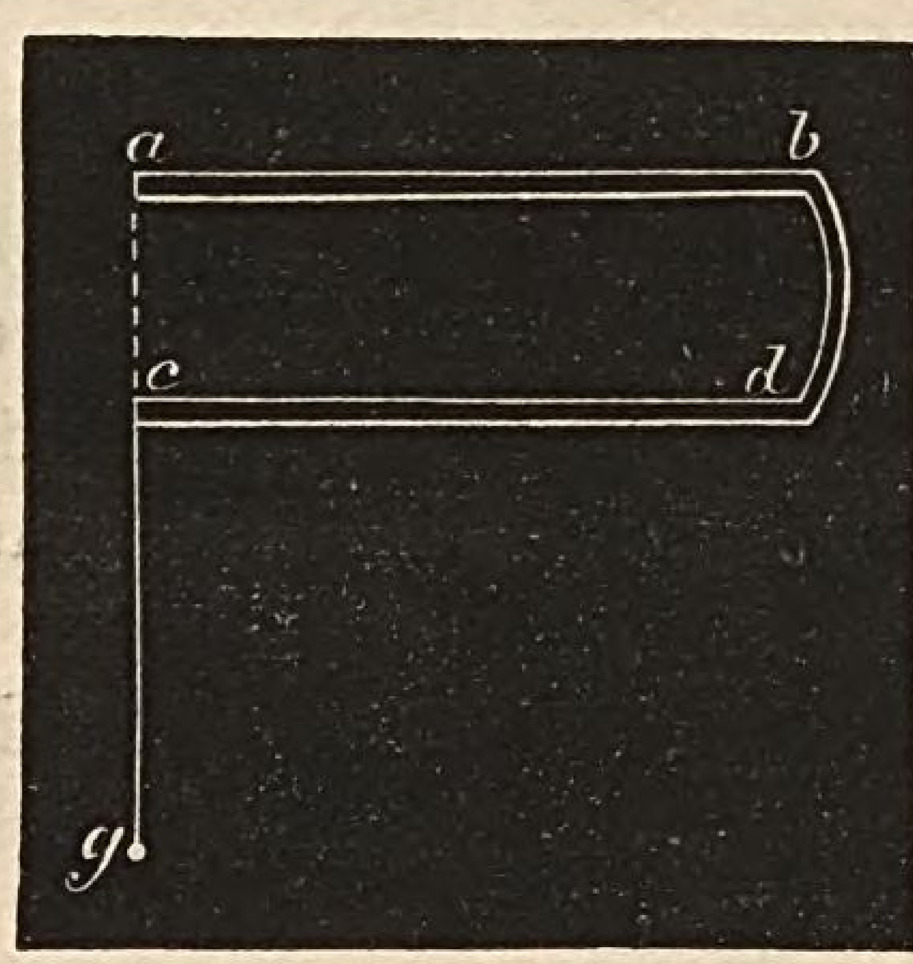
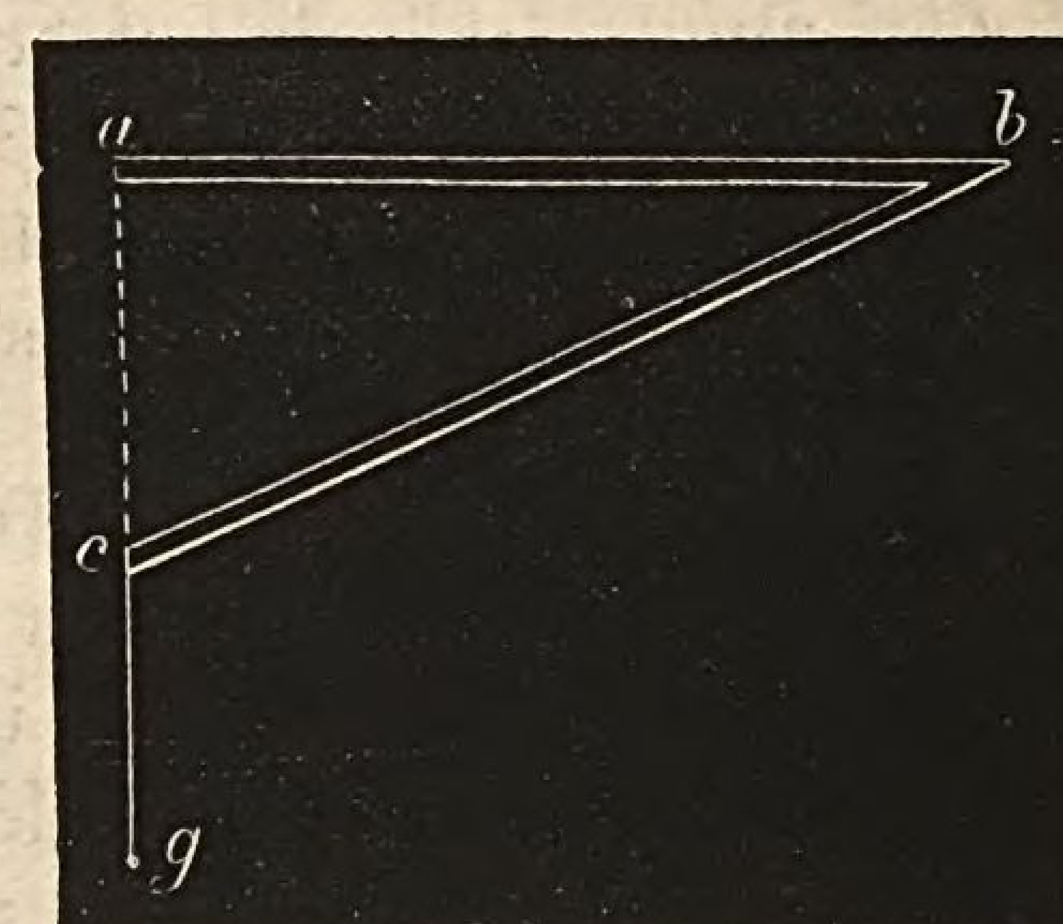


Fig. 79.

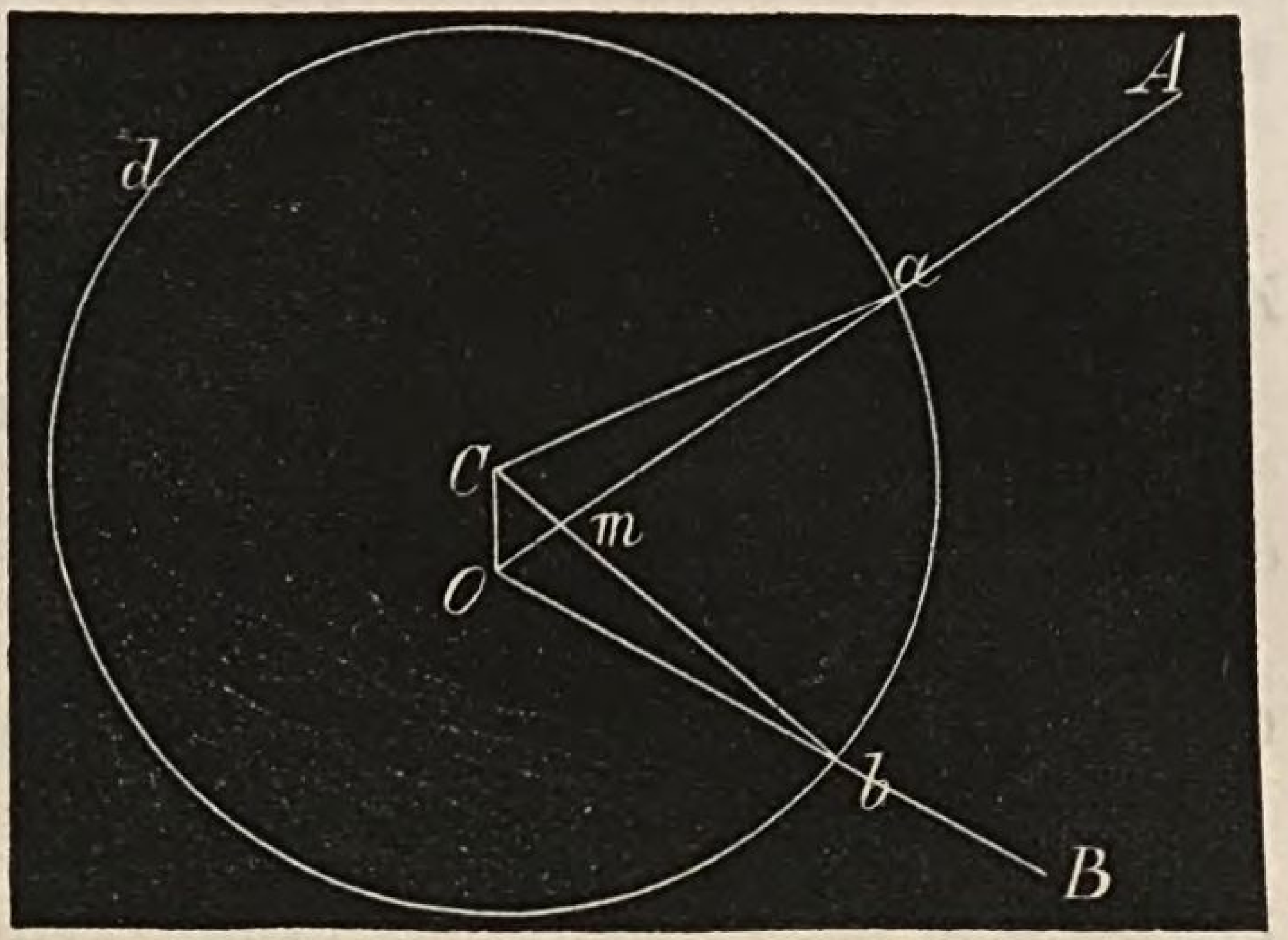


In der ersten Figur sind ab und cd zwei parallele, gewöhnlich eiserne, dünne Stäbe, welche durch den Bogen bd verbunden sind, in der Fig. 79 sind ab die Kathete und bc die Hypothenuse eines rechtwinklichen Dreieckes, wo die andere Kathete ac fehlt. Bei beiden Lothgabeln liegt der Punkt c in der senkrechten Linie, welche auf die Leiste ab im Punkte a und in der Ebene der Lothgabel errichtet worden ist, in dem Punkte c ist eine dünne Schnur befestigt, an der ein messingener Kegel (Senkel) g so angebunden ist, daß sein nach abwärts gelegener Scheitel mit ac in einer vertikalne Linie liegt.

Hält man die Leiste ab horizontal, a an den Mittelpunkt des Limbus, so zeigt die Spitze des Senkels den Punkt am Boden, welcher mit a in einer vertikalen Linie liegt. Dieser Punkt wird entweder als Scheitel des zu messenden Winkels gewählt, oder wenn er bereits gegeben ist, das Instrument darnach gestellt. Dieser Fehler kann demnach ganz beseitigt werden, indem das Instrument entweder centrisch aufgestellt, oder wenn das nicht angeht, der Einfluß der excentrischen Aufstellung in die Rechnung genommen wird.

Fehler wegen der Excentricität der Alhidade.

§. 80. Nehmen wir an, Fig. 80 (siehe nächste Seite) sei C der Mittelpunkt des Limbus abd, die Alhidade bewege sich aber um den Punkt O, so nennt man die Entfernung CO die Excentricität des Instrumentes.



Als man von O aus nach A und B visirt hat, sei der Index auf a und b Grade gestanden, so wird man als Maß des Winkels AOB den Bogen (b—a) nehmen, während dieser das Maß von aCb ist.

Um nun den Unterschied AOB — aCb = x berechnen zu können, sei der Halbmesser des Limbus = r; die Excentricität CO = e, diese so klein, daß wir Ca = Oa = bO setzen können, der Winkel aCb = α, der gesuchte AOB = β, der Winkel CaO = a, CbO = b und aCO = γ, so folgt aus dem Dreiecke aCO, $\sin. a = \frac{e \sin. \gamma}{r}$, oder weil a sehr klein, ist

$$a'' = \frac{e \sin. \gamma}{r \sin. 1''} \; .\; .\; .\; .\; 1).$$

Auf dieselbe Art folgt aus dem Dreiecke bCO $\sin. b = \frac{e \sin. (\gamma - \alpha)}{r}$ oder

$$b'' = \frac{e \sin. (\gamma - \alpha)}{r \sin. 1''} \; .\; .\; .\; .\; 2).$$

Wegen den gleichen Winkeln amC = bmO, ist $a + \beta = b + \alpha$, daher $x = (\alpha - \beta) = b - a$, und wenn die Werthe aus 1) und 2) substituirt werden,

$$x'' = \frac{e}{r \sin. 1''} \left\{ \sin.(\gamma - \alpha) - \sin. \gamma \right\} = - \frac{d}{r \sin. 1''} \left\{ \sin. \gamma - \sin. (\gamma - \alpha) \right\}.$$

Der Ausdruck $\sin. \gamma - \sin. (\gamma - \alpha)$ läßt sich noch vereinfachen, denn setzen wir $\gamma = y$ und $\gamma - \alpha = z$, so ist $y + z = 2\gamma - \alpha$ und $y - z = \alpha$, daraus $y = \frac{2\gamma - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ und $z = \frac{2\gamma - \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}$; $\sin. y - \sin. z = \cos. \left(\frac{2\gamma - \alpha}{2}\right)$ $\sin. \frac{\alpha}{2}$ und wenn wieder statt y und z die ursprünglichen Werthe gesetzt werden,

$$\sin. \gamma - \sin. (\gamma - \alpha) = 2 \cos. \left(\frac{2\gamma - \alpha}{2}\right) \sin. \frac{\alpha}{2}, \text{ somit}$$

$$x'' = - \frac{2de}{r \sin. 1''} \cos. \left(\frac{2\gamma - \alpha}{2}\right) \sin. \frac{\alpha}{2} \; .\; .\; .\; .\; 3).$$

Dieser Unterschied kann Null werden, und zwar (von $\alpha = 0$, oder $r = \infty$ abgesehen), wenn $\cos. \frac{2\gamma - \alpha}{2} = 0$ wird, also wenn entweder $\frac{2\gamma - \alpha}{2} = 90$ oder $\frac{2\gamma - \alpha}{2} = 270$ Grade ist.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $\gamma = 90 + \frac{\alpha}{2}$, aus der zweiten $\gamma = 270 + \frac{\alpha}{2}$.

Der Fehler in der Gleichung 3) wird am größten, wenn $\cos.\left(\frac{2\gamma - \alpha}{2}\right) = \pm 1$ ist, d. h. wenn $\left(\frac{2\gamma - \alpha}{2}\right) = 0$ oder $\frac{2\gamma - \alpha}{2} = 180$ Grade beträgt; aus der ersten dieser Gleichungen folgt $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, aus der zweiten $\gamma = 180 + \frac{\alpha}{2}$.

Halbirt man also den Winkel α und errichtet auf die Halbirungs-Linie im Mittelpunkte des Limbus eine Senkrechte, so ist der Fehler wegen der Excentricität Null, wenn der Drehungspunkt der Alhidade in der Senkrechten liegt, und am größten, wenn der Drehungspunkt in der den Winkel halbirenden Linie liegt.

Um die Größe des Werthes in der Gleichung 3) beurtheilen zu können, nehmen wir $r = 6$ Zoll, $e = 0{\cdot}005$ Zoll, $\alpha = 65^0 50$, $\gamma = 100^0 41$, so ist $x = 70''68 = 1$ Minute 10·7 Sekunden.

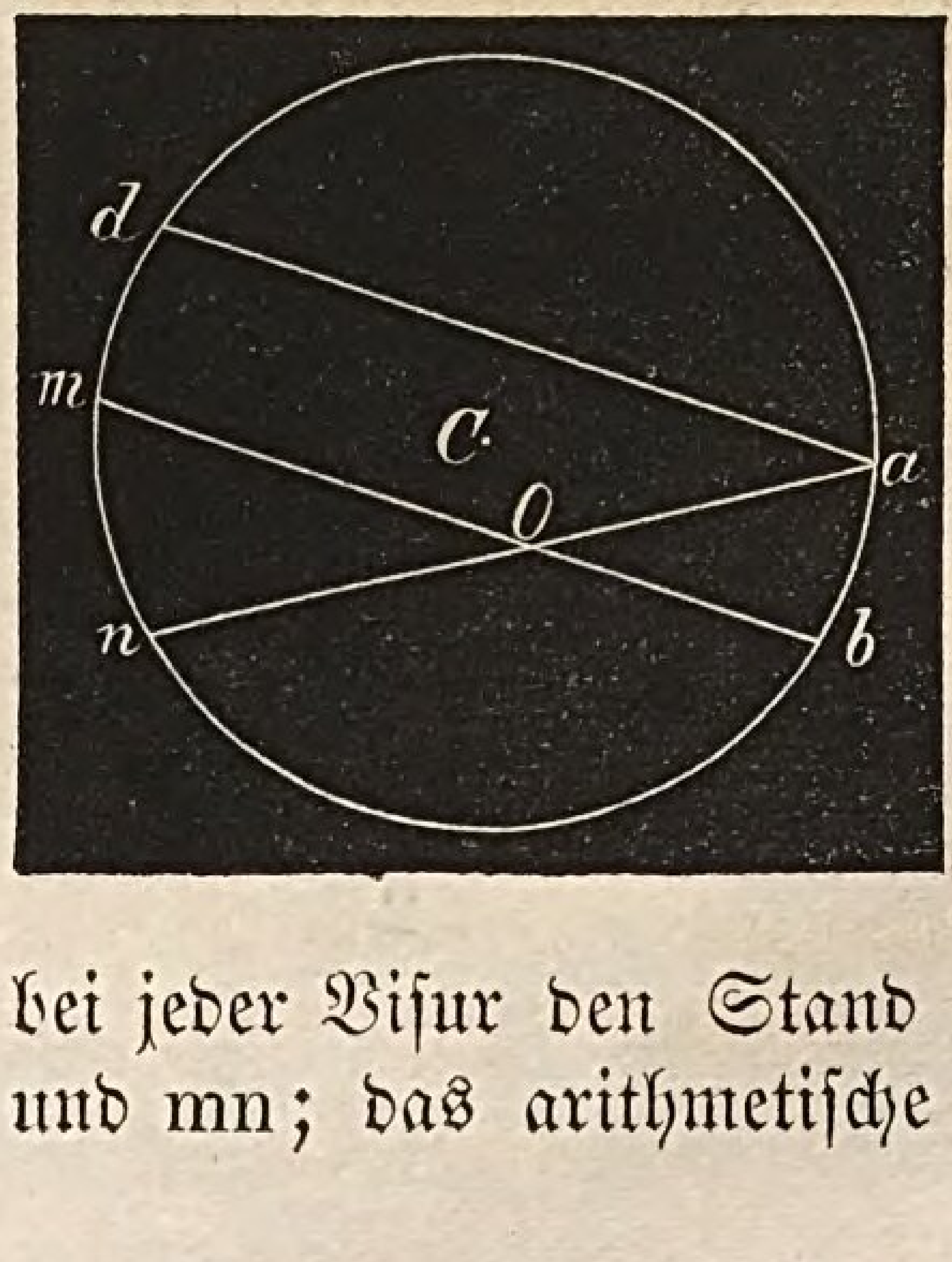
In dem Falle als x ein Maximum wird, übergeht die Gleichung 3) in

$$x'' = \mp \frac{2\, e \sin. \frac{\alpha}{2}}{r \sin. 1''} \quad \ldots . 4).$$

Setzt man hier $\alpha = 90$, $e = 0{\cdot}005$, $r = 6$ Zoll, so ist $x'' = -6' 3'' 4$. Veranlaßt schon eine so kleine Größe von 0·005 Zoll, die kaum zu sehen ist, einen Fehler von 6 Minuten, so sieht man, daß die Excentricität der Alhidade ein sehr gefährlicher Feind der Winkelinstrumente ist, indem die Größe e nicht gemessen, daher auch ihr Einfluß nicht in die Rechnung genommen werden kann.

Auch sieht man, daß bei Instrumenten, welche einen größeren Limbus haben, dieser Fehler kleiner ausfällt.

§. 81. Ist der Limbus jedoch ein ganzer Kreis, so hat man ein einfaches Mittel, den Fehler wegen der Excentricität des Instrumentes unschädlich zu machen; denn ist Fig. 81 C der Mittelpunkt des Limbus, O der Drehepunkt der Alhidade, somit $aOb = \beta$ der gesuchte Winkel, ad mit mb parallel, so ist $aOb = dan$ und das Maß des Winkels



$dan = \frac{dm + mn}{2}$, weil ferner $dm = ab$ ist, so folgt

$$\beta = \frac{ab + nm}{2} \quad \ldots . 1),$$

d. h. ist der Limbus ein ganzer Kreis, so bringt man an beiden Enden der Alhidade Nonien an, notirt bei jeder Visur den Stand beider, so bekommt man das Maß des Bogens ab und mn; das arithmetische Mittel aus beiden ist das wahre Maß des gesuchten

Winkels, wenn auch das Instrument mit einer bedeutenden Excentricität behaftet ist.

Z. B. Als man das erste Signal anvisirt hat, war der Stand a = 2⁰ 15′ 30″, bei n = 182⁰ 15′ 50″; bei der zweiten Visur war b = 70⁰ 55′ 40″ und m = 250⁰ 55′ 30″, so hat der Bogen von a bis b in Graden 68⁰ 40′ 10″ und der von n bis m 68⁰ 39′ 40″, daher ist der wahre

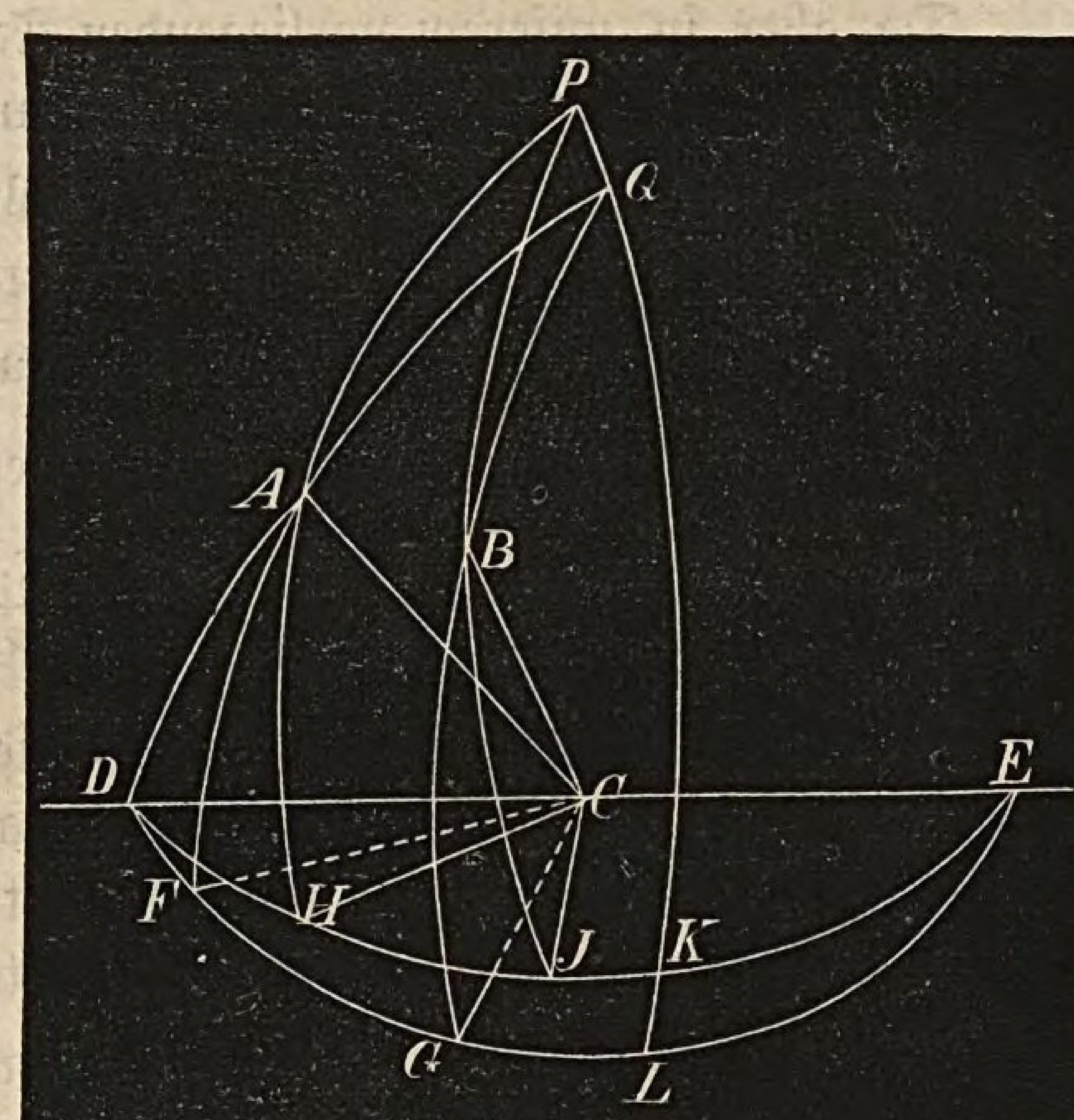
$$\text{Winkel} = \frac{(68^0\,40'\,10'') + (68^0\,39'\,40'')}{2} = 68^0\,39'\,55''.$$

In der Praxis, wenn sehr viele Winkel zu messen sind, macht man die Rechnung einfacher. Man sieht aus dem obigen Beispiele, daß man nur den Stand des Nonius bei a mit 2⁰ 15′ 30″, bei n aber nur die Sekunden mit 50″ abzulesen braucht, woraus das arithmetische Mittel 2⁰ 15′ 40″ folgt; auf dieselbe Art wird bei b der Stand mit 70⁰ 55′ 40″, bei m nur 30″ abgelesen, das Mittel mit 70⁰ 55′ 35″ genommen, so ist der Unterschied beider nämlich (70⁰ 55′ 35″) — (2⁰ 15′ 40″) der gesuchte Winkel.

Seit jener Zeit, als die Eintheilung der Limbus durch Maschinen vorgenommen, die Instrumente also genauer und auch wohlfeiler geliefert werden, nimmt man zum Limbus, falls es die Konstruktion des Instrumentes zuläßt, immer einen ganzen Kreis.

Fehler wegen der nicht horizontalen Stellung des Limbus.

§. 82. Denken wir uns aus dem Mittelpunkte eines Limbus mit dem Halbmesser gleich Eins eine Kugelfläche beschrieben: der Mittelpunkt sei C, Fig. 82, welcher lothrecht über dem Scheitel des zu messenden Winkels, der Limbus aber nicht horizontal gestellt ist.



Nehmen wir an, die Kugelfläche schneide den Limbus in DLE, eine durch den Punkt C gelegte horizontale Ebene in DKE, die Visur von C nach dem ersten Signal in A, nach dem zweiten in B, die Visirebene durch A auf den schiefgestellten Limbus in FQ, die durch B in GQ; die Visirebene durch A auf die horizontale Ebene in PH, durch B in BJ; endlich sei DE der Durchschnitt zwischen der horizontalen Ebene und dem Limbus, PQKL der Durchschnitt einer durch PQC gelegten Ebene mit der Kugelfläche.

Bevor wir jedoch den Fehler, welchen eine nicht horizontale Stellung des Limbus verursacht, näher untersuchen, wollen wir noch eine Nebenfrage erledigen, nämlich die: wenn der Bogen AF, DF und der Neigungswinkel beider Ebenen nämlich HDF gegeben sind, den Bogen DH und den Unterschied DH — DF zu berechnen.

Legen wir durch DCA eine Ebene und setzen wir DF $= \delta$, DH $= \delta'$, AF $=$ h, DA $= \varepsilon$, den Neigungswinkel der Ebene DAC gegen DFG $= \eta$, den Winkel HDF $= \gamma$, so findet man aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADF

$$\text{cotg. } \eta = \text{sin. } \delta \text{ cotg. h } \ldots . \text{ 1)}, \quad \text{tang. } \delta = \text{tang. } \varepsilon \text{ cos. } \eta \ldots . \text{ 2)};$$

in dem rechtwinkligen Dreiecke ADH ist tang. δ' = tang. ε cos. $(\eta - \gamma)$, somit

$$\text{tang. } \delta' = \text{tang. } \varepsilon \text{ cos. } \eta \text{ cos. } \gamma + \text{tang. } \varepsilon \text{ sin. } \eta \text{ sin. } \gamma \ldots . \text{ 3)}.$$

Aus 1) bekommt man $\text{sin. } \eta = \frac{\text{tang. h cos. } \eta}{\text{sin. } \delta}$, aus 2) $\text{cos. } \eta = \frac{\text{tang. } \delta}{\text{tang. } \varepsilon}$, daher ist $\text{sin. } \eta = \frac{\text{tang. h}}{\text{cos. } \delta \text{ tang. } \varepsilon}$, substituirt man diesen Werth und $\text{tang. } \varepsilon = \frac{\text{tang. } \delta}{\text{cos. } \eta}$ in die 3. Gleichung, so ist

$$\text{tang. } \delta' = \text{tang. } \delta \text{ cos. } \gamma + \frac{\text{sin. } \gamma \text{ tang. h}}{\text{cos. } \delta} \ldots . \text{ 4)}.$$

Lassen wir hier $\delta = 10^0$, h $= 30^0$, $\gamma = 30'$ bedeuten, so ist $\delta' = 10^0 17' 1''2$, der Unterschied $\delta' - \delta = 17' 1''2$, also nahe die Hälfte von γ.

Setzen wir $\delta' - \delta =$ u, so ist $\text{tg. } (\delta' - \delta) = \text{tg. u} = \frac{\text{tg. } \delta' - \text{tg. } \delta}{1 + \text{tg. } \delta' \text{ tg. } \delta}$; wird in dieser Gleichung statt tg. δ' der Werth aus 4) substituirt, so findet man nach einer einfachen Reduktion

$$\text{tang. u} = \frac{\text{sin. } \delta \text{ cos. } \delta \text{ cos. } \gamma - \text{sin. } \delta \text{ cos. } \delta + \text{cos. } \delta \text{ tang. h sin. } \gamma}{\text{cos.}^2 \delta + \text{sin.}^2 \delta \text{ cos, } \gamma - \text{sin. } \gamma \text{ tang. h}}.$$

Da aber in unserem vorliegenden Falle γ nie einen Grad erreichen dürfte, so kann man mit hinreichender Schärfe sin. $\gamma = \gamma$, cos. $\gamma = 1 - \frac{1}{2} \gamma^2$ setzen, unter dieser Annahme übergeht die vorhergehende Gleichung in

$$\text{tang. u} = \frac{2 \gamma \text{ cos. } \delta \text{ tang. h} - \gamma^2 \text{ sin. } \delta \text{ cos. } \delta}{2 - 2 \gamma \text{ tang. h} - \gamma^2 \text{ sin. } \delta}.$$

Ist γ in Sekunden ausgedrückt, so bekommt man

$$\text{tang. u} = \frac{2 (\gamma'' \text{ sin. } 1'') \text{ cos. } \delta \text{ tang. h} - (\gamma'' \text{ sin. } 1'')^2 \text{ sin. } \delta \text{ cos. } \delta}{2 - 2 \gamma'' \text{ sin. } 1'' \text{ tang. h} - (\gamma'' \text{ sin. } 1'')^2 \text{ sin.}^2 \delta}.$$

Man sieht aber, daß das zweite Glied im Zähler und weil h selten 45 erreichen noch weniger überschreiten dürfte, auch die negativen Glieder im Nenner vernachlässigt werden können, und daß statt tang. u auch der Bogen gesetzt werden kann, dann ist u $= (\gamma'' \text{ sin. } 1'') \text{ cos. } \delta$ tang. h und in Sekunden ausgedrückt

$$\text{u}'' = \gamma'' \text{ cos. } \delta \text{ tang. h } \ldots . \text{ 5)}.$$

Wird das vorhergehende Beispiel nach dieser Formel gerechnet, so ist u'' $= 17' 3''4$, also von der strengen Rechnung nur um 2·2 Sekunden verschieden.

Auch folgt aus 5), daß u bei demselben h ein Maximum wird, wenn $\delta = 0$ oder 180^0 ist, und daß auch sodann u $< \gamma$ bleibt, so lange h kleiner als 45^0 ist, was bei terrestrischen Messungen wohl immer vorausgesetzt werden kann.

Im Falle des Maximum ist

$$u'' = \gamma'' \text{ tang. } h \ldots . 6),$$

z. B. $h = 30^0$, $\gamma = 30'$ ist $u'' = 17' \, 19''2$.

Anmerkung. Zu dieser Untersuchung bin ich durch einen Aufsatz von Professor Matzka in Grunerts Archiv 13. Theil veranlaßt worden.

Nach dieser Untersuchung kehren wir zu unserm Beweise zurück.

Weil die Visirebene durch A und B auf dem Limbus senkrecht steht, so ist Q der Pol des Kreises DLE, eben deshalb ist P der Pol des Kreises DKE, daher $DP = DK = 90^0$, somit wieder D der Pol des Kreises LKD, $DK = DL = 90^0$ und KL das Maß des Neigungswinkels beider Ebenen DKE und DLE, somit $PQ = LK = \gamma$.

Ferner ist ACB der zu projizirende Winkel, seine Projektion auf dem schief gestellten Limbus ist FCG, auf die horizontale Ebene HCJ.

Setzen wir $FG = \beta$, $HJ = \beta'$, $DF = \delta$, $DH = \delta'$, $AF = h$, $BG = h'$, $HDF = \gamma$, so ist $(\beta' - \beta)$ der gesuchte Unterschied, FL das Maß des Winkels AQL, HK das Maß des Winkels APQ, daher $AQL = 90 - \delta$, $AQP = 180 - AQL = 90 + \delta$, $APQ = 90 - \delta'$. In dem sphärischen Dreiecke APQ ist $AQ = 90 - h$, $PQ = \gamma$ und AQP bekannt, daher

$$\text{cotg. } APQ = \frac{\text{cotg. } AQ \text{ sin. } PQ - \text{cos. } PQ \text{ cos. } AQP}{\text{sin. } AQP}, \; ^{*})$$

und nachdem die angenommenen Werthe substituirt worden sind

$$\text{tang. } \delta' = \frac{\text{tang. } h \text{ sin. } \gamma + \text{cos. } \gamma \text{ sin. } \delta}{\text{cos. } \delta} \ldots . a).$$

In dem sphärischen Dreiecke PBQ ist $BQ = 90 - h'$, $PQ = \gamma$, $BQL = 90 - (\delta + \beta)$, daher $BQP = 90 + (\beta + \delta)$, $BPQ = 90 - (\beta' + \delta')$, somit $\text{cotg. } BPQ = \frac{\text{cotg. } BQ \text{ sin. } PQ - \text{cos. } PQ \text{ cos. } PQB}{\text{sin. } PQB}$, daher nach der Substitution

$$\text{tang. } (\beta' + \delta') = \frac{\text{tang. } h' \text{ sin. } \gamma + \text{cos. } \gamma \text{ sin. } (\beta + \delta)}{\text{cos. } (\beta + \delta)} \ldots . b).$$

Da man aber das Instrument nicht in einer schiefen Lage gebraucht, so kann der Winkel γ nur unmerklich sein, dann sind aber vermöge der obigen Untersuchung die Unterschiede zwischen δ und δ' oder zwischen $(\beta + \delta)$ in $(\beta' + \delta')$ noch kleiner als γ; wird daher $\delta - \delta' = u$, $(\beta + \delta) - (\beta' + \delta') = u'$ gesetzt, so kann man mit hinreichender Genauigkeit $\text{sin. } \gamma = \gamma$, $\text{cos. } \gamma = 1 - \gamma \frac{1}{2}$, $\text{sin. } u = u$, $\text{cos. } u = 1$ und eben so $\text{sin. } u' = u'$, $\text{cos. } u' = 1$ setzen.

Wird in die Gleichung a) statt δ' der gleiche Werth $\delta - u$, und in jene b) $(\beta + \delta) - u'$ statt $(\beta' + \delta')$ substituirt und auf den Umstand, daß γ, u, u' kleine

---

*) (Diese Gleichung bekommt man auf folgende Art:

Es ist cos. a = cos. b cos. c + sin. a sin. b cos. A; cos. b = cos. a cos c + sin. a sin. c cos. B, wird statt cos. b der Werth in die erste Gleich. substituirt, so erhält man sin. b cos. A = sin. c cos. a — sin. a cos. c cos. B; aber $\text{sin. } b = \frac{\text{sin. } a \text{ sin. } B}{\text{sin. } A}$, daher $\text{cotg. } A = \frac{\text{sin. } c \text{ cotg. } a - \text{cos. } c \text{ cos. } B}{\text{sin. } B}$, wodurch A durch zwei Seiten, sammt dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt ist.)

Bogen sind, Rücksicht genommen, so erhält man aus a) $-$ u $\cos.^2 \delta = \gamma \,\text{tang.}\, h \cos. \delta + u \gamma \sin. \delta \,\text{tang.}\, h + u \sin.^2 \delta - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin. \delta \cos. \delta - \frac{1}{2} u \gamma^2 \sin.^2 \delta$, aber weil $u < \gamma$, also $u \gamma < \gamma^2$ ist und wir nur bis zur zweiten Potenz der kleinen Größen gehen, so kann das 2. und letzte Glied vernachlässigt werden, daher ist $u = \frac{1}{2} \gamma^2 \sin. \delta \cos. \delta - \gamma \,\text{tang.}\, h \cos. \delta$, auf demselben Wege erhält man aus b) $u' = \frac{1}{2} \gamma^2 \sin. (\beta + \delta) \cos. (\beta + \delta) - \gamma \,\text{tang.}\, h' \cos. (\beta + \delta)$.

Nun ist $u' = (\beta + \delta) - (\beta' + \delta') = (\beta - \beta') + (\delta - \delta')$ und $\delta - \delta' = u$, wird noch der gesuchte Unterschied mit x bezeichnet, so ist $x = u' - u$, und nachdem die obigen Werthe substituirt worden sind

$$x = \frac{1}{2} \gamma^2 [\sin.(\beta + \gamma) \cos.(\beta + \delta) - \sin. \delta \cos. \delta] - \gamma [\cos.(\beta + \delta) \,\text{tg.}\, h' - \cos. \delta \,\text{tg.}\, h].$$

Der Ausdruck in der ersten Klammer ist $\cos. (2 \delta + \beta) \sin. \beta$, somit

$$x = \frac{2}{2} \gamma^2 \cos. (2 \delta + \beta) \sin. \beta - \gamma \left\{\cos. (\beta + \delta) \,\text{tang.}\, h' - \cos. \delta \,\text{tang.}\, h\right\},$$

und wenn γ in Sekunden gegeben, x ebenfalls in Sekunden verlangt wird

$$x'' = \frac{\cos.(2 \delta + \beta) \sin. \beta \,(\gamma'')^2 \sin. 1''}{2} + \gamma'' \left\{\cos. \delta \,\text{tg.}\, h - \cos. (\beta + \delta) \,\text{tg.}\, h'\right\} \ldots 7).$$

Lassen wir hier $h = 20^0$, $h' = 35^0$, $\delta = 10^0$, $\beta = 65^0$ und $\gamma = 30'$ bedeuten, so beträgt das erste Glied $+ 0.''62$, das zweite $+ 31.9$, somit ist $x = 32''5$.

Wird aber $\delta = 0$, $\beta = 120^0$, $h = h' = 40^0$ und $\gamma = 30'$ angenommen, so ist das erste Glied $- 3''4$, das 2. beträgt $+ 37' \, 45''6$, somit $x = 37' \, 42''$, also mehr als die Neigung des Limbus beträgt.

Setzen wir in der Gleichung 7) $\beta = 0$, wodurch gesagt wird, daß die anvisirten Signale in einer Ebene liegen, so bekommt man $x = \gamma'' \left\{\text{tang.}\, h - \text{tang.}\, h'\right\} \cos. \delta$, und verlegen wir den Punkt B in die Ebene des Limbus, nehmen also $h' = 0$ an, so bekommen wir $x'' = \gamma'' \cos. \delta \,\text{tang.}\, h$, also unsere obige Gleich. 5) und aus dieser genau dieselben Resultate, welche Prof. Matzka am Ende seines Aufsatzes „Berechnung der Fehler der Horizontalwinkel bei geneigter Ebene des Meßtisches oder des Horizontalkreises am Winkelmesser" mit aller möglichen Schärfe und Weitläufigkeit berechnet hat. Daraus folgt: daß die Gleichung 7) zur Schätzung des etwa möglichen Fehlers für alle in der praktischen Geometrie vorkommenden Fälle mit hinreichender Schärfe gebraucht werden kann, indem es Niemanden einfallen wird, die Größen γ, δ, h etwa zu messen und dann mittelst derselben den gemessenen Winkel korrigiren zu wollen, und daß Prof. Matzka nicht den angeblichen Fall, nämlich den Unterschied in der Projektion eines Winkels, sondern den Unterschied in der Projektion einer Linie gegen zwei sich schneidende Ebenen untersucht und durchgeführt hat; denn sobald $\beta = 0$ und $h' = 0$ gesetzt wird, so bleibt nur der Schenkel CA übrig, und die Untersuchung reduzirt sich auf dessen Projektion gegen eine schief gestellte und eine horizontale Ebene.

Wie schon die Gleichung 7) zeigt, kann nur das 2. Glied bedeutend werden, suchen wir also die Fälle auf, bei welchen dieses das Maximum erreicht, wobei blos γ und δ als veränderlich, h und h' aber konstant angenommen werden. Die erwähnte Gleichung in Bezug auf β sodann auf δ differenzirt gibt

$\frac{dx}{d\beta} = \gamma'' \sin. (\beta + \delta) \,\text{tang.}\, h' = 0$, also ist $\sin. (\beta + \delta) = 0$, somit $(\beta + \delta) = 0^0$ oder $\beta + \delta = 180^0$, oder $\beta + \delta = 360^0$, ferner

$$\frac{dx}{d\delta} = \gamma'' \left\{- \sin. \delta \,\text{tang.}\, h + \sin. (\beta + \delta) \,\text{tang.}\, h'\right\} = 0,$$

und weil $\sin. (\beta + \delta) = 0$ ist, so folgt $\sin. \delta = 0$, also ist $\delta = 0$ oder $\delta = 180^0$

Die Zusammenstellung der möglichen Werthe von β und δ geben nur zwei unterschiedliche Fälle, bei welchen x ein Maximum wird und zwar $\delta = 0$ und $\beta = 0$ oder $\delta = 0$ und $\beta = 180^0$, im ersten Falle übergeht die Gleichung 7) in

$$x'' = \gamma'' (\text{tang.}\, h - \text{tang.}\, h') \;\ldots\; 8),$$

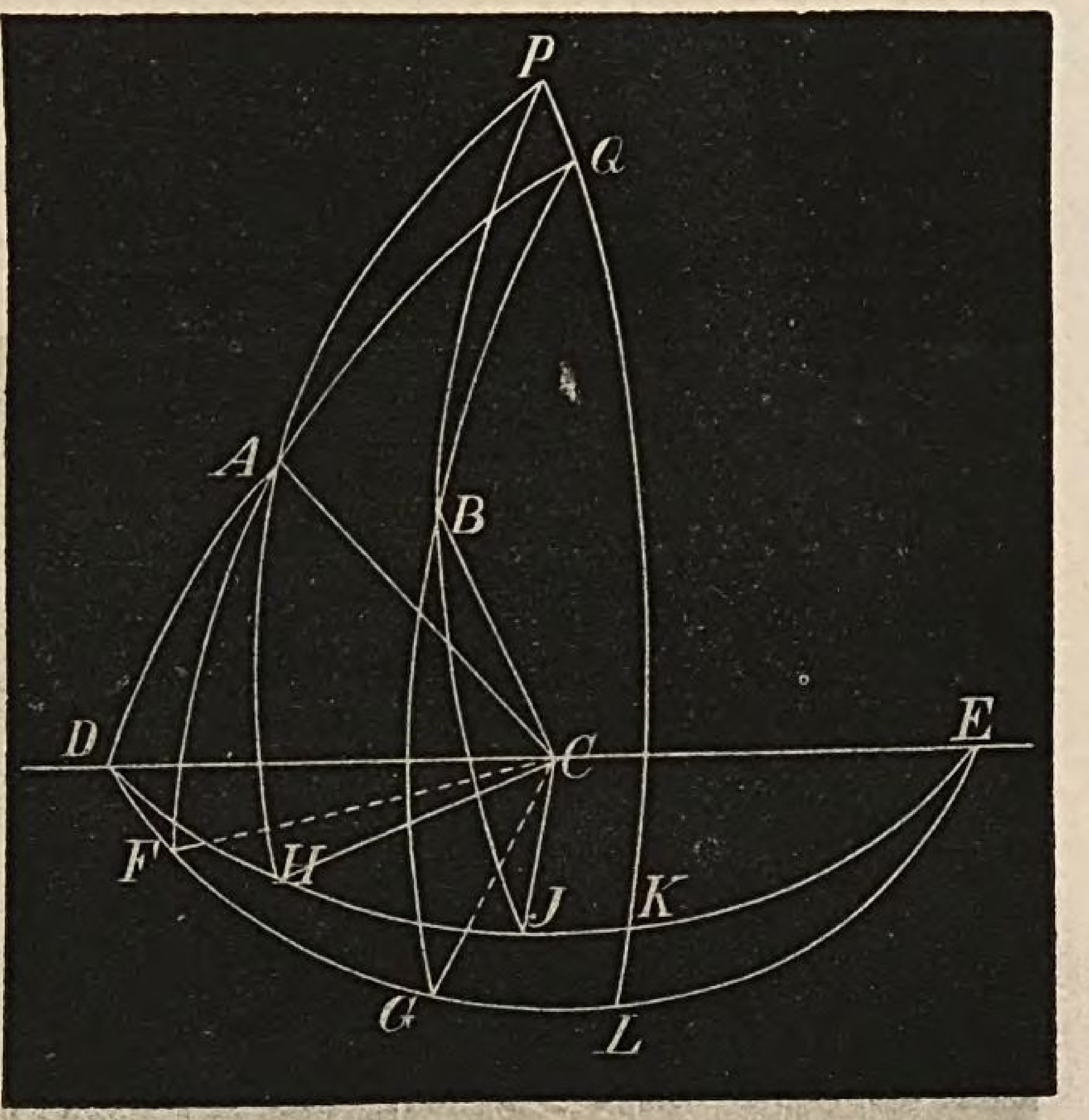
im zweiten Falle in

$$x'' = \gamma'' (\text{tang.}\, h + \text{tang.}\, h') \;\ldots\; 9).$$

Die anvisirten Punkte liegen dann in der Visirebene DQE und zwar für $\delta = 0$ und $\beta = 0$ auf einer Seite der QC, und $\beta = 180$, $\delta = 0$ zu beiden Seiten dieser Linie, aber so lange h und h' nicht Null sind, nicht in der Linie DE.

Wenn die Höhen h, h' gleich sind, wird in 8) der Ausdruck Null, was ganz richtig ist, denn dann hat man blos eine Linie die AC, ihre Projektion ist DC sowohl auf die horizontale als auch auf die schief gestellte Ebene, somit der Fehler in der Projektion Null.

Das erste Maximum $\delta = 0$ oder $\beta = 0$ kann bei der Messung sehr spitzer Winkel eintreten, wenn der eine Schenkel zufällig in der Ebene DQC, Fig. 82, liegt.



Nehmen wir in der Gleichung 7) $\delta = 0$, $\beta = 3^0$, $h = 30^0$, $h' = 10^0$, $\gamma = 30'$ an, so ist $x = 12' 2'' 3$, dasselbe Resultat erhält man aus 8), wenn $\beta = 0$ gesetzt wird.

Das zweite Maximum $\delta = 0$ und $\beta = 180^0$ wird bei der Messung eines Winkels, der nahe 180^0 beträgt, eintreten, wenn beide Schenkel in der Nähe der Ebene DQC liegen, denn nehmen wir an $\delta = 4^0$, $\beta = 170^0$, $h = 30$, $h' = 10^0$, $\gamma = 30'$, so ist $x = 22' 32'' 3$, nimmt man $\gamma = 180$, $\delta = 0$ an, so bekommt man mit den übrigen Daten aus Gleich. 9) $x = 22' 36'' 6$, somit nur um $4'' 3$ mehr.

Werden in der Gleichung 9) beide Höhenwinkel zu 45 Grade angenommen, so ist $x'' = 2\gamma''$, kann somit bedeutend werden, und sollte x nicht mehr als $30''$ betragen, so müßte der Limbus auf $15''$ horizontal gestellt sein.

Wenn beide Schenkel in der Ebene des schief gestellten Limbus liegen, so ist $h = h' = 0$, in der Gleich. 7) wird das zweite Glied Null, daher der Fehler wegen des nicht horizontal gestellten Limbus

$$x'' = \frac{\cos.(2\delta + \beta) \sin.\beta \sin.1'' (\gamma'')^2}{2} \;\ldots\; 10).$$

Bestimmen wir dessen Maximum, so ist

$$\frac{dx}{d\delta} = -\frac{\sin.\beta \sin.(2\delta + \beta) \sin.1'' (\gamma'')^2}{2} = 0,$$ daher $\sin.(2\delta + \beta) = 0$, also

$2\delta + \beta = 0$ oder 180 oder 360 Grade; ferner

$$\frac{dx}{d\beta} = (\beta'')^2 \sin. 1'' \{\cos. (2\delta + \beta) \cos. \beta - \sin. \beta \sin. (2\delta + \beta)\} = 0,$$ und weil $\sin. (2\delta + \beta) = 0$ sein muß, so ist $\cos. (2\delta + \beta) \cos. \beta = 0$.

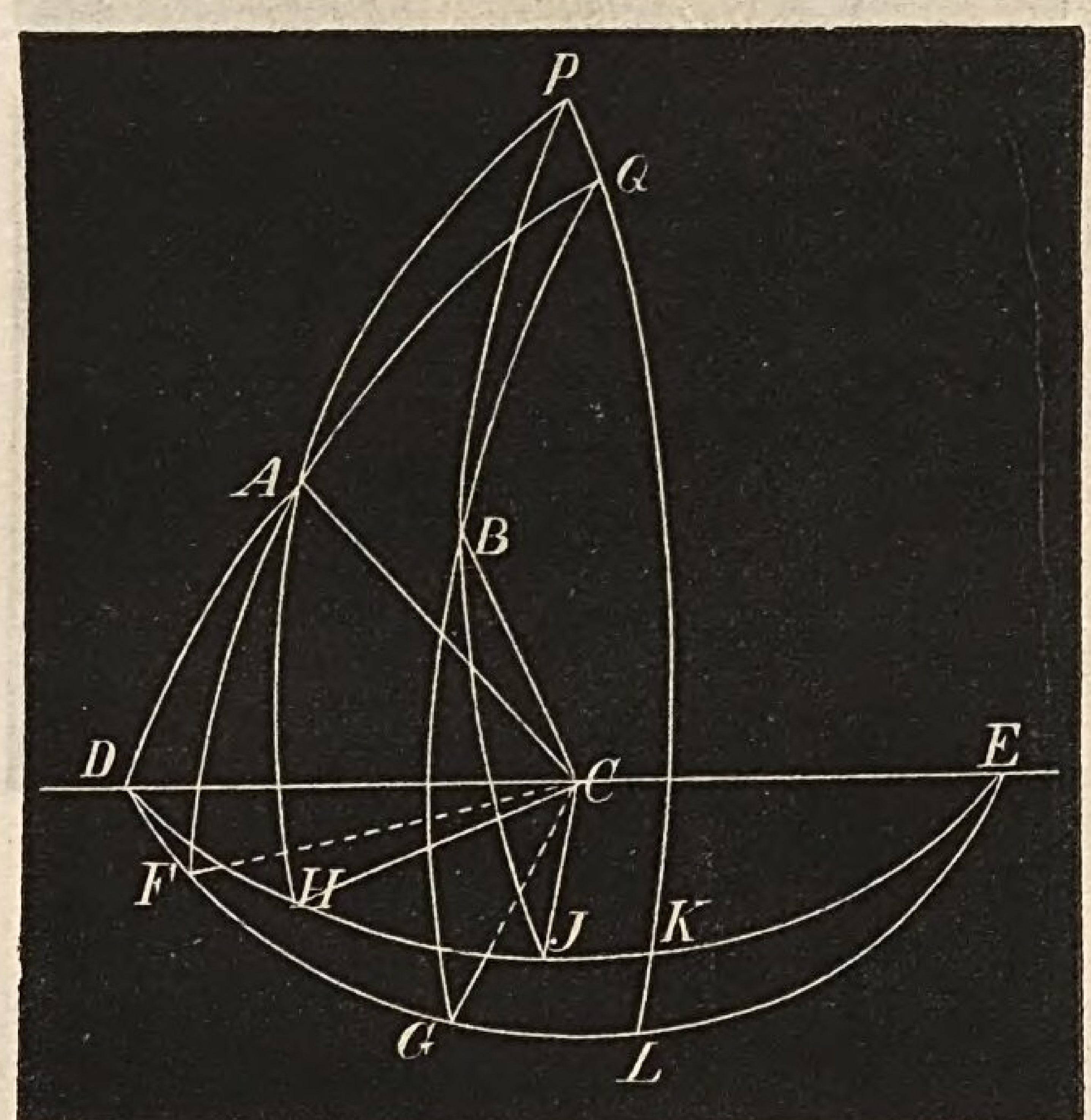
In dieser Gleichung kann nur $\cos. \beta = 0$, also $\beta = 90$ oder 270^0 sein; macht man jedoch alle möglichen Zusammenstellungen der Werthe $2\delta + \beta$ und β, so reduziren sich alle auf zwei, nämlich $\beta = 90^0$, $\delta = -45^0$ und $\beta = 90^0$, $\delta = +45^0$, mit diesen Zahlen verwandelt sich die Gleichung 10) in

$$x'' = \frac{(\gamma'')^2 \sin. 1''}{2} \;\ldots\ldots 11), \text{ oder } x'' = -\frac{(\gamma'')^2 \sin. 1''}{2} \;\ldots\ldots 12).$$

Lassen wir $\gamma = 30'$ bedeuten, so ist $x = \pm 0{\cdot}33$ Sekunden.

Wenn aber in diesem Falle der Fehler in der Projektion des Winkels nicht mehr als 30 Sekunden betragen sollte, so finden wir aus einer der obigen Gleichungen $\gamma = 58'\, 37''94$.

Prof. Matzka findet in diesem Falle $\gamma = 1^0 22' 55''$; dieses Resultat folgt ganz einfach aus der Gleichung 4); ist nämlich $h = 0$, so ist $\tan g. \delta' = \tan g. \delta \cos. \gamma$, also weil δ und δ' spitze Winkel sind $\delta > \delta'$, setzt man in dieser Gleichung $\delta = 45^0 0' 30''$, $\delta' = 45^0$, so ist $\gamma = 1^0 22' 55''$; aber es ist bereits bemerkt worden, daß die Gleichung 4) nur den Fehler in der Projektion einer Linie angibt.



Untersuchen wir noch den Fehler, welchen eine nicht horizontale Stellung des Limbus auf die Messung eines Höhenwinkels oder auf die Zenithdistanz hat.

In dem Dreiecke AQP, Fig. 82, ist $PQ = \gamma$, $AQ = 90 - h$, $AP = 90 - h'$, wenn nämlich h die gemessene, h' die richtige Höhe bedeutet, endlich ist $AQP = 90 + \delta$, wobei γ, δ und h als bekannt vorausgesetzt werden, es ist somit $\sin. h' = \cos. \gamma \sin. h - \sin. \gamma \cos. h \sin. \delta$; wird nun $\sin. \gamma = \gamma$, $\cos. \gamma = 1 - \frac{1}{2}\gamma^2$, $h' - h = u$, und statt $h' = h + u$, ferner $\sin. u = u$, $\cos. u = 1$ gesetzt, so bekommt man die Fehler des Höhenwinkels in Sekunden ausgedrückt

$$u'' = -\left\{ \frac{(\gamma'')^2}{2} \sin. 1'' \tan g.\, h + \gamma'' \sin. \delta \right\} \ldots\ldots 13).$$

Bezeichnet man die Zenithdistanz des Punktes A mit ζ, so ist $h + \zeta = 90$, somit der Fehler in der Zenithdistanz

$$u'' = -\left\{ \frac{(\gamma'')^2}{2} \sin. 1'' \cot ang.\, \zeta + \gamma'' \sin. \delta \right\} \ldots\ldots 14).$$

Hier ist γ'' positiv zu nehmen, wenn der Limbus unterhalb der horizontalen Ebene liegt, dagegen negativ, wenn das Gegentheil stattfindet.

Wird $\gamma = 30'$ angenommen, so beträgt das erste Glied bei einem Höhenwinkel von $7^0 15' 27''8$ nur $1''$, dagegen schon $15''7$, wenn $h = 45^0$ erreicht.

In dem Falle als durch die Messung $h = 0$ gefunden wird, somit der anvisirte Punkt in der Ebene des Limbus liegt, ist $u'' = \pm \gamma'' \sin. \delta$ und erreicht bei $\delta = 90$, sein Maximum wird nämlich $\pm \gamma''$ je nach der Lage des Limbus.

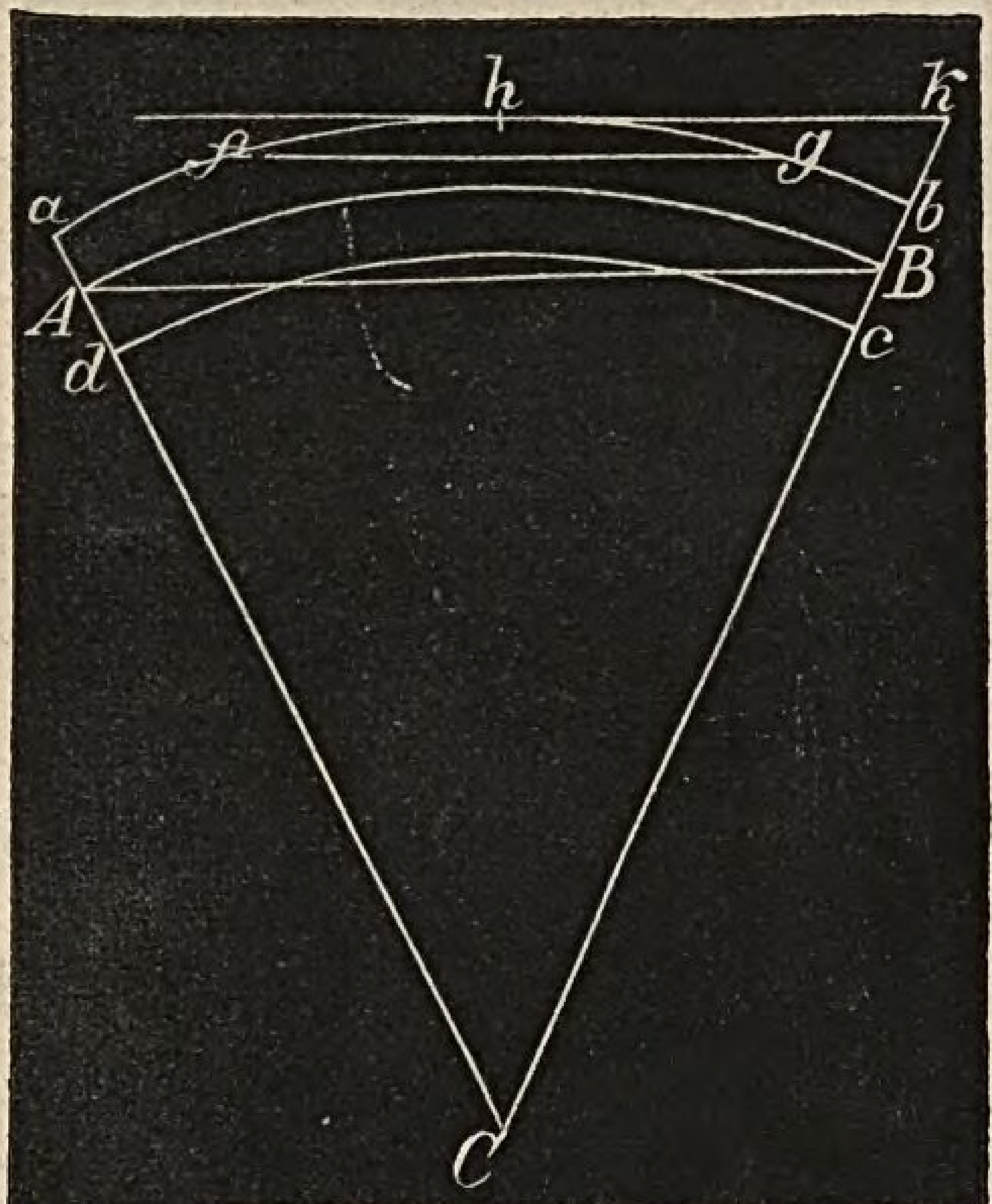
Erklärung der Libellen.

§. 83. Ist die horizontale Projektion eines Winkels bis auf einige Sekunden genau zu messen, so folgt aus dem vorhergehenden Paragraphe, daß der Limbus mit einer großen Schärfe horizontal gestellt werden müsse, daß man somit ein sicheres Mittel (ein Instrument) anzuwenden habe, durch welches die horizontale Lage desselben beurtheilt werden kann, und dieses Instrument ist die Libelle.

In der praktischen Geometrie werden Libellen von zweierlei Konstruktion angewendet, beide beruhen auf dem Naturgesetze, daß die höchsten Atome einer tropfbaren Flüssigkeit, welche in einem Gefäße vermöge der Schwere in's Gleichgewicht gekommen sind, in einer horizontalen Ebene liegen.

Wird nämlich ein hohler Glascylinder $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll im Durchmesser kreisförmig gebogen, und ein Stück desselben von 6 bis 10 Zoll Länge zuerst an dem einen Ende hermetisch geschlossen, hierauf mit einer tropfbaren Flüssigkeit (gewöhnlich Weingeist) bis auf einen kleinen Raum gefüllt, zuletzt auch auf dem zweiten Ende geschlossen, so erhält man den Hauptbestandtheil einer Libelle.

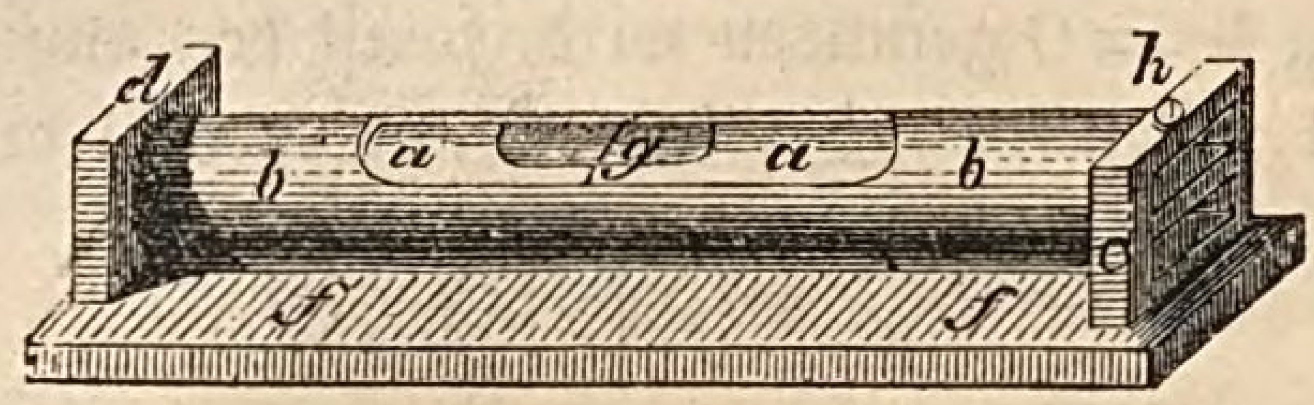
Stellt uns, Fig. 83, abcd das Stück des gebogenen und mit einer Flüssigkeit gefüllten Glascylinders, der Kreisbogen AB seine Achse vor, und wird diese in einer vertikalen Ebene liegend, die Sehne AB aber horizontal vorausgesetzt, so wird die Flüssigkeit, weil der Cylinder nicht ganz voll ist, ebenfalls von einer horizontalen Ebene begränzt, deren Schnitt mit der vertikalen Ebene ACB, die horizontale also mit der Sehne AB parallele Linie fg ist.



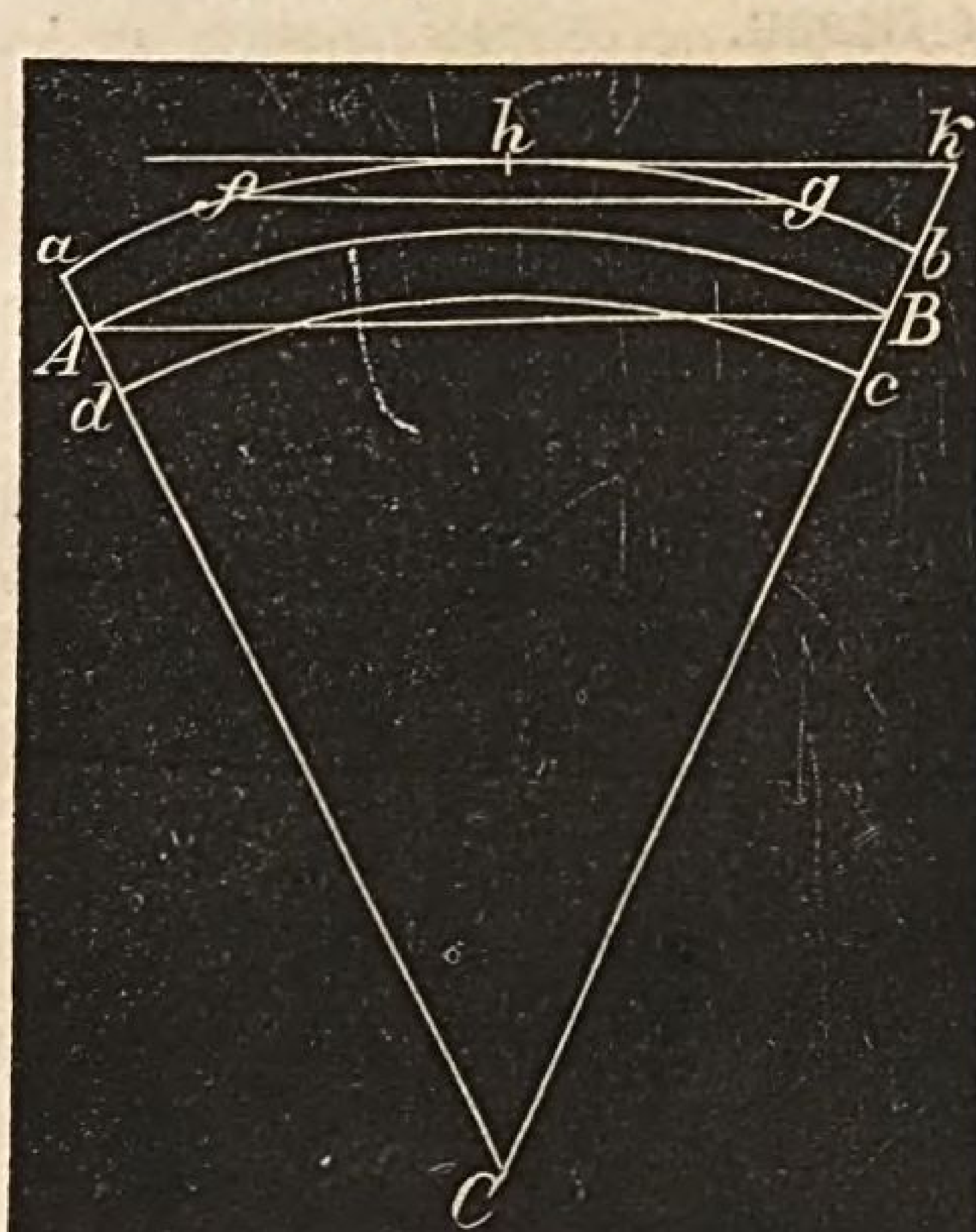
Denkt man sich noch an den Kreisbogen ab eine mit der Sehne fg parallele Tangente hk gezogen, so wird, weil die zwischen einer Sehne und der mit ihr parallelen Tangente liegenden Kreisbogen einander gleich sind, $hf = hg$, demnach h die Mitte der Glasröhre, und der von der Flüssigkeit nicht ausgefüllte Theil derselben (die Blase genannt) wird von der Mitte nach beiden Seiten gleich sein, sobald nämlich die Sehne AB horizontal und die Achse des Cylinders in einer vertikalen Ebene liegt.

Hat man die Mitte der Glasröhre auf irgend eine Art ersichtlich gemacht, und liegen die Endpunkte der Achse AB in einer bestimmten Ebene, oder sind sie mit derselben parallel, so wird man umgekehrt aus dem Stande der Blase beurtheilen können, ob die in der erwähnten Ebene liegende und mit der Sehne AB parallele Gerade horizontal ist oder nicht.

In der Fig. 84 ist die gewöhnliche Libelle dargestellt; die Glasröhre aa vor einer Beschädigung möglichst zu schützen, ist dieselbe mit einer messingenen Fassung bb umgeben, die an der Stelle, wo die Blase sich bewegt, ausgeschnitten ist, damit der Stand der Blase sichtbar wird.



Da die Achse der Glasröhre in einer vertikalen Ebene und oberhalb der Sehne liegen, ferner in dieser Ebene eine stabile Lage haben soll, so ist die Fassung bb mittelst zweier an den Enden derselben angebrachten Ansätze c, d an ein messingenes unten eben geschliffenes Lineal ff befestigt; die Mitte der Glasröhre ist entweder durch einen schmalen messingenen Bogen (Rippe) g oder durch einen an dem Glase angebrachten Strich, oder durch zwei von der Mitte gleich weit abstehende Rippen bezeichnet; bei den besseren Libellen ist der ganze aus der Fassung sichtbare Theil des Cylinders von der Mitte aus in gleiche Intervalle getheilt (gradnirt), wodurch die Beurtheilung, ob die Blase genau in der Mitte steht, sehr erleichtert wird.



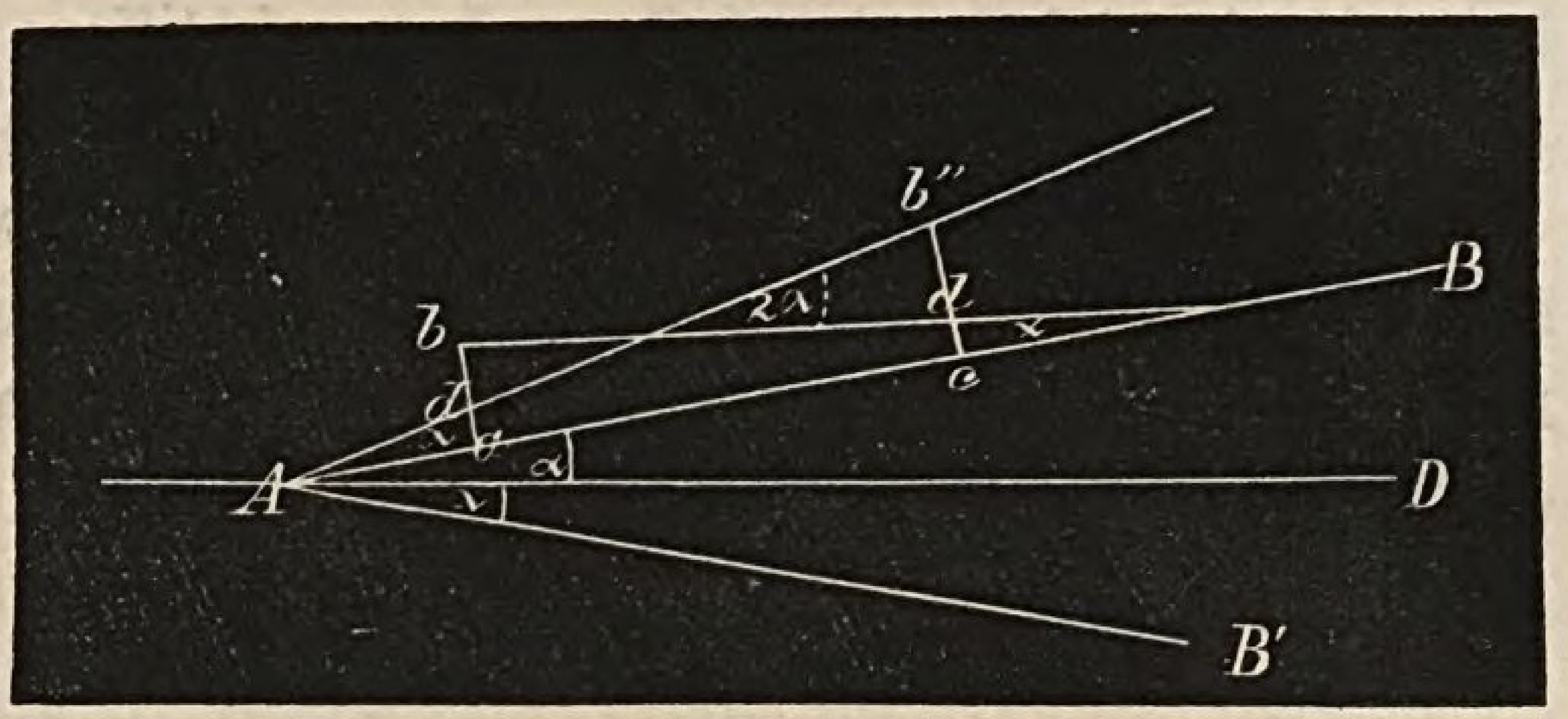
Weil nun die Endpunkte der Sehne AB, Fig. 83, nicht unmittelbar in der Ebene des Limbus liegen, so ist der Parallelismus der untern Ebene des Lineals mit jener Tangente, die durch die Mitte der Glasröhre gedacht wird, eines der wesentlichsten Erfordernisse der Libelle, und wenn auch der Parallelismus ursprünglich vollkommen vorhanden war, so kann doch die Möglichkeit nicht bestritten werden, daß dieser in der Folge durch irgend einen Umstand verloren gegangen ist; ihn wieder herzustellen, kann die Fassung mittelst einer an dem einen Ende angebrachten Schraube (Rektifikationsschraube) h bewegt werden.

Rektifikation der Libelle.

§. 84. Das einfachste Mittel, die Richtigkeit einer Libelle (ob nämlich die durch die Mitte der Glasröhre gedachte Tangente mit der untern Ebene des Lineals parallel ist) zu prüfen, wäre, die Libelle auf eine horizontale Ebene zu stellen, wo man sodann, falls die Blase die gehörige Stelle nicht einnimmt, blos von der Rektifikationsschraube den zweckmäßigen Gebrauch zu machen hätte; da man aber eben durch die Libelle erst die horizontale Lage einer Ebene beurtheilen soll, so ist der gewöhnliche Weg, eine unrichtige Libelle zu rektifiziren, folgender:

Man stelle die Libelle auf die Ebene des Limbus in die Richtung einer Horizontalschraube, und bringe mittelst dieser die Blase in die Mitte der Röhre, oder wie man zu sagen pflegt, bringe die Blase zum Einspielen; ist die Tangente mit der Ebene des Lineals, also auch mit der Ebene des Limbus nicht parallel, und hat z. B., Fig. 85 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), der Limbus die Lage AB, während die Tangente bd horizontal ist, so bilden diese einen

Winkel bBA = α und die Abstände der Tagente von der Limbusebene, nämlich ab und cd sind ungleich. Nun hebe man die Libelle, ohne die Lage des Limbus zu ändern auf, und kehre diese so um, daß der Ansatz ab genau auf den Ort kommt, wo früher cd, und cd



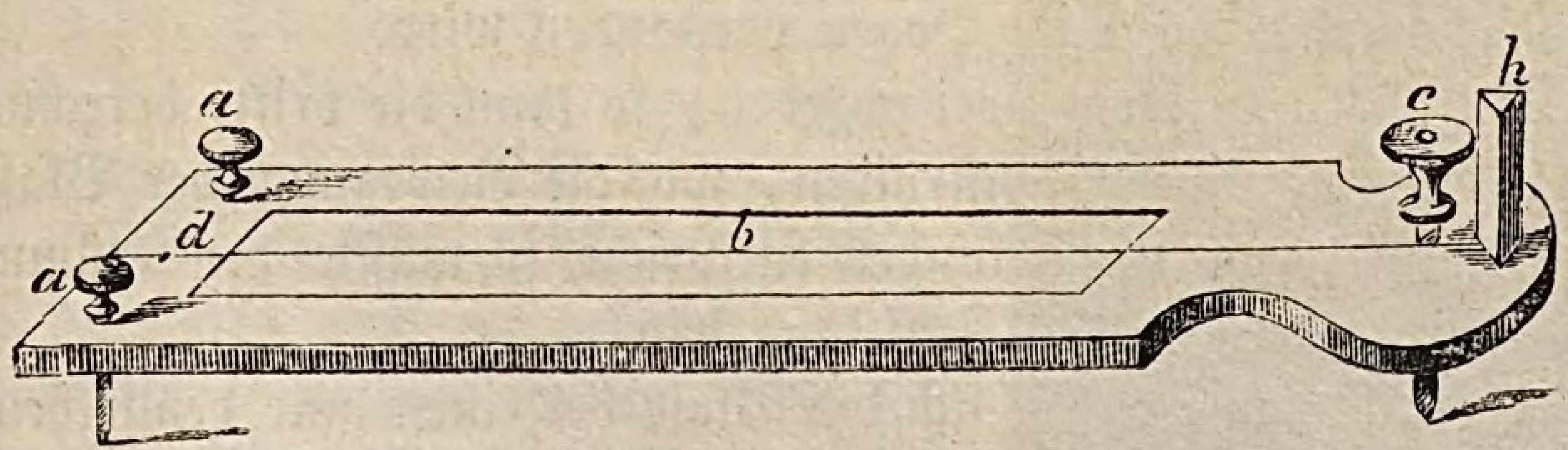
dorthin, wo ab war, oder kürzer gesagt, legt die Libelle um, so wird die erwähnte Tangente in dieser Lage die Richtung d′b′ haben, und weil ad′ = cd, cb′ = ab ist, so ist bBA = b′Ac = α; die Tangente b′ d′ aber wird, wie aus der Figur ersichtlich ist, gegen die horizontale Linie bd unter dem Winkel 2α geneigt sein; wird noch durch A eine horizontale Ebene AD gelegt, so ist der Limbus gegen diese unter dem Winkel α geneigt.

Da die Libelle in der Richtung einer Stellschraube des Limbus gelegt wurde, so bringe man mittelst dieser die Blase, ohne die Stellung der Libelle ad′ b′ c zu ändern, in die Mitte der Glasröhre, und zähle bei der Bewegung die Anzahl Umdrehungen, die nöthig waren, die Blase zum Einspielen zu bringen, diese sind nun ein genähertes Maß für den Winkel 2α, weil nämlich nach der Drehung die Tangente d′ b′ horizontal ist. Durch die Drehung kommt aber der Limbus AB in die Lage AB′, er ist daher unter der horizontalen Ebene AD und gegen diese unter dem Winkel α geneigt; dreht man also die halbe Anzahl der früher gemachten Schraubengänge nach der entgegengesetzten Richtung, so wird der Limbus um α bewegt, somit horizontal sein, und da man nun eine horizontale Ebene hat, so ist die Rektifikation der Libelle nach dem früher Gesagten sehr einfach.

Das beschriebene Verfahren muß sodann so oft wiederholt werden, bis die Blase ihren Stand nicht ändert, wenn auch die Libelle umgelegt worden ist. Man kann sich somit jeden Augenblick überzeugen, ob die Libelle rektifizirt ist; nimmt die Blase, nachdem die Libelle umgelegt worden ist, nicht genau ihren vorigen Stand ein, so muß die Hälfte dieser Abweichung durch die Rektifikationsschraube, die andere Hälfte durch die Stellschraube des Limbus weggebracht werden.

Ist die Glasröhre graduirt, und hat man bei einer nicht horizontalen Lage auf der einen Seite m auf der andern n Intervalle abgelesen, so muß die Blase beider Seiten bis $\frac{m + n}{2}$ Striche reichen, wenn die zu stellende Ebene horizontal ist.

Zur Rektifikation der Libellen ist auch die Fig. 86 dargestellte sogenannte

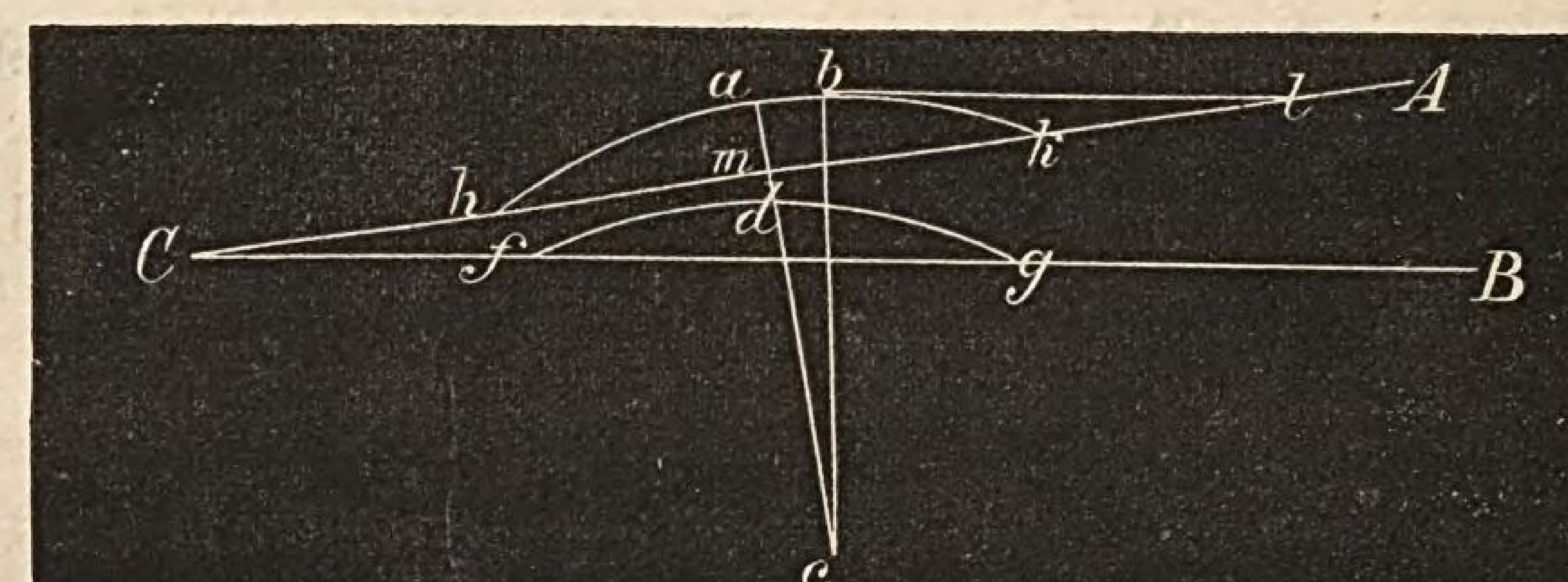


Justirvorrichtung sehr gut zu brauchen; sie besteht aus einem schmalen Brettchen, b ist eine in dieselbe eingelassene eben geschliffene Glasplatte, die Schrauben a, a, dienen die Ebene der Platte in einer Richtung horizontal zu stellen. Der Kopf der Schraube c ist in 10 Intervalle eingetheilt, h vertritt die Stelle eines Index zu dieser Eintheilung, und da man die Hälfte eines Intervalles noch recht gut schätzen kann, so läßt sich auf diese Art die Anzahl der an c gemachten Umdrehungen bis auf 0·05 einer Umdrehung genau angeben.

Empfindlichkeit der Libelle.

§. 85. Durch die Libelle soll der horizontale Stand des Limbus ermittelt werden, dies wird um so schärfer geschehen können, je größer der Bogen ist, um den die Blase aus der Mitte ausweicht, sobald der Limbus gegen den Horizont um einen und denselben Winkel geneigt ist.

Nehmen wir an Fig. 87 sei BC der Limbus in der horizontalen Lage, fdg



der obere Bogen einer Libelle, und d der Stand der Blase, so ist vermöge §. 83 fd = dg; wird der Limbus aus der horizontalen Lage um den Winkel ACB = α geneigt, und ist dann AC der Limbus, hak der Bogen der Libelle und ha = fd, so wird die Blase an einem Punkte b des Kreises hak zur Ruhe kommen, der zugleich der Berührungspunkt einer mit BC parallelen Tangente bl ist; und ab ist der Bogen, um welchen sich die Blase bewegt hat, der also mit dem Winkel α in irgend einer Verbindung steht.

Verbinden wir den Mittelpunkt a des Bogens hak mit der Mitte m der Sehne hk, so steht am auf die Sehne senkrecht und geht durch den Mittelpunkt des Kreises; und errichten wir in dem Berührungspunkte b auf die Tangente eine Senkrechte bc, so geht auch diese durch den Mittelpunkt des Kreises. Der gesuchte Punkt ist somit c; und weil bc auf bl, somit auch auf die mit bl parallelen Linie CB, ac aber auf AC senkrecht steht, so ist acb = α. Bezeichnen wir den Halbmesser des Kreisbogens hak mit r, ab mit d, so ist

$$d = r\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\; 1)$$

die gesuchte Gleichung, wo α im Bogen verstanden wird.

Sind von diesen Größen zwei gegeben, so kann die dritte berechnet werden; wollte man z. B. eine Libelle konstruiren, wo die Bewegung der Blase um eine Linie, einem Winkel von 30 Sekunden entspricht, so müßte der Krümmungshalbmesser des Glascylinders 47·75 Fuß lang sein.

Der Bogen d, um welchen sich die Blase bei einem und demselben Winkel α bewegt, wird als das Maß der Schärfe betrachtet, mit welcher eine Libelle die

Abweichung des Limbus von der horizontalen Lage anzeigt, und bei zwei Libellen ist jene desto schärfer, oder wie man auch sagt, desto empfindlicher, je größer der Bogen ist, um welchen die Blase bei gleichen Neigungswinkeln aus der Mitte ausweicht.

Um nun diesen Winkel kennen zu lernen, ist unter andern auch die Justirvorrichtung brauchbar. Ist nämlich l der senkrechte Abstand der Schraube c, nämlich ihrer Achse von der die beiden Schrauben a a verbindenden Linie und h die Höhe eines Schraubenganges gemessen, so ist der Bogen, welcher einem Schraubengange entspricht $\frac{h}{l}$, somit bekannt. Legt man also auf die Glasplatte eine Libelle und läßt die Blase in der Gegend, wo sie sonst beim Einspielen steht, durch die Schraube c eine Bewegung machen, so kann man in dem Glascylinder den Weg messen, an der Schraube die zugehörigen Windungen zählen, durch diese Angaben also die Empfindlichkeit der Libelle ausmitteln. Entsprechen dem in Sekunden ausgedrückten Winkel n Schraubenwindungen, so ist

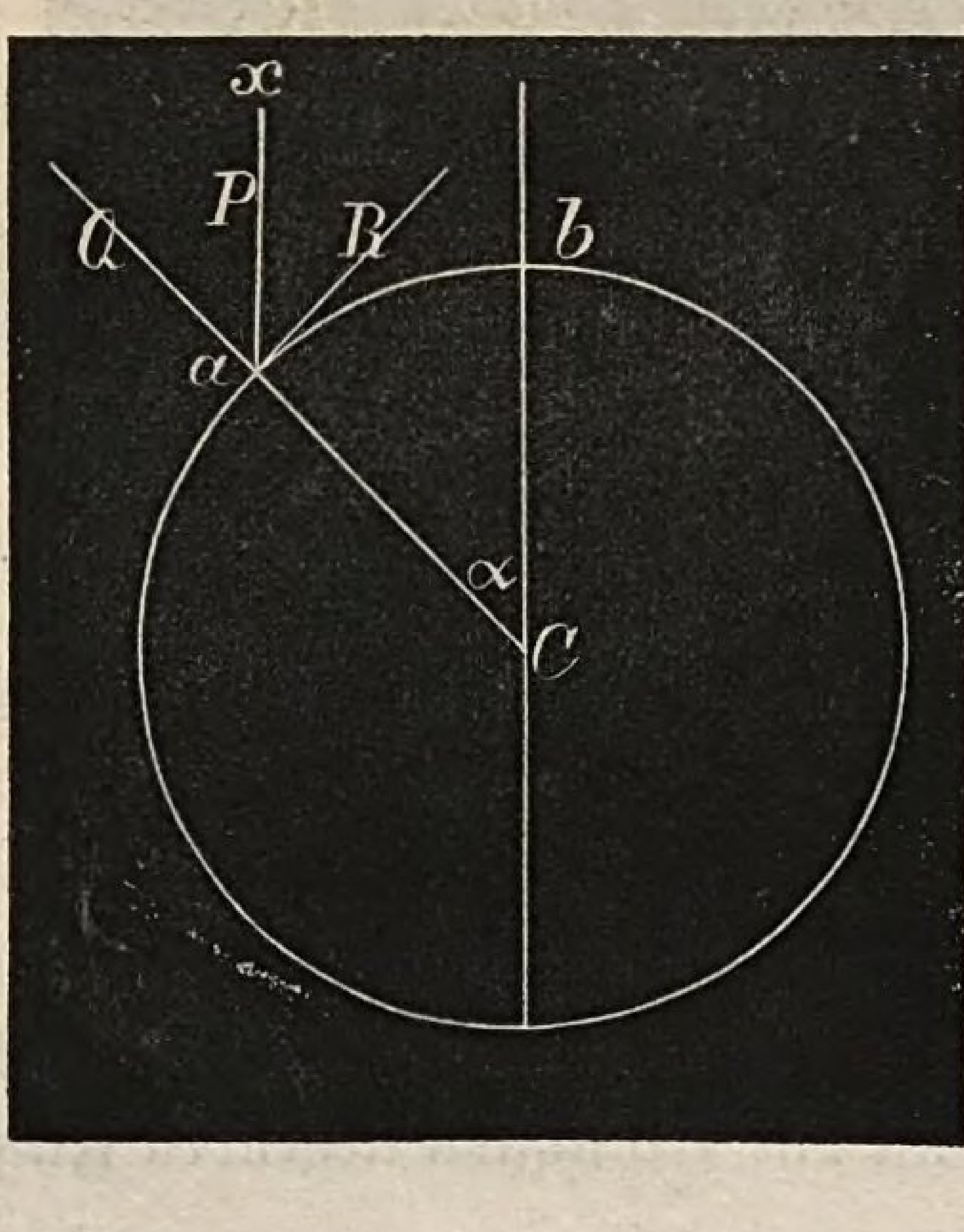
$$\alpha'' = \frac{nh}{l \sin. 1''} \quad \ldots\ldots 2).$$

Z. B. Bei einer Justirvorrichtung ist l = 24, h = $\frac{1}{100}$ Zoll, so ist der Werth eines Schraubenganges = 1′ 25″9; hat man nun die Schraube C um 1·35 Schraubengänge gedreht, dadurch die Blase um 1 Linie bewegt, so entspricht dieser ein Winkel von 1′ 56″, also nahe von zwei Minuten. Wenn man nun bei einer solchen aber nicht graduirten Libelle die Gleichheit der Abstände beider Enden bis auf eine halbe Linie richtig schätzt, so ist man einem Fehler von einer Minute ausgesetzt. Bei graduirten Libellen ist die Einstellung offenbar viel schärfer.

(Reichenbach war meines Wissens der Erste, welcher Libellen von jeder beliebigen Schärfe anfertigen konnte; er hat nämlich mit stählernen Dornen vom bekannten Halbmesser die innere Höhlung der Glasröhre ausgeschliffen, und dann aus der Gleichung 1) den Winkel bestimmt, welcher d = 1 Linie entspricht.

Es wäre für den Praktiker ein Vortheil, wenn bei den Libellen an ihrer Fassung der Winkel eingravirt stünde, der einer Bewegung der Blase um eine Linie entspricht.)

Die Empfindlichkeit einer Libelle hängt aber nicht blos von dem Krümmungshalbmesser der Röhre, sondern auch von der die Röhre füllenden Flüssigkeit und der Reibung dieser an der Röhrenwand ab.



Um den Einfluß der Reibung zu beurtheilen, sei Fig. 88 C der Mittelpunkt der Röhrenkrümmung, b die Mitte der einspielenden Blase bei einer horizontalen Ebene, also Cb vertikal, a der Schwerpunkt der ganzen unmittelbar an der Röhrenwand angrenzenden Luftschichte, wenn die Libelle nicht einspielt.

Diese Luftschichte wird durch die Flüssigkeit vertikal aufwärts nach ax gedrückt; dieser Auftrieb, den wir P nennen wollen, läßt sich in eine gegen die Glasröhre senkrechte und eine

diese berührende Componente zerlegen, bezeichnen wir erstere mit Q, letztere mit R, ist ferner α der Winkel, um welchen die Blase aus ihrem Mittelpunkte b ausweicht, so ist

$$Q = P \cos. \alpha, \quad R = P \sin. \alpha \; .\; .\; .\; .\; 3).$$

R veranlaßt eine Bewegung der Blase längs der Glasröhre, während von Q die Reibung abhängt. Ist ρ der Reibungscoeffizient zwischen Luft und Glas, so ist der Betrag des Reibungswiderstandes $\rho\, Q = \rho\, P \cos. \alpha$.

Nähert sich a dem Punkte b, so nimmt R ab, Q somit auch die Reibung dagegen zu, es wird somit bei einem Werthe α zwischen der bewegenden Kraft und dem Reibungswiderstande Gleichgewicht eintreten, in diesem Falle ist

$$P \sin. \alpha = \rho\, P \cos. \alpha \; .\; .\; .\; .\; 4)$$

und $\text{tang.}\, \alpha = \rho$.

Bezeichnen wir den Bogen ab mit α, so ist für sehr kleine Winkel, die wir hier immer voraussetzen können

$$\delta = r\, \alpha \; .\; .\; .\; .\; 5).$$

Auch folgt bei dieser Annahme aus Gleich. 4) $P\, \alpha = \rho\, P$, somit $\rho = \alpha$, daher können wir ρ statt α substituiren und erhalten

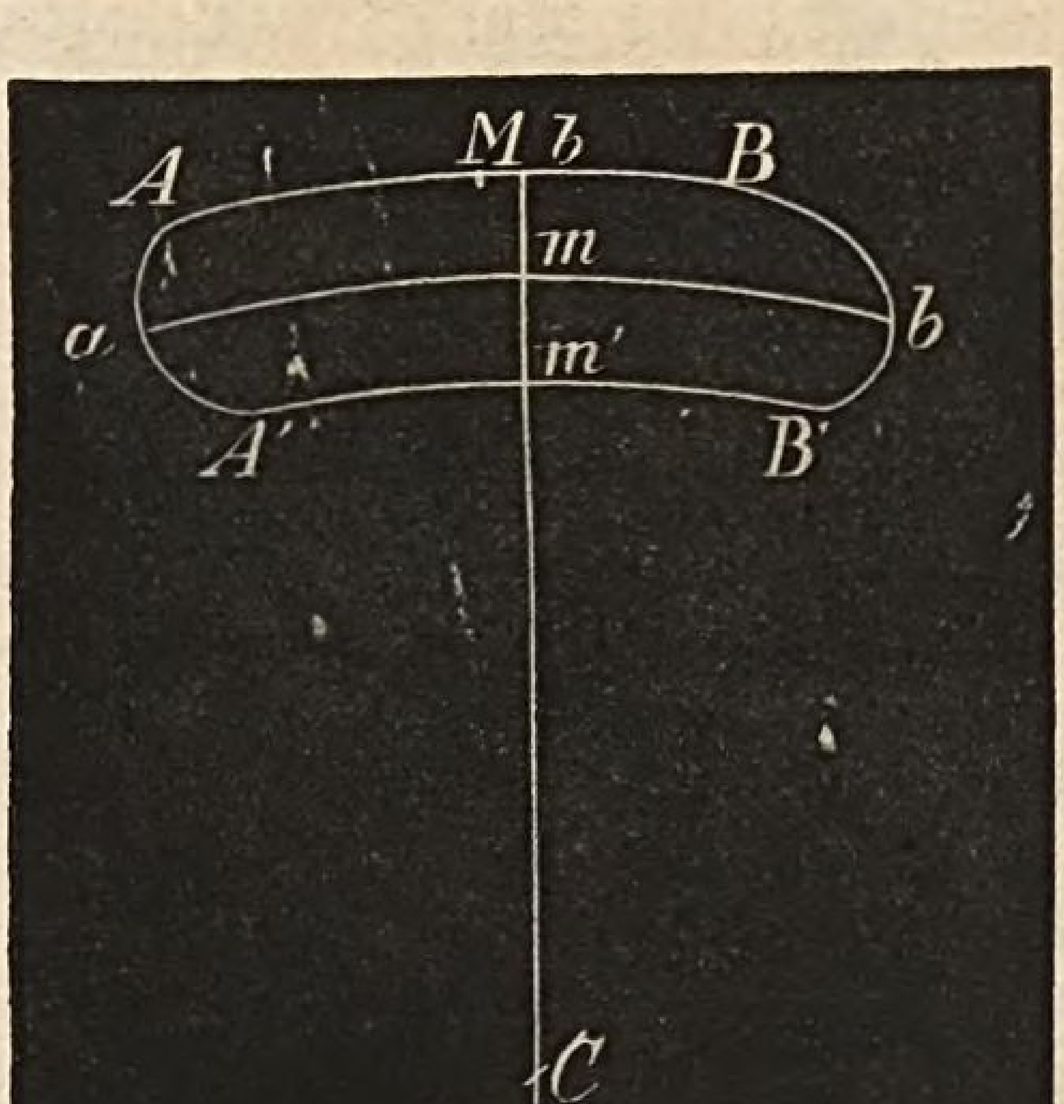
$$\delta = r\, \rho \; .\; .\; .\; .\; 6).$$

In dieser Gleichung bedeutet δ den Abstand, um welchen die Mitte der zunächst an der Glasröhre liegenden Theilchen der Blase, außerhalb der Mitte der Glasröhren stehen bleibt.

Sind mehrere Libellen mit derselben Flüssigkeit gefüllt, so ist ρ konstant, daher ihre Empfindlichkeit dem Krümmungshalbmesser der Röhre proportionirt.

Auf die weiter von der Glasröhre liegenden Punkte ist die Gleichung 6) ebenfalls anwendbar, nur ist dann unter ρ der Reibungscoeffizient von Luft und Luft zu verstehen, der jedoch verschwindend klein ist, so daß man selbst für sehr große Werthe von r, $r\, \rho = 0$ setzen kann.

Demnach wird die Reibung höchstens die Gestalt der Luftblase modifiziren können, insofern die an der Glasröhre unmittelbar angränzenden Luftschichten gegen die tiefer liegenden etwas zurück bleiben, wie die Fig. 89 versinnlicht, in welcher Cb die durch die Mitte der Glasröhre gehende Vertikale M, m, m' die Mittelpunkte A, B; a, b; A', B', dagegen die Enden der entsprechenden Luftschichten vorstellen. Da die Adhäsion nur in unmeßbar kleinen Distanzen wirkt, ihr Einfluß auf die tiefer gelegenen Luftschichten somit verschwindet, so werden die eben angestellten Betrachtungen auch in Beziehung auf die Adhäsion gelten, so daß Reibung und Adhäsion keinen Einfluß auf die Stellung der äußersten Enden der Luftblase ausüben.



Nicht so verhält es sich bezüglich der Adhäsion der Flüssigkeit, da diese allen Luftschichten einen Bewegungswiderstand gleichmäßig entgegensetzt.

Ist T die Kraft, welche erforderlich wird, um die an der Gränze zwischen Luft und Flüssigkeit liegenden Flüssigkeitstheilchen zu verschieben, so ist $P \sin. \alpha = T$,

daher $\sin.\alpha = \frac{T}{P}$; ist ferner V das Volumen der Luftblase, S das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, s jenes der Luft, so ist $P = V(S - s)$ oder wenn s gegen S vernachlässigt wird $P = VS$, somit

$$\sin.\alpha = \frac{T}{VS} \ldots . 7).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß α bei einem und demselben T desto größer ausfällt je kleiner V ist, d. h. eine kleinere Blase wird stärker hängen bleiben als eine größere; auch wird eine Flüssigkeit, für welche T bedeutend groß, S aber klein ist, wie z. B. Olivenöl und d. gl. ein starkes Hängenbleiben der Luftblase verursachen. Es ergibt sich hieraus die Nothwendigkeit, zur Füllung des Libellenglases nur Flüssigkeiten wie Weingeist, Schwefelkohlenstoff und dergleichen zu verwenden, deren Theile einen sehr hohen Grad von Beweglichkeit besitzen, so daß T nahe $= 0$ gesetzt werden kann.

Setzt man in die Gleichung 7) α statt $\sin.\alpha$, so ergibt sich wegen Gleich. 5)

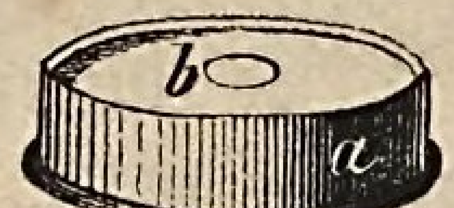
$$\delta = \frac{rT}{VS} \ldots . 8).$$

Der Einfluß der Zähigkeit einer Flüssigkeit wächst sonach ebenfalls mit dem Krümmungshalbmesser des Libellenglases; auch folgt aus dieser Gleichung, daß δ desto kleiner, die Libelle desto empfindlicher wird, je größer V (das Volumen der Luftblase) wird. Es wäre also gut bei Libellen große Luftblasen zu lassen, dies ist jedoch nur bei solchen möglich, welche innerhalb die vorausgesetzte Krümmung durch Schleifen erhalten haben. Die Glasröhren unserer gewöhnlichen Libellen werden in den Glashütten nur aus freier Hand gebogen, und sodann vom Mechaniker in kleine Stücke von der erforderlichen Länge geschnitten, bei diesen kann man also nicht voraussetzen, daß ihre innere Fläche streng die Krümmung eines Kreisbogens hat, und ist dieß nicht der Fall, so kann man nur einen sehr kleinen Theil eines solchen Stückes als kreisförmig gebogen ansehen, daher die Blase nur klein machen.

Dosenlibellen.

§. 86. Eine zweite Art von Libelle sind die wegen ihrer Aehnlichkeit mit einer runden Dose, sogenannten Dosenlibellen.

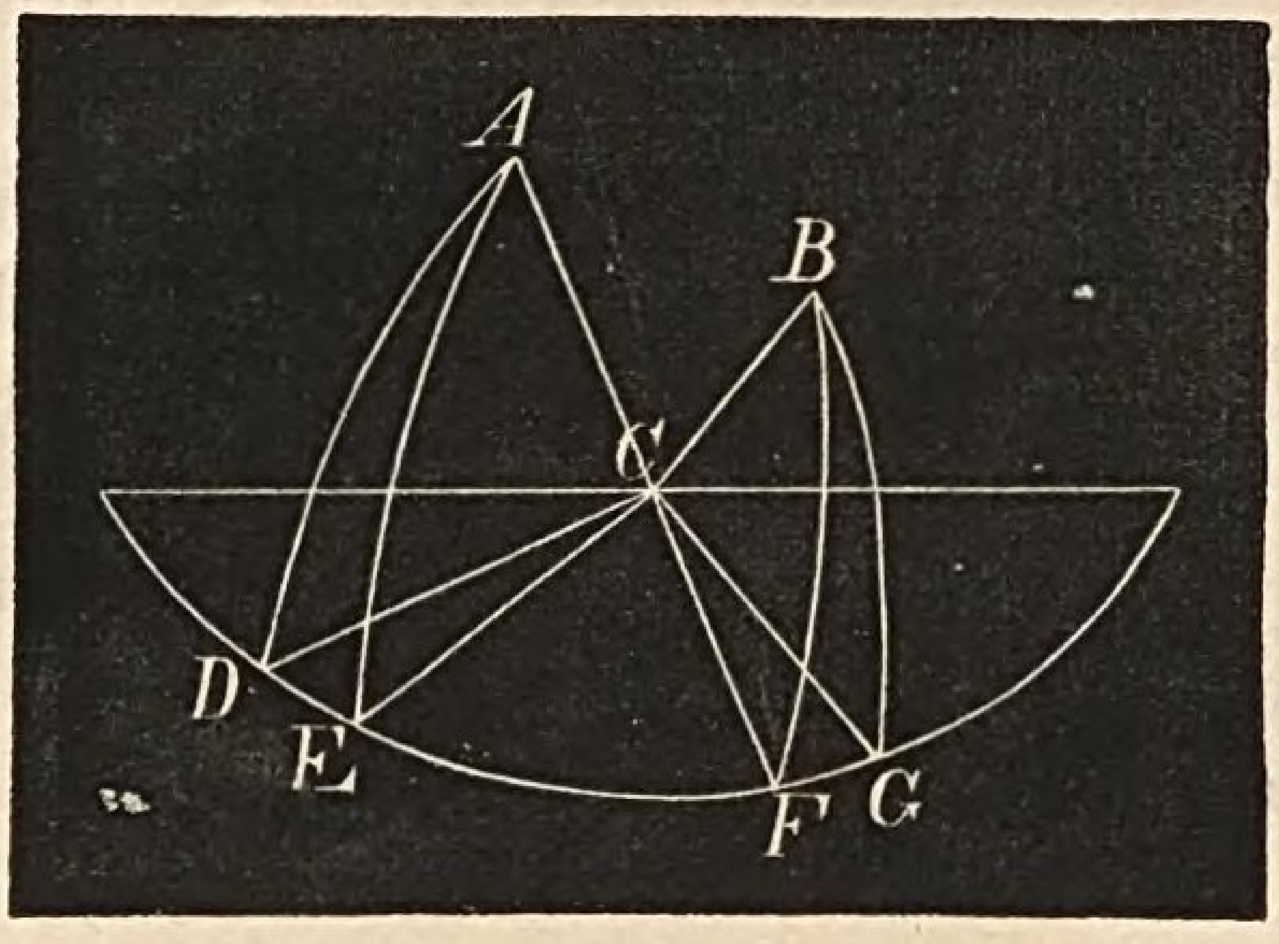
Eine solche besteht, wie die Fig. 90 zeigt, aus einem niedrigen cylindrischen Gefäße a, welches oben mit einer gläsernen Kugelschale b, der konvexe Theil nach aufwärts gekehrt, geschlossen ist; der innere Raum ist mit Weingeist bis auf einen kleinen Theil (die Blase) ausgefüllt; die Grundebene dieses Cylinders ist so abgeglichen, daß die Blase in der Mitte der Kugelschale zur Ruhe kommt, wenn die Libelle auf eine horizontale Ebene gestellt ist.



Die Dosenlibellen sind wenig im Gebrauche, erstens weil sie nicht so empfindlich sind wie die andern und zweitens weil man kein Mittel hat, sie zu rektifiziren, falls sie unrichtig sind. Ihre Richtigkeit prüft man dadurch, daß man sie auf eine horizontale Ebene stellt und nachsieht, ob die Blase bei jeder Lage ihren durch koncentrische Kreise angewiesenen Platz einnimmt. Mittelst der Libelle kann also der Fehler wegen der nicht horizontalen Stellung des Limbus beseitigt werden.

Die Visirebene soll auf die Ebene des Limbus senkrecht stehen.

§. 87. Ist die Visirebene auf jene des Limbus nicht senkrecht, und ist Fig. 91 C der Mittelpunkt des horizontal gestellten Limbus DEFG und zugleich der Scheitel des Winkels ACB; ACD die Visirebene durch den Punkt A, BCF dieselbe Ebene durch B und beide gegen den Limbus unter einem schiefen Winkel γ geneigt, so denken wir uns aus dem Punkte C mit dem Halbmesser = 1 eine Kugel beschrieben, welche den Limbus in dem Kreisbogen DEFG, die Visirebene in AD und BF, die Visur nach dem ersten Signale in A, nach dem zweiten in B, die durch AC und BC vertikalen Ebenen aber in AE und BG schneidet, und bezeichnen wir den Winkel ACE mit h, BCG mit h', so ist in dem bei E rechtwinkligen Dreiecke ADE,



$\sin. DE = \frac{\text{tang. } h}{\text{tang. } \gamma}$, *) und weil γ nahe 90^0 ist, während h in der praktischen Geometrie selten 45^0 erreicht, so ist der in Sekunden ausgedrückte Bogen $DE = \frac{\text{tang. } h}{\text{tang. } \gamma \sin. 1''}$. Eben so findet man aus dem bei G rechtwinkligen Dreiecke BFG, $FG = \frac{\text{tang. } h'}{\text{tang. } \gamma \sin. 1''}$.

Die richtige Projektion des Winkels ACB ist ECG, die durch das Instrument unter obiger Voraussetzung erhaltene DCF; bezeichnen wir DCF — ECG mit x, so ist x = DF — EG = DE — FG, und wenn für diese Größen die obigen Werthe substituirt werden

$$x'' = \frac{\text{tang. } h - \text{tang. } h'}{\text{tang. } \gamma \sin. 1''} \quad \ldots . 1).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß x Null werden kann, und zwar, wenn entweder $\gamma = 90$ oder $h = h'$, also im letztern Falle die anvisirten Objekte gleich hoch ober oder unter dem Limbus erscheinen.

Der Unterschied wird aber desto größer, je ungleicher die Höhenwinkel der beiden Signale, oder je kleiner der Neigungswinkel der Visirebene gegen den Limbus ist. Sollte das eine Signal unterhalb der Limbusebene erscheinen, so müßte der betreffende Höhenwinkel negativ, daher in der Gleichung 1) die Summe der Tangenten genommen werden.

---

*) Die Formeln zur Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke sind bekanntlich in den nachfolgenden Neper'schen Regeln enthalten.

1. Cosinus des Mittelstückes ist gleich dem Produkte der Cotangenten der anliegenden Stücke.

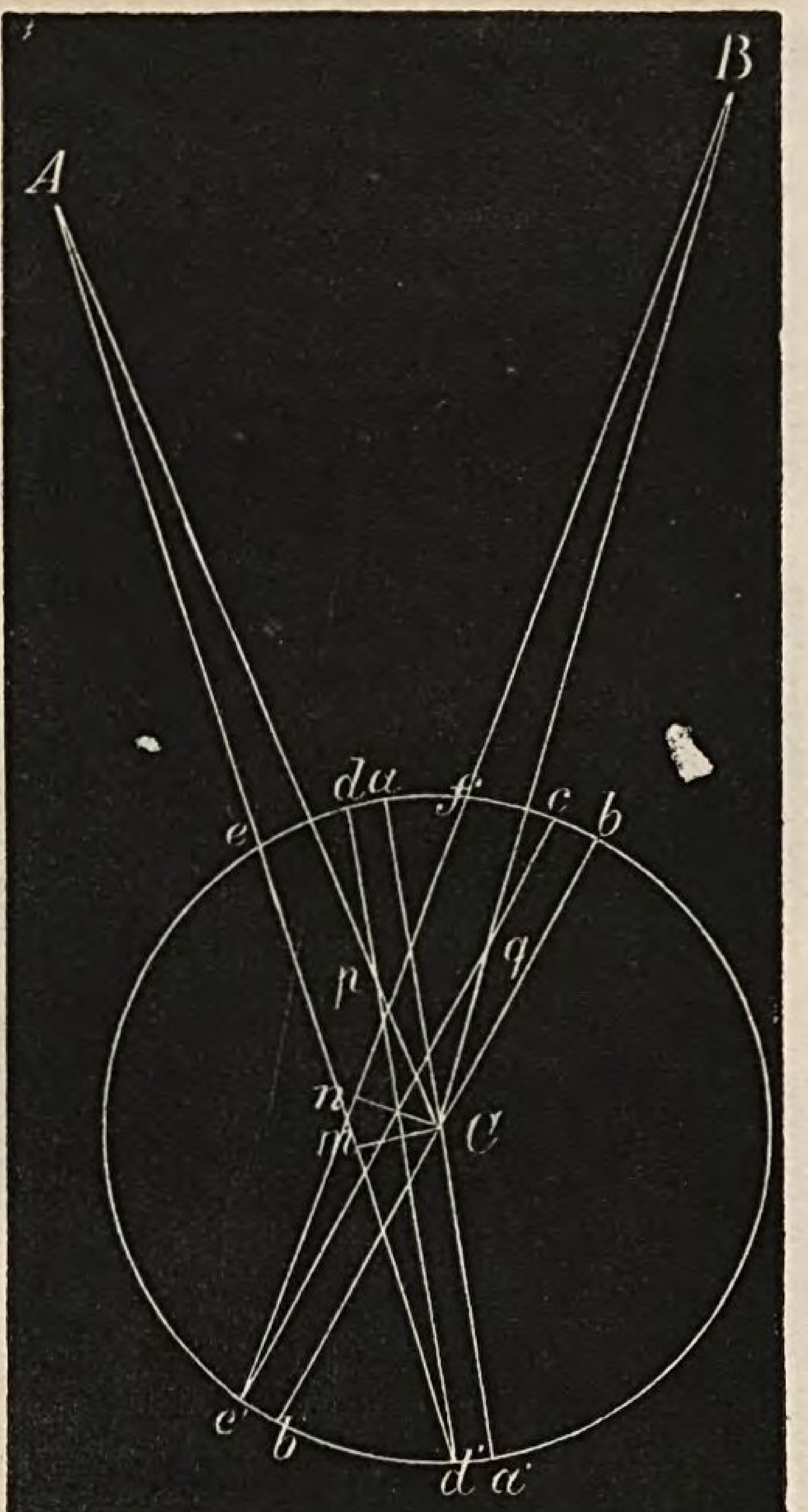
2. Cosinus des Mittelstückes ist gleich dem Produkte der Sinus der gegenüber liegenden Stücke.

Es sei $\gamma = 89^0\,30'$, $h = 20^0$, $h' = 5$, so ist $x = 8'\,17''7$, ist aber $h' = -5^0$, liegt also der anvisirte Punkt unter dem Horizonte des Limbus, so ist $x = 13'\,32''6$.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Visirebene auf dem Limbus genau vertikal stehen müsse, falls die horizontale Projektion eines Winkels mit großer Schärfe verlangt wird. Ob aber die Visirebene die erforderliche Lage habe, dies zu erkennen, und welche Mittel anzuwenden sind, ihr die vertikale Richtung zu ertheilen, falls sie gegen den Limbus unter einem schiefen Winkel geneigt ist, hängt von der Konstruktion jedes einzelnen Instrumentes ab, und wird an dem gehörigen Orte nachgetragen werden.

Die Visirebene soll durch den Mittelpunkt des Limbus gehen.

§. 88. Nehmen wir an, C Fig. 92 sei der Mittelpunkt des Limbus so auch der Drehungspunkt der Alhidade und ACB die richtige Projektion eines Winkels; als aber auf das Signal A visirt wurde, habe die Visirebene die Richtung ed' gehabt, der Index der Alhidade war in a; als nach B visirt wurde, sei die Visirebene c'f der Index in b gewesen, so hat man als Maß des Winkels aCb erhalten.



Da wir die Visirebene wohl senkrecht auf den Limbus; aber nicht parallel mit jenem Halbmesser Ca oder Cb, in welchem der Index der Alhidade liegt, angenommen haben, so denke man sich aus dem Okulardiopter c' und d' mit Ca und Cb parallele Linien cc', dd' gezogen, und die Winkel ed' d = fc' c = α gesetzt.

Nun ist $Apd = ACa = A + \alpha$; auf dieselbe Art $Bqc = BCb = B + \alpha$; $ACB = ACa + aCB$, $aCb = aCB + BCb$, daher $ACB - aCb = ACa - BCb = (A + \alpha) - (B + \alpha)$; somit der gesuchte Unterschied

$$x = A - B \;.\;.\;.\;.\;.\; 1).$$

Nennen wir den Abstand der Visirebene vom Mittelpunkte des Limbus $Cm = Cn = d$, die Entfernung der Signale vom Instrumente $AC = a$, $BC = b$, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACm, $\sin. A = \frac{d}{a}$, aus dem Dreiecke BCn, $\sin. B = \frac{d}{b}$, und weil die Winkel sehr klein sind, so kann statt dem Sinus der Bogen gesetzt werden; werden diese Werthe in die Gleichung 1) substituirt, so ist $x = \frac{d}{a} - \frac{d}{b}$ und in Sekunden ausgedrückt

$$x'' = \frac{d\,(b - a)}{ab \sin. 1''} \;.\;.\;.\;.\;.\; 2).$$

Aus dieser Gleichung sehen wir, daß der Unterschied Null wird, wenn entweder $d = o$ oder $a = b$ ist; also wenn entweder die Visirebene durch den Mittelpunkt des Limbus geht oder wenn die anvisirten Signale gleich weit entfernt sind. Da der Winkel α in der Gleichung 1) nicht vorkommt, so schließen wir daraus, daß, wenn schon die Visirebene von dem Mittelpunkte des Limbus um die Größe d absteht, es gleichgiltig ist, welchen Winkel die Visirebene und jener Halbmesser bilden, in welchem der Index der Alhidade liegt, und daß, wenn die Visirebene durch den Mittelpunkt des Limbus geht, der Index der Alhidade nicht in dieser Ebene zu liegen braucht.

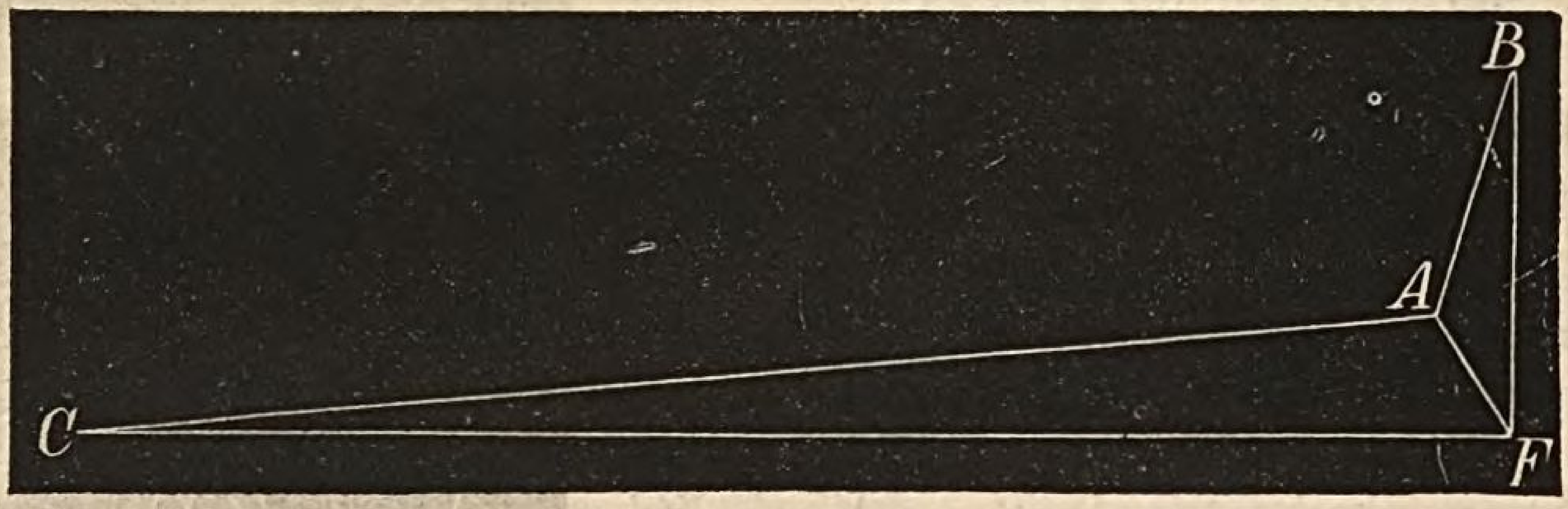
Es sei $d = 0{\cdot}2$ Zoll, $a = 80$, $b = 400$ Klafter, so ist $x = 5''7$, wenn dagegen $d = 4$ Zoll, was auch bei einigen Instrumenten vorkommt, und $a = 80$, $b = 40$ Klafter angenommen wird, so ist $x = -2' 23''$ und kann leicht in speziellen Fällen noch mehr betragen.

Will man also mit einem Instrumente eine große Schärfe der Messung erreichen, so muß der Abstand der Visirebene von dem Mittelpunkte des Limbus auf Null gebracht werden. Auf welche Art dieß erreicht werden kann, werden wir bei der Rektifikation der Instrumente nachtragen.

Aus diesem Paragraph folgt ebenfalls die Nothwendigkeit, die Signale wo möglich in eine ziemlich gleiche Entfernung vom Standpunkte zu stellen.

Die Signale sollen vertikal gestellt sein.

§. 89. Es sei Fig. 93 AB das schief gestellte Signal, C der Punkt, von



welchem es anvisirt wurde, und B der anvisirte Punkt; BF eine vertikale Linie. Wäre das Signal gehörig gestellt worden, so wäre CA die horizontale Projektion der Visur, so aber ist es CF und der gemessene Winkel um ACF fehlerhaft bestimmt.

Setzen wir $CA = CF = D$, $AB = d$, den Winkel $CAF = \delta$ und $BAF = \gamma$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BAF, $AF = d \cos. \gamma$; in dem schiefwinkligen Dreiecke CAF, $\sin. C = \frac{d \cos. \gamma \sin. \delta}{D}$, wobei sin. C offenbar nicht groß sein kann.

Da nun der gemessene Winkel um C entweder zu groß oder zu klein gefunden wird, je nachdem CF außerhalb oder innerhalb seiner Schenkel liegt, so ist C der begangene Fehler, bezeichnet man ihn in Sekunden ausgedrückt mit x'', so ist

$$x'' = \frac{d \cos. \gamma \sin. \delta}{D \sin. 1''} \quad \ldots . \; 1).$$

Nehmen wir $d = 2$, $D = 200$ Klafter, $\gamma = 88^0$, $\delta = 90^0$, so ist $x = 1' 12''$, also nicht unbedeutend.

Aus dieser Gleichung folgt

1. daß x Null werden kann, und zwar, wenn entweder $\gamma = 90^0$ oder $\delta = 0$ und auch wenn $\delta = 180^0$ ist;

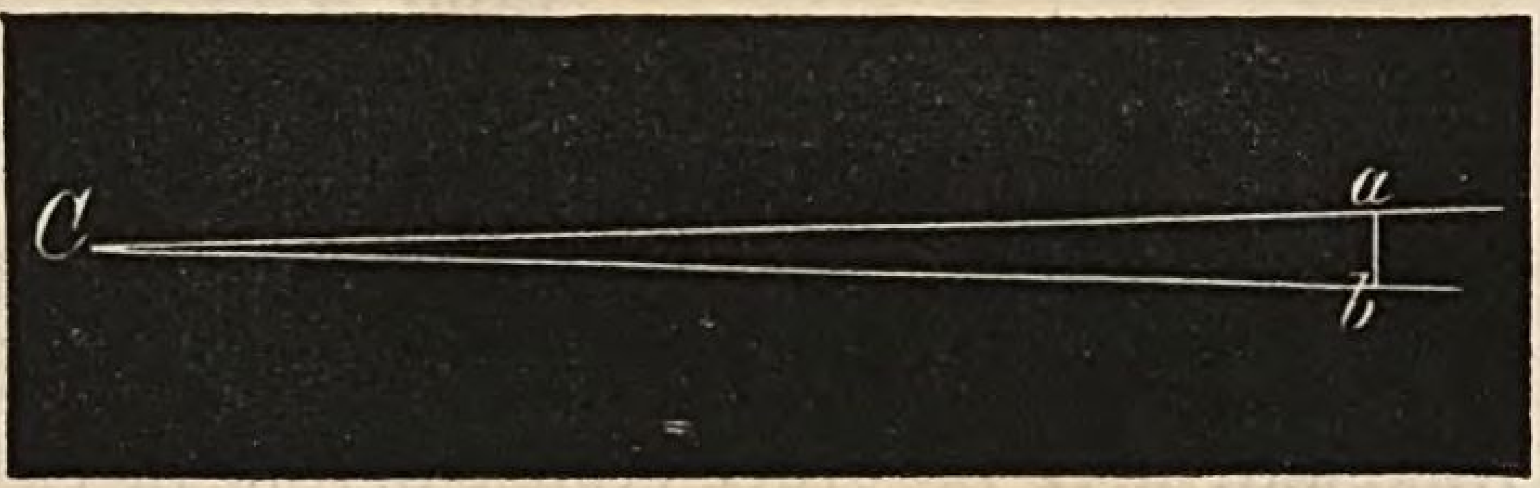
2. daß bei demselben d, γ, D; x ein Größtes wird, wenn $\delta = 90^0$ oder 270^0 wird;

3. daß bei gleichen γ, δ und D der Werth x desto größer wird, je größer d ist; aus diesem Grunde ist es räthlich, die Signale so tief als möglich anzuvisiren, und diese Vorsicht um so mehr dann anzuwenden, wenn die Signale, während des Visirens frei mit der Hand gehalten werden. Werden die Signale dagegen in die Erde eingegraben, so muß ihre vertikale Stellung mittelst eines Bleilothes untersucht werden.

Die Visirebene soll eine mathematische Ebene sein.

§. 90. In dem Falle als die Visirebene durch einen Faden oder durch ein schwarzes Pferdehaar des Objektiv-Diopters bestimmt ist, hat man statt einer einzigen zwei das Haar tangirende Ebenen, welche sich in einer durch das Okular gehenden vertikalen Linie schneiden.

Will man den Winkel bestimmen, unter welchem die erwähnten Ebenen gegen einander geneigt sind, so sei Fig. 94 $ab = d$ der Durchmesser des Fadens, C ein Punkt des Okular-Diopters, $Ca = Cb = D$ die Entfernung der beiden Diopter, der gesuchte Winkel $aCb = \alpha$, so folgt, weil dieser nur klein sein kann,



$$\alpha'' = \frac{d}{D \sin. 1''} \quad \ldots . \; 1).$$

Der Winkel α wird demnach desto größer, je größer d und je kleiner D wird, also je kleiner die Entfernung der beiden Diopter bei derselben Dicke des Objektivfadens ist.

Nehmen wir z. B. $d = 0'1$ Linie, $D = 30$ Zoll an, so ist $\alpha = 57{\cdot}3$ Sekunden, wäre aber $d = 0{\cdot}1$ Linie, $D = 8$ Zoll, so ist $\alpha = 3' 35''$.

Bei dieser Entfernung der Diopter würde eine Figurstange von zwei Zoll Durchmesser aus einer Distanz von 500 Klafter anvisirt, von dem Objektivfaden ganz gedeckt, weil das Signal aus dieser Entfernung gesehen, nach der obigen Gleichung nur unter einem Winkel von 11·5 Sekunden erscheint; die Visur ist somit einem Fehler unterworfen, der nicht beseitigt werden kann, weil er durch die Konstruktion der Diopter bedingt ist.

Dieses ist aber nicht der einzige Uebelstand, der bei dieser Art Diopter stattfindet, ein zweiter ist der, daß das Auge das Objektivhaar und das im Verhältniß der Entfernung der beiden Diopter weit entfernte Signal zugleich deutlich sehen soll.

Das Auge besitzt allerdings die merkwürdige Eigenschaft, die auffallenden Strahlen so zu brechen, daß das Bild des Objektes auf der Netzhaut erscheint, die Strahlen mögen von einem weit entfernten oder nahen Objekte kommen, aber nicht von beiden Entfernungen zugleich, und es braucht immer eine kurze Zeit bis sich das Auge so adjustirt, daß es die Strahlen aus einer andern Entfernung auf die Netzhaut bringt. Liest man z. B. längere Zeit in einem Buche in der Entfernung von 8 bis 10 Zoll, und blickt man dann auf einen entfernten Gegenstand, so wird man bemerken, daß das Auge eine kurze Zeit braucht, auch diesen Gegenstand deutlich zu sehen.

Ist die Entfernung des Gegenstandes unter 8 Zoll, so vermag nur ein kurzsichtiges Auge noch deutlich zu sehen.

Nun soll aber das Auge bei einer kurzen Entfernung der Diopter den Objektivfaden und das Signal zugleich deutlich sehen, was nicht angeht, daher sieht man entweder das eine oder das andere scharf, je nachdem man seine Aufmerksamkeit auf den Faden oder das Objekt richtet, und die Visur ist unsicher.

Ein dritter nachtheiliger Umstand der Diopter ist der, daß mittelst derselben, wenn sie mit der Alhidade fest verbunden sind, die Objekte nicht in einer beliebigen Höhe oder Tiefe über den Limbus anvisirt werden können; denn setzen wir die Entfernung der beiden Diopter $= D$, die Länge des Objektivfadens $= h$ und den Höhenwinkel, bis zu welchem man oberhalb der horizontalen Limbus-Ebene visiren kann, $= \alpha$, so ist

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{h}{D} \quad \ldots\ 2).$$

Wird z. B. die Entfernung $= 30$, $h = 4$ Zoll angenommen, so ist $\alpha = 7^0\ 39'\ 44''$, also nicht einmal 8 Grade; hat man mit einem Winkelinstrumente, an dem solche Diopter angebracht sind, ein Signal anzuvisiren, dessen Fußpunkt über 8 Grade erhöht ist, so ist es nicht möglich.

Diesen dritten Nachtheil der Diopter kann man zwar dadurch beseitigen, daß man demselben eine eigenthümliche von der Alhidade unabhängige Bewegung und zwar in der vertikalen Ebene ertheilt, die erstern zwei aber haben in der Konstruction der Diopter ihren Grund, lassen sich an diesen nicht vermeiden.

Vortheile, wenn die Alhidade mit einem Fernrohre verbunden wird.

§. 91. Aus der Theorie der Fernröhre ist bekannt, das jedes Fernrohr nur eine optische Achse hat, durch diese Linie ist also eine Visirebene bestimmt; allein da auf das Objektivglas von unendlich vielen Punkten Strahlen auffallen und diese in eben so vielen Punkten vereinigt werden, so muß das optische Bild jenes Objektes, was in der Achse liegt, von allen andern unterschieden werden. Dies geschieht dadurch, daß man in jener Ebene, in welcher das Bild entsteht, zwei senkrecht auf einander stehende äußerst feine Fäden (Spinnenfäden) so befestiget, daß ihr Durchschnittspunkt in der optischen Achse liegt, jener repräsentirt die letztere.

Weil aber die Entfernung des Bildes vom Objektivglase durch die Distanz des pointirten Punktes bedingt ist, so muß entweder das Objektivglas oder die

Ebene des Fadenkreuzes längs der optischen Achse verschiebbar sein, damit man dem Faden jedesmal den gehörigen Ort anweisen kann.

Ist nun das Fadenkreuz und das Bild des anvisirten Objektes in eine Ebene gebracht, so erscheinen sie dem Auge gleich deutlich; durch das Fernrohr ist somit der zweite im vorigen Paragraph besprochene Uebelstand vollkommen behoben, und da das Fadenkreuz aus sehr dünnen Spinnenfäden besteht, so ist auch der erste dort angeführte Anstand beseitigt, indem die Fäden, zugleich aber auch das anvisirte Signal vergrößert erscheinen.

Ist das Fernrohr noch in einer vertikalen Ebene beweglich, so sind alle Nachtheile der gewöhnlichen Diopter beseitigt, unter einem aber mehrere Vortheile erreicht, die wir in der Folge §. 95 besprechen wollen.

§. 92. Die gewöhnlichsten Arten, dem Fernrohre eine von der Alhidade unabhängige Bewegung in der vertikalen Ebene zu ertheilen, sind folgende:

1. Auf die Alhidade wird eine Säule vertikal aufgesetzt, diese oberhalb konisch ausgehöhlt, so, daß die Achse dieses Kegels horizontal ist; auf das Fernrohr dagegen wird senkrecht ein abgestutzter Kegel von der Größe der eben erwähnten Oeffnung befestigt, und der Kegel in dieser vermöge einer an seinem Ende eingeschnittenen Schraube gehalten.

Da die Achse des Kegels horizontal, zugleich aber auf dem Fernrohre senkrecht steht, so kann das letztere unabhängig von der Alhidade in der vertikalen Ebene bewegt werden.

2. Auf die Ebene der Alhidade werden zwei Säulen oder Träger vertikal aufgesetzt, die oben Vertiefungen (Achsenlager), diese in gleicher Höhe ober der Alhidade haben; an das Fernrohr werden zwei Cylinder vom gleichen Durchmesser so befestigt, daß ihre Achsen eine gerade und auf die optische Achse des Fernrohrs senkrecht stehende Linien bilden; diese Cylinder passen genau in die Achsenlager, daher ist die Bewegung des Fernrohrs in der vertikalen Ebene von der Alhidade unabhängig.

Bei dieser Bewegung ist im 1. Falle die Achse des Kegels, im 2. die der Cylinder die Drehungsachse des Fernrohrs.

Soll nun durch die verschiedene Neigung des Fernrohrs gegen den Horizont kein Fehler in dem gemessenen Winkel entstehen, so ist erforderlich:

1. Daß die Drehungsachse des Fernrohrs horizontal ist, und daß sie auf die optische Achse senkrecht stehe.

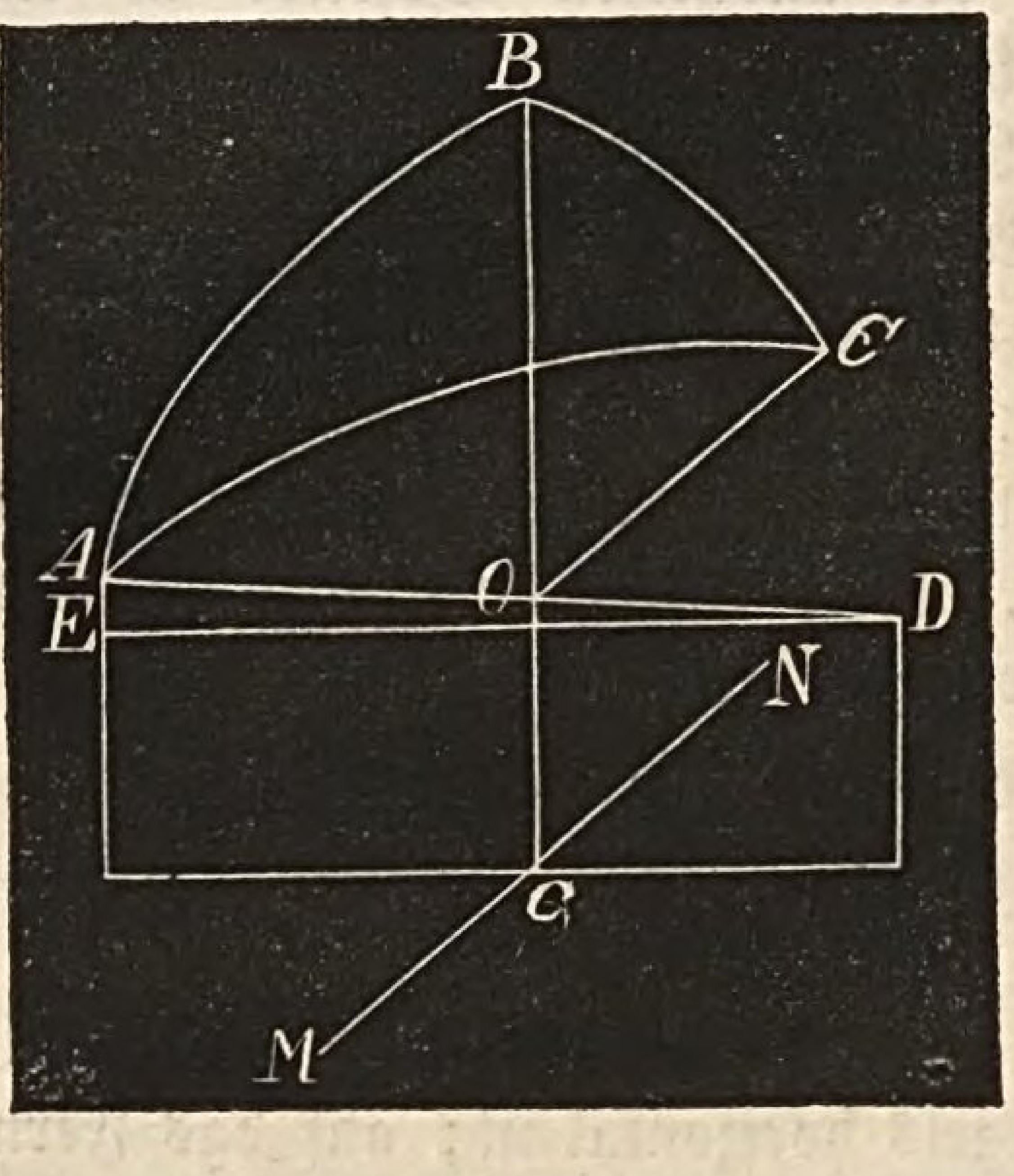
2. Daß die Drehungs- und optische Achse sich schneiden, und

3. die erstere in der durch den Mittelpunkt des Limbus gehenden vertikalen Ebene liege.

Untersuchung des Einflusses, wenn die Drehungsachse des Fernrohrs nicht horizontal und die optische Achse auf jene nicht senkrecht ist.

§. 93. Ist die optische Achse auf die Drehungsachse nicht senkrecht, so beschreibt jene unter der Voraussetzung, daß sich beide Achsen schneiden, bei der drehenden Bewegung des Fernrohrs einen gewöhnlichen Kegel, dessen Scheitel in

dem Durchschnittspunkte beider Achsen liegt, die Drehungsachse ist zugleich die Achse des Kegels.



In der Fig. 96 sei AD die Drehungsachse und gegen die horizontale Linie CE unter dem Winkel α geneigt, CO sei die optische Achse und der Winkel, welchen diese beiden Achsen einschließen, nämlich AOC $= 90 + \delta$, endlich sei das Fernrohr auf ein Objekt einvisirt, dessen Zenithdistanz BOC $=$ u ist, wo BO eine in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte beider Achsen errichtete Vertikale ist.

In dem sphärischen Dreiecke ABC ist AB $= 90 - \alpha$, BC $=$ u, AC $= 90 + \delta$, bezeichnen wir den Neigungswinkel zwischen den beiden vertikalen Ebenen ABO und BOC mit γ, so ist

$$\cos. AC = \cos. AB \cos. BC + \sin. AB \sin. BC \cos. ABC.$$

Daraus folgt, wenn die angenommenen Werthe substituirt worden sind

$$\cos. \gamma = - \frac{\sin. \alpha \cos. u + \sin. \delta}{\cos. \alpha \sin. u} \quad \ldots . 1).$$

Ist c der Drehungspunkt der Alhidade MN, so ist einleuchtend, daß so lange α, u und δ unverändert bleiben, und nur die Alhidade um irgend einen Winkel bewegt wird; auch die optische Achse OC denselben Winkel beschreiben muß und umgekehrt; wird also das Fernrohr auf ein zweites mit der ersten Visur gleichhohes Objekt einvisirt, so wird die Alhidade in c genau denselben Winkel angeben, um welches das Fernrohr von einem Signal zum andern bewegt worden ist und es wird unter dieser Voraussetzung kein Fehler in dem zu messenden Winkel entstehen.

Ganz anders verhält sich die Sache, wenn das zweite anvisirte Objekt mit dem erstern nicht gleich hoch ist, wenn sich also der Winkel u ändert, denn dann wird, weil die optische Achse einen Kegel beschreibt, dessen Achse die Drehungsachse ist, der Winkel ABC sich ändern, während der Stand der Alhidade auch unverändert bleiben könnte, also durch die Erhöhung oder Senkung des Fernrohrs entsteht ein Fehler in dem gemessenen Winkel; und zwar wird vermöge des angenommenen Werthes von δ, γ größer, wenn u abnimmt.

Nehmen wir an, der Abnahme des Winkels u um y entspreche eine Zunahme des Winkels γ um x, so haben wir vermöge Gleichung 1)

$$\cos. (\gamma + x) = - \frac{\sin. \alpha \cos. (u - y) + \sin. \delta}{\cos. \alpha \sin. (u - y)} \quad \ldots . 2),$$

der Unterschied beider Gleichungen gibt

$$\cos.(\gamma + x) - \cos.\gamma = - \frac{\sin. \alpha \cos. (u - y) + \sin. \delta}{\cos. \alpha \sin. (u - y)} + \frac{\sin. \alpha \cos. u + \sin. \delta}{\cos. \alpha \sin. u},$$

und da α und δ, daher auch x kleine Winkel sind, so können die Sinus derselben den Bogen, die Cosinus $= 1$ gesetzt, ferner weil AB und AC nahe 90^0

betragen, so ist γ ebenfalls sehr wenig von 90^0 verschieden, es kann somit $\sin. \gamma = 1$ gesetzt werden, hiedurch verwandelt sich die letzte Gleichung nach einer einfachen Reduktion in

$$x'' = \frac{2\delta'' \sin. \frac{y}{2} \cos. (u - \frac{y}{2}) + \alpha'' \sin. y}{\sin. u \sin. (u - y)} \; .\,.\,.\,.\, 3).$$

Diese Formel ist nur eine spezielle Auflösung der fraglichen Aufgabe; diese in der größten Allgemeinheit aufzulösen, müßte man $AB = 90 \pm \alpha$, $AC = 90 \pm \delta$ annehmen, $BC = u$, $ABC = \gamma$ beibehalten, und mit diesen Daten das Dreieck ABC auflösen; dann würde man für x vier Werthe erhalten, wovon jener Gleichung 3) nur der größte positive ist.

Wird statt der Zenithdistanz die Höhe des ersten Objektes in diese Gleichung eingeführt, so ist $u = 90 - h$, daher der in Sekunden ausgedrückte Fehler

$$x'' = \frac{2\,\delta'' \sin. \frac{y}{2} \sin. (h + \frac{y}{2}) + \alpha'' \sin. y}{\cos. h \cos. (h + y)} \; .\,.\,.\,.\, 4).$$

Dieser Ausdruck kann Null werden, wenn $y = 0$ angenommen wird; dies darf uns aber nicht als etwas Neues erscheinen, diese Bedingung haben wir in die Formel bei ihrer Ableitung gelegt.

Wird in 4) $\alpha = 0$ gesetzt, so bekommen wir

$$x'' = \frac{2\,\delta'' \sin. \frac{y}{2} \sin. (h + \frac{y}{2})}{\cos. h \cos. (h + y)} \; .\,.\,.\,.\, 5)$$

als jenen Fehler, welcher durch die nicht senkrechte Stellung der optischen Achse auf die Umdrehungsachse entsteht.

Wird dagegen in Gleichung 4) $\delta = 0$ gesetzt, so ist

$$x'' = \frac{\alpha'' \sin. y}{\cos. h \cos. (h + y)} \; .\,.\,.\,.\, 6)$$

der Fehler wegen der Neigung der Drehungsachse des Rohrs.

In dieser Gleichung kommt cos. h im Nenner; diese Ausdrücke könnten somit auch unendlich groß werden, doch der Fall, daß $h = 90^0$ wird, kann in der praktischen Geometrie keineswegs vorkommen. Auch folgt aus Glichung 5), daß in dem Falle als δ und α gleich bezeichnet, ferner h positiv und größer als $\frac{y}{2}$ ist, die Ausdrücke in Gleichung 5) und 6) gleiche Zeichen erhalten.

Lassen wir $h = 30^0$, $y = 10^0$, $\alpha = \delta = 30' = 1800''$ bedeuten, so folgt aus Gleich. 5) $x = 4'31{\cdot}3$, aus Gleich. 6) $x = 7'51''1$, also aus Gleich. 4) $x = 12'22''4$; bei dieser Voraussetzung würde somit die Achse des Fernrohrs, sobald sie von 30^0 auf 40^0 erhöht wird, einen Winkel von $12'\,22''$ beschreiben, wenn die Alhidade auch unbewegt bliebe.

Ferner ist aus diesem Beispiele ersichtlich, daß der Fehler wegen der Neigung der Drehungsachse jenen wegen der nicht richtigen Stellung der optischen Achse übertreffe.

Ist $h = 0$, also der anvisirte Punkt des ersten Signals in der durch die Drehungsachse gelegten horizontalen Ebene, so folgt aus Gleichung 5)

$$x'' = \delta'' \text{ tang. } y \text{ tang. } \frac{y}{2} \; .\,.\,.\,.\, 7).$$

Liegt dagegen der erste der anvisirten Punkte und die optische Achse in einer horizontalen Ebene, so übergeht die Gleichung 6) in

$$x'' = \alpha'' \text{ tang. } y \; .\,.\,.\,.\, 8).$$

Behalten wir die Werthe $\alpha = \delta = 1800''$, $y = 10^0$ auch für diese Gleichungen bei, so erhalten wir Gleich. 7) $x = 27{\cdot}8''$, aus Gleich. 8) $x = 5'\ 17{\cdot}4''$.

Hier ist der Fehler, welcher durch die Neigung der Drehungsachse entsteht, gegen jenen, wenn die optische und Drehungsachse keinen rechten Winkel bilden, auffallend groß.

Nehmen wir in Gleich. 5) δ und h konstant an, und suchen den Werth y, welcher x zu einem Maximum macht, so finden wir nach einer kleinen Reduktion

$\frac{dx}{dh} = \sin.\,(h + y) \cos.\,h = 0$, also $\sin.\,(h + y) = 0$, somit $y = -h$.

Dadurch verwandelt sich die Gleichung 5) in

$$x = -\,\delta'' \operatorname{tang.} h \operatorname{tang.} \frac{h}{2} \ldots . \quad 9).$$

Aber $y = -h$ findet dann statt, wenn der pointirte Punkt des zweiten Signals und die Drehungsachse in einer horizontalen Ebene liegen; auch wird x bei demselben δ desto größer, je größer h, also je größer der Unterschied in den Höhen der anvisirten Punkte ist. Lassen wir $h = 30^0$, $\delta = 30'$ bedeuten, so ist $x = -\,4'\ 38''5$.

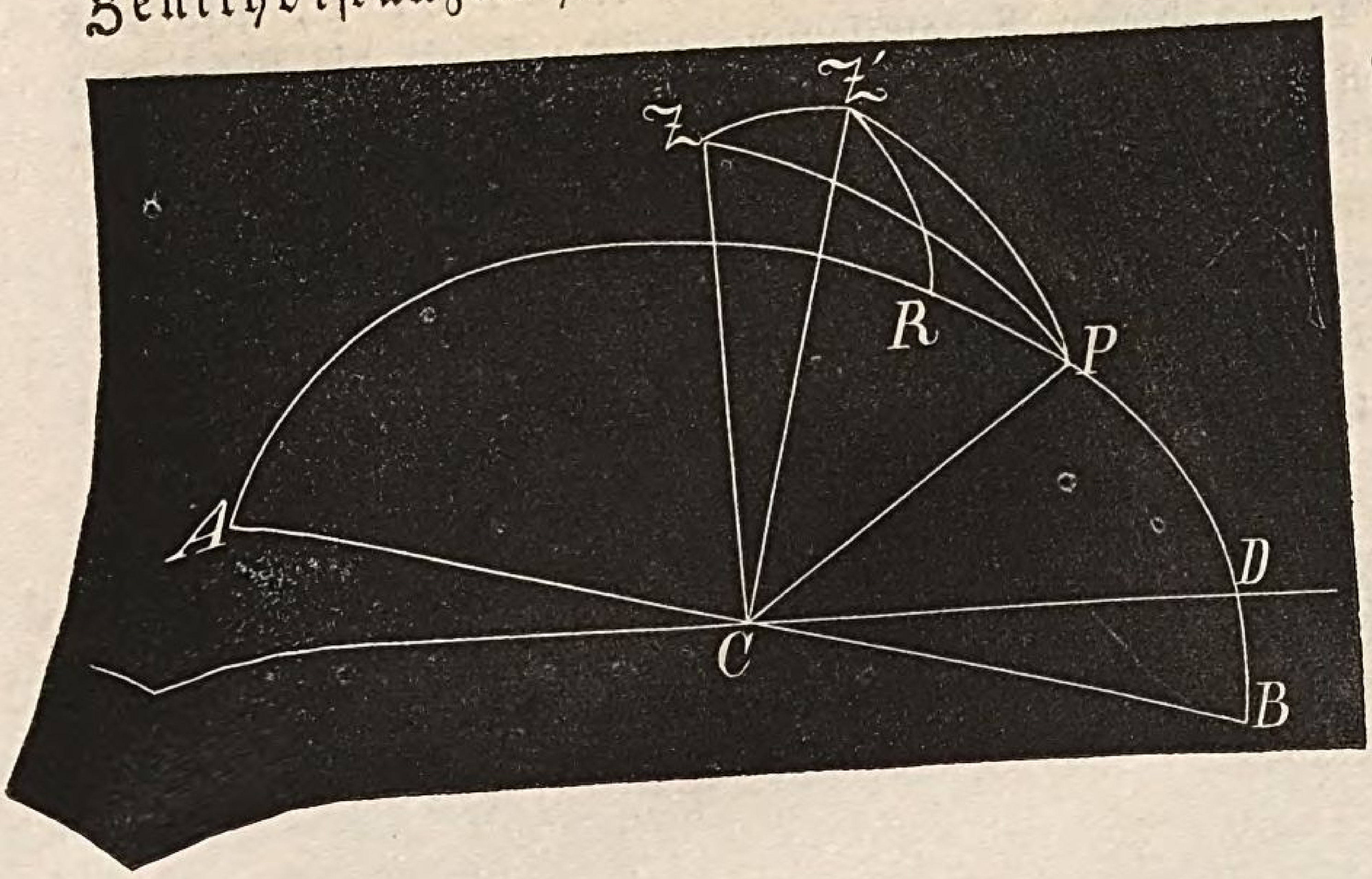
Bei einem nicht gut rektifizirten Instrumente kann somit dieser Fehler sehr nachtheilige Folgen haben, da er von der Entfernung der anvisirten Signale unabhängig ist. Aus dieser Untersuchung sehen wir, daß es nicht gut ist, das Fernrohr während der Messung oft und viel auf und ab zu bewegen, und daß in einer gebirgigen Gegend, wo einige Signale ober andere unter dem Limbus zu stehen kommen können, die Drehungsachse und die optische Achse ihre richtige Lage haben müssen.

Die Gleich. 6) hat streng genommen kein Maximum, allein wenn $y = 90^0$ angenommen wird, übergeht sie in

$$x = -\,\frac{2\alpha''}{\sin.\,2h} \ldots . \quad 10),$$

und wenn der eine der anvisirten Punkte 45^0 ober dem Limbus, der andere aber so viele Grade unter demselben liegt, so ist in dem horizontalen Winkel ein Fehler von $2\alpha''$.

Untersuchen wir noch den Einfluß, welchen die geneigte Drehungsachse und die unrichtige Stellung der optischen Achse des Rohres auf die Messung der *Zenithdistanzen* hat.



Es sei Fig. 97 AB die Lage der Drehungsachse, CD eine horizontale Linie, CZ′ senkrecht auf AB, CZ senkrecht auf CD, und diese vier Linien in einer vertikalen Ebene; CP die optische Achse bei der Einstellung auf ein Signal, dessen Zenithdistanz zu bestimmen ist; beschreibt man aus C mit dem Halbmesser

Eins eine Kugel, so ist ZZ′ die Neigung der Drehungsachse, AP das Maß des Winkels, welchen die optische Achse mit der Drehungsachse bildet; somit $ZZ' = \alpha$, $AP = 90 + \delta$.

Ein vertikaler auf die Drehungsachse senkrecht stehender und mit ihr festverbundener Kreis wird, während der Bewegung der optischen Achse, von Z′ nach P um den Bogen Z′R gedreht, somit für die Zenithdistanz von P, den Bogen $Z'R = z$ angeben, während die wahre Zenithdistanz ZP ist; auch ist leicht ersichtlich, daß Z′R auf AP senkrecht steht, und daß $RP = \delta$ ist.

Bezeichnen wir ZP mit z′, den Winkel RZ′P mit w, so folgt aus dem bei R rechtwinkligen Dreiecke Z′RP

$$\cos. Z'P = \cos. z \cos. \delta; \ \text{tang. } w = \frac{\text{tang. } \delta}{\sin. z} \ldots . 11).$$

In dem Dreiecke ZZ′P ist $ZZ' = \alpha$, der Winkel $ZZ'P = 90 + w$, daher $\cos. ZP = \cos. Z'P \cos. ZZ' + \sin. Z'P \sin. ZZ' \cos. (90 + w)$, also

$$\cos. z' = \cos. Z'P \cos. \alpha - \sin. Z'P \sin. \alpha \sin. w \ldots . 12).$$

Aus der ersten der obigen Gleichungen folgt $\sin. Z'P = \sqrt{1 - \cos.^2 z \cos.^2 \delta}$, aus der zweiten $\sin. w = \pm \dfrac{\text{tang. } \delta}{\sqrt{\sin.^2 z + \text{tang.}^2 \delta}}$; werden diese Werthe in Gleichung 12) substituirt, so ist

$$\cos. z' = \cos. z \cos. \delta \cos. \alpha - \frac{\sin. \alpha \text{ tang. } \delta \sqrt{1 - \cos.^2 z \cos.^2 \delta.}}{\pm \sqrt{\sin.^2 z + \text{tang.}^2 \delta}} \ldots . 13).$$

Ist die Drehungsachse horizontal, so ist $\alpha = 0$, daher

$$\cos. z' = \cos. z \cos. \delta \ldots . 14).$$

Ist die optische Achse auf der Drehungsachse senkrecht, so ist $\delta = 0$, daher

$$\cos. z' = \cos. z \cos. \alpha \ldots . 15).$$

Weil aber α und δ sehr kleine Winkel sind, so können die Cosinus derselben $= 1$ und die Sinus den Bogen gleich gesetzt werden.

Wird nach $z' = z + x$ gesetzt, wobei x ebenfalls einen kleinen Bogen vorstellt, so findet man aus Gleich. 13)

$$x = \frac{\alpha\delta}{\pm \sqrt{\sin.^2 z + \delta^2}};$$

werden α, δ in Sekunden ausgedrückt und δ^2 vernachlässigt, so ist

$$x'' = \pm \frac{\alpha'' \ \delta'' \sin. 1''}{\sin. z} \ldots . 16),$$

der gesuchte Fehler somit unbedeutend.

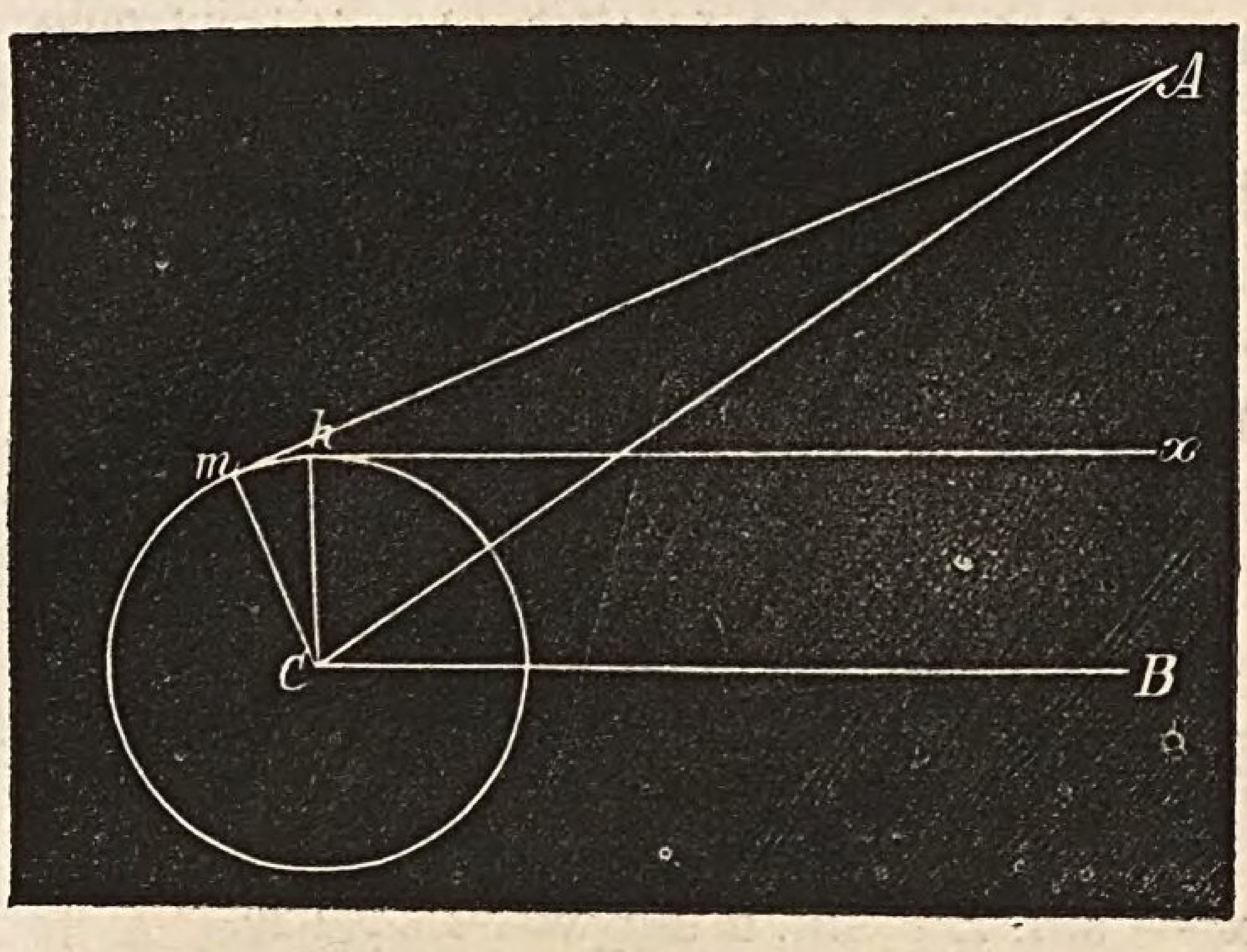
Wird $\alpha = \delta = 10$ Minuten, $z = 70^0$ angenommen, so ist

$$x = \pm 1{\cdot}8 \text{ Sekunden}.$$

Hinsichtlich des Zeichens in Gleich. 16) ist zu bemerken, daß der Ausdruck positiv zu nehmen ist, wenn der Winkel zwischen der optischen und Drehungsachse $90 + \delta$, dagegen negativ, wenn dieser Winkel $90 - \delta$ beträgt.

Die optische und Drehungsachse sollen sich schneiden.

§. 94. In der Fig. 98 bedeute C die horizontale Drehungsachse, hx die optische Achse, Ch = d die Entfernung beider.



War ursprünglich hx horizontal und wurde sodann ein Punkt A anvisirt, so hat die optische Achse den Winkel hCm = α beschrieben; wäre sie aber durch C gegangen, so wäre CB die horizontale Richtung gewesen und auf denselben Punkt A einvisirt, um den Winkel BCA = β bewegt worden, somit ist $\alpha - \beta = x$ der so begangene Fehler.

Nun ist mCh + hCA + A = 90, ebenso hCA + ACB = 90, daher hCm + A = ACB oder $\alpha + A = \beta$, also A = x. Wird CA = a gesetzt, so ist

$$x'' = \frac{d}{a \sin. 1''} \dots . 1).$$

Z. B. d = 2 Zoll, a = 60 Klafter ist x = 1′ 33·5.

Anmerkung. Bei dieser Ableitung wurde vorausgesetzt, daß die optische Achse auf die Drehungsachse senkrecht steht, findet dieses nicht statt, so beschreibt die erstere bei der Bewegung einen hyperbolischen Kegel mit ununterbrochener Höhlung und d ist der kleinste Halbmesser jener Kreise, in welchen dieser Kegel geschnitten werden kann.

Genauigkeit des Visirens.

§. 95. Mit welcher Genauigkeit die Visirebene auf die Mitte des Signals eingestellt werden kann, hierüber hat Prof. Stampfer Versuche angestellt, und diese im 18. Bande der Wiener polytechnischen Jahrbücher bekannt gemacht. Wir führen hier nur die aus den Versuchen sich ergebenden Resultate an, und verweisen jeden, der über diesen Gegenstand nähere Aufschlüsse verlangt, auf das Original selbst.

Gutes Auge, günstige Beleuchtung des Objektes, scharfe Begränzung desselben gegen den Hintergrund und eine solche Form und Größe des Objektes, daß es durch den Visirfaden in zwei gleiche und ähnliche zu beiden Seiten des Fadens noch sichtbare Theile geschnitten werden kann, endlich bei großen Entfernungen des Objektes Klarheit und Ruhe der Luft vorausgesetzt, hat Prof. Stampfer Folgendes gefunden:

a) Der Fehler einer Visur mit unbewaffnetem Auge kann bei zweckmäßiger Einrichtung des Visirwerkzeuges bis auf 10 Sekunden und bei großer Gesichtsschärfe und Uebung noch weiter herabgehen.

b) Die Breite der Okularspalte kann, so lange die Entfernung der beiden Diopter nicht unter 18 Zoll ist, 0·4 Linien betragen, und eine 0·3 Linien breite Oeffnung ist selbst bei einer Länge von 8 bis 10 Zoll nicht nachtheilig. Nun ist bei unsern gewöhnlichen Dioptern die Breite der Okularspalte 0·18 bis 0·25 Linie, sie ist daher bedeutend zu schmal.

Zu kleine Oeffnungen sind aber immer sehr nachtheilig, weil durch selbe zu wenig Licht in das Auge gelangt, und die Visur wegen der Lichtschwäche unsicher

wird, besonders wenn die Objekte nicht sehr deutlich sind und gegen den Hintergrund nicht gut abstechen. Der Grund, warum selbst bei ziemlich breiten Okularspalten die Visur nicht bedeutend unsicher wird, ist der, daß das Auge am Rande der Oeffnuug wegen der hier vorgehenden Beugung der Lichtstrahlen sehr undeutlich sieht, daher von selbst jene Stelle sucht, wo es am deutlichsten sieht. Man sieht daher, ohne gerade die Absicht zu haben, beim Visiren immer sehr nahe durch die Mitte der Oeffnung und erst dann, wenn diese so breit wird, daß der von der Beugung freie mittlere Raum eine größere Breite erhält, wird der Visurfehler mit der Breite des Raumes zunehmen.

Die Versuche zeigen, daß dieser Fall einzutreten anfängt, wenn die Okularöffnung 0·36 bis 0·40 Linien breit wird. Bei der Breite der Oeffnung von 0·2 Linien und darunter geht die Wirkung der Beugung jedes Randes selbst bis auf die Mitte der Oeffnung, daher das Klagen, daß man bei solchen Oeffnungen undeutlich und schlecht sieht.

c) Die Entfernung der Diopter hat auf die Genauigkeit der Visur keinen merklichen Einfluß, so lange die Entfernung mit der Okularöffnung und der Dicke des Objektivfadens im gehörigen Verhältnisse steht. Unter dieser Bedingung ist die Genauigkeit nahe dieselbe, der Abstand des Fadens vom Auge mag 8 bis 30 Zoll und darüber variren. Nur wenn der Abstand kleiner wird als die deutliche Sehweite, wird der Faden minder scharf gesehen, und die Zuverlässigkeit der Visur nimmt ab.

d) Die Dicke des Objektivfadens ist zweckmäßig, wenn derselbe dem Auge unter einem Sehwinkel von 1 bis höchstens 2 Minuten erscheint, derselbe ist also (§. 90 Gleichung 1) um so dünner zu nehmen, je kleiner die Entfernung der Diopter ist. Scharfe Spitzen statt den Dioptern geben beinahe dieselbe Genauigkeit.

e) Runde Okularöffnungen sind vortheilhafter als Spalten, aus dem Grunde, weil erstere ein abgeschlossenes rundes Bild, letztere hingegen einen schmalen Streifen auf der Netzhaut hervorbringen. Die Durchmesser der runden Okularöffnungen können größer gemacht werden, als die Breite der Spalten, ein zweiter Grund, warum man durch runde Oeffnungen schärfer sieht.

Endlich ist die Visur merklich genauer, wenn der Raum zwischen der Okularöffnung und dem Objektivfaden durch eine Röhre abgeschlossen, und dadurch das störende Seitenlicht abgehalten wird.

Nach den Versuchen Stampfers sind die Diopter zweckmäßig konstruirt, und geben nahe dieselbe Genauigkeit, wenn sie folgende Dimensionen haben.

Entfernung der beiden Diopter	Breite der Okularöffnung		Dicke des Objektivfadens
	Spalten	runde	
6 Zoll	0·20 Linien	0.25 Linien	0·03 Linien
8 „	0·23 „	0·28 „	0·04 „
10 „	0·25 „	0·30 „	0·05 „
12 „	0·28 „	0·33 „	0·06 „
16 „	0·32 „	0·37 „	0·07 „
20 „	0·35 „	0·40 „	0·08 „
24 „	0·38 „	0·42 „	0·09 „
30 „	0·40 „	0·44 „	0·11 „
36 „	0·42 „	0·46 „	0·12 „

Begreiflich braucht man die Verhältnisse dieser Tafel nur näherungsweise zu treffen, um ein gutes Visirwerkzeug herzustellen, insbesondere kann man mit einem stärkern Faden eben so scharf visiren, so lange derselbe das Objekt nicht ganz deckt, und nur weil diese Deckung um so häufiger stattfindet, je dicker der Faden ist, sucht man eine größere Fadendicke zu vermeiden. Könnte das Auge den Faden und das Objekt zugleich vollkommen deutlich sehen, so könnte man bis auf drei oder vier Sekunden genau pointiren.

Aus den Versuchen über die Genauigkeit des Visirens mittelst der Fernröhre ergibt sich:

a) Bei guten achromatischen Fernröhren ist unter günstigen Umständen, und wenn die zwischenliegende Luft keinen störenden Einfluß üben würde, die Genauigkeit der Visur nahe der Vergrößerung proportional, vorausgesetzt, daß diese mit den übrigen Dimensionen und mit der Vollkommenheit des Objektivs im gehörigen Verhältnisse steht, und eher von schwächerm als stärkerem Grade ist. Schwächere Vergrößerungen lassen eine größere relative Genauigkeit der Visur aus dem Grunde zu, weil sonst bei dem vollkommensten Objektive die Helligkeit und Präzision des Objektivs mit der Zunahme der Vergrößerung abnehmen muß.

Bedeutet c die Lichtstärke, r den Halbmesser der Objektivöffnung und m die Vergrößerung des Fernrohrs, so ist $c = \frac{r^2}{0{\cdot}0009\ m^2}$, woraus ersichtlich ist, daß die Lichtstärke im quadratischen Verhältnisse mit der Zunahme der Vergrößerung abnimmt.

Die größte relative Genauigkeit wird wahrscheinlich dann erreicht, wenn der in das Auge kommende Lichtbüschel die Oeffnung der Pupille gerade ausfüllt. Man kann für ein gutes Fernrohr von mäßiger Vergrößerung unter Voraussetzung günstiger Umstände, den wahrscheinlichen Visurfehler näherungsweise finden, wenn man den Visurfehler des freien Auges unter denselben Umständen durch die Vergrößerungszahl dividirt.

b) Gute nicht achromatische Fernröhre geben zwar bei schwacher Vergrößerung und großer Helligkeit des Objektes dieselbe relative Genauigkeit der Visur wie achromatische; allein in der Lichtstärke, welche bei geodätischen Messungen meistens von der größten Wichtigkeit ist, bleiben erstere weit gegen die achromatischen zurück, indem die Lichtstärke mit dem Quadrate der Oeffnung zunimmt, diese aber bei gleicher Brennweite für das nicht achromatische Fernrohr ungleich kleiner sein muß, um die sphärische Abweichung und die Farbenzerstreuung eines einfachen Objektes gehörig entfernt zu halten.

Ist n der Brechungsexponent zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungs-Winkels, p die Brennweite der Objektivlinse, r der Halbmesser der Objektivöffnung und ϱ der Halbmesser der sphärischen Abweichung, so ist für parallel auffallende Strahlen $\varrho = \frac{n\,(4\,n - 1)\,r^3}{32\,(n + 2)\,(n - 1)\,p^2}$, somit nimmt die Undeutlichkeit mit der dritten Potenz der Objektivöffnung zu, mit der zweiten Potenz der Brennweite einer Objektivlinse ab.

Da auch die absolute Genauigkeit der Visur von der Vergrößerung abhängt, und diese bei einem nicht achromatischen Rohre, wenn es hinreichende Helligkeit und Schärfe geben soll, gleichfalls viel geringer sein muß als bei einem achromatischen von derselben Brennweite, so haben letztere Fernröhre große Vorzüge vor

den erstern, daher heut zu Tage fast ausschließlich achromatische Fernröhre bei den Meßinstrumenten angewendet werden.

c) Terrestrische Okulare lassen eine geringere Schärfe zu als astronomische von derselben Vergrößerung, ferner nimmt bei einerlei Fernröhren der absolute Visurfehler durch Zunahme der Vergrößerung nur bis zu einer gewissen Gränze ab. Wird die Vergrößerung weiter getrieben, als es die Eigenschaften des Objektivs erlauben, so vermindert sich die Klarheit und Präzision des Bildes so stark, daß sich dasselbe weniger scharf pointiren läßt. Daher haben schwache Vergrößerungen auf geodätischen Instrumenten entschiedene Vorzüge vor den stärkern, denn nicht nur ist bei den ersteren der absolute Visurfehler schon so klein, daß es unnöthig ist, die Vergrößerung deshalb zu vermehren, sondern das Rohr gewährt auch eine größere Helligkeit und Präzision, weil sowohl die Unvollkommenheit des Objektivs als auch die Oszillation der Luft und die nicht vollkommene Durchsichtigkeit derselben bei einer schwachen Vergrößerung weniger störend sind.

d) Große Oeffnungen der Objektivgläser für Fernröhre auf geodätischen Meßinstrumenten sind nicht vortheilhaft, eine größere Schärfe der Visur läßt sich vielmehr erreichen, wenn die Objektivöffnuug so weit gemäßigt wird, als es die nöthige Lichtstärke erlaubt.

Zusatz. Professor Stampfer hat bei dieser Gelegenheit auch Versuche angestellt, wie genau größere Zielscheiben nach dem Augenmaße halbirt werden können, und gefunden, daß Kreisflächen von 1 bis 2 Zoll Durchmesser bis auf den 220. Theil des Durchmessers genau halbirt werden können. Durch Verkleinerung des Zielpunktes nimmt auch der Visurfehler aber nur so lange ab, bis der optische Winkel den 50- bis 60fachen Visurfehler nicht mehr übertrifft, bleibt dann für kleinere Punkte konstant, und fängt endlich wieder an größer zu werden, sobald der Punkt so klein ist, daß er durch den Faden fast ganz gedeckt wird.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, daß diese Resultate nur als die Gränze zu betrachten sind, welcher sich die Genauigkeit der Pointirung um so mehr nähern wird, je günstiger die Umstände sind.

Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen die in der Messung der Distanzen und Winkel begangenen Fehler den kleinsten Einfluß auf die aus ihnen abgeleiteten Resultate haben.

§. 96. Aus der vorhergehenden Untersuchung der Fehlerquellen bei den Winkelmessern läßt sich leicht folgern, daß die Größe eines Winkels eben so wenig mit einer absoluten Genauigkeit bestimmbar ist, wie dies bei der Messung der Linien nachgewiesen worden ist.

Bei der nachfolgenden Untersuchung des Einflusses, welchen die fehlerhaften Daten auf die daraus abgeleiteten Resultate haben, wollen wir uns blos auf ein ebenes Dreieck beschränken, weil dieses für den praktischen Geometer die am häufigsten vorkommende Figur ist; die wesentlichsten Fälle sind:

1. Ist in einem ebenen Dreiecke blos ein Winkel gemessen worden, und wird sodann aus diesem auf die Summe der beiden andern geschlossen, sind ferner dA, dB, dC die kleinen unvermeidlichen Fehler der Messung, so wird man $(A + dA) + (B + dB) + (C + dC) = 180$ setzen, während eigentlich $A + B + C = 180$ ist; wird die untere Gleichung von der obern abgezogen, so ist

$$dA + dB + dC = 0 \;.\;.\;.\;.\; 1).$$

Wird A als gemessen angenommen, so ist $dB + dC = - dA$, d. h. ist A um dA zu groß gefunden, so wird die Summe der beiden andern um eben so viel zu klein sein.

Sind dagegen zwei Winkel A und B gemessen worden, so ist der Fehler in dem nicht gemessenen

$$dC = -(dA + dB) \;\ldots\; 2).$$

Haben nun dA und dB gleiche Zeichen, sind also beide Winkel zu groß oder zu klein gemessen worden, so ist der Fehler in C der Summe der Fehler gleich und kann bedeutend werden; sind aber die Fehler einander gleich und haben sie entgegengesetzte Bezeichnung, so kann der Winkel C auch fehlerfrei abgeleitet werden, allein dies wäre nur ein Zufall, und kann als eine Regel nicht gelten.

Was hier von einem Dreiecke bewiesen wurde, läßt sich auch auf die Winkel jedes Polygons anwenden. Um also die in den gemessenen Winkeln begangenen Fehler nicht durch einen einzigen auszugleichen, soll man daher wo möglich alle Winkel eines Polygons messen, und nur dann, wenn dies nicht möglich ist, den einen aus der Summe der gemessenen Winkel berechnen.

2. In einem ebenen Dreiecke sind eine Seite und die anliegenden Winkel gemessen worden; c, A, B sind die richtigen Werthe der gemessenen Größen, dc, dA, dB die bei der Messung begangenen Fehler, so ist für die zu berechnenden Seiten a und b der fehlerfreie Werth von $a = \frac{c \sin. A}{\sin. (A + B)}$, von $b = \frac{c \sin. B}{\sin. (A + B)}$ nachdem aber, wie schon erwähnt, die gegebenen Daten kleine Fehler an sich tragen, so wird auch a und b unrichtig bestimmt sein.

Den Fehler in den Seiten kann man finden, indem man entweder in den obigen Gleichungen die fehlerhaft bestimmten Stücke um ihre Fehler vermehrt und von den so erhaltenen Gleichungen die ursprünglichen abzieht, oder einfacher, daß man die obigen Gleichungen in Bezug auf die fehlerhaften Stücke differenzirt.

Wird dieses letztere Mittel angewendet, so bekommt man aus der ersten Gleichung

$$da = \frac{\sin. (A + B) \{dc \sin. A + c \cos. A dA\} - c \sin. A \cos. (A + B)(dA + dB)}{\sin.^2 (A + B)}$$

Dieser Ausdruck wird nicht nur einfacher, sondern gewinnt auch an Bestimmtheit, wenn man nicht den Fehler an sich, sondern im Verhältniß zur ganzen Länge nimmt; dividirt man also auf der einen Seite durch a, auf der andern durch den gleichen Werth $\frac{c \sin. A}{\sin. (A + B)}$, so findet man

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \frac{\sin. B}{\sin. A \sin. (A + B)} dA - \operatorname{cotg.} (A + B)\, dB \;\ldots\; 3),$$

und analog mit dieser aus der zweiten Gleichung

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \frac{\sin. A}{\sin. B \sin. (A + B)} dB - \operatorname{cotg.} (A + B)\, dA \;\ldots\; 4).$$

Die durch die Fehler in den Winkeln entstandenen Glieder dieser Gleichungen können sich in besondern Fällen zum Theil und auch ganz aufheben, allein das

letzte Glied sowohl in 3) als auch in 4) bleibt nur so lange negativ als $A + B < 90^0$ und zugleich dA so auch dB positiv sind; im Allgemeinen könnte man das letzte Glied eher positiv als negativ annehmen.

Aus den letzten Gleichungen folgt, daß $\frac{da}{a}$ und $\frac{db}{b}$ am kleinsten ausfallen, wenn $A + B = 90^0$ und $A = B$ wird, denn dann ist das dritte Glied Null und der Coeffizient von dA so auch von dB gleich Eins, die Gleichungen übergehen sodann in

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + dA \;.\;.\;.\;.\; 5),$$

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + dB \;.\;.\;.\;.\; 6);$$

und da man immer annehmen kann, daß die Winkel mit einem und demselben Instrumente oder mit Instrumenten von gleicher Genauigkeit gemessen worden sind, so ist $dA = dB$, daher auch $\frac{da}{a} = \frac{db}{b}$; weil ferner $A = B$ angenommen worden ist, so ist auch $a = b$, daher $da = db$, das heißt die Fehler in den Resultaten werden unter dieser günstigen Annahme einander gleich, $\frac{da}{a}$ und $\frac{db}{b}$ dagegen bei einem positiven Fehler in den Winkeln größer als $\frac{dc}{c}$; da und db aber kleiner als $dc + dA$ sein.

Aus der Annahme $A + B = 90$ folgt $C = 90$, aus $A = B$, daß das Dreieck ein gleichschenkliges ist, aus dieser Untersuchung folgt also, daß die beiden andern Seiten dann am besten bestimmt sind, wenn das Dreieck ein rechtwinkliges, gleichschenkliges und die Hypothenuse die gemessene Seite ist.

Ist dagegen bei einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypothenuse und die anliegenden Winkel gemessen worden sind, die eine Kathete, z. B. a bedeutend länger als b, so folgt aus 3) und 4) weil denn A größer als B, somit $\frac{\sin. A}{\sin. B} > \frac{\sin. B}{\sin. A}$ ist, daß $\frac{da}{a} < \frac{db}{b}$ ausfällt.

3. In einem ebenen Dreiecke wurde eine Seite c, der anliegende Winkel A und der gegenüber liegende C gemessen; welche Werthe dieser Winkel sind die vortheilhaftesten zur Bestimmung der nicht gemessenen Seiten, wenn dc, dA und dC die unvermeidlichen Fehler in der Messung bezeichnen.

Die richtige Länge der zu berechnenden Seiten ist

$$a = \frac{c \sin. A}{\sin. c}; \; b = \frac{c \sin. (A + C)}{\sin. C}.$$

Durch das Differenziren erhält man aus der ersten Gleichung

$$da = \frac{\sin. C \sin. A dc + c \sin. C \cos. A dA - c \sin. A \cos. C dC}{\sin.^2 C}.$$

Wird diese Gleichung durch die Differenzirte dividirt, so bekommt man

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \text{cotg. } AdA - \text{cotg. } CdC \ldots . \; 7).$$

Das Differenziale der Seite b ist

$$db = \frac{dc\,s.C\,s.(A+C) - cdC\{s.(A+C)c.C - c.(A+C)s.C\} + c\,c.(A+C)s.CdA}{\sin.^2 C}$$

und durch die differenzirte Gleichung dividirt, erhält man

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \text{cotg. } (A+C)\, dA - \frac{\sin. A}{\sin. C \sin. (A+C)} dC \ldots . \; 8).$$

Die negativen Glieder in der Gleichung 7) und 8) können bei der Beurtheilung des möglichen Fehlers auch positiv genommen werden, weil dC eben so positiv als negativ sein kann, hiedurch erhält man

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \text{cotg. } AdA + \text{cotg. } CdC \; \ldots . \; 9),$$

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \text{cotg. } (A+C)\, dA + \frac{\sin. A}{\sin. C \sin. (A+C)} dC \ldots . \; 10).$$

Der Einfluß, welchen die fehlerhaften Winkel auf die abgeleiteten Seiten äußern, reduzirt sich auf das Minimum, wenn $A + C = 90^0$ und $A = C = 45^0$ wird; bei dieser Annahme ist, weil auch $dA = dC$ gesetzt werden kann

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + 2\,dA \ldots \; . \; 11),$$

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + dC \ldots . \; 12).$$

Also sind in diesem Falle die beiden Seiten am besten bestimmt, **wenn das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig, die gemessene Seite die Hypothenuse ist.**

Ferner folgt aus 9), daß bei diesen Winkeln $\frac{da}{a} = \frac{dc}{c}$ sein kann, wenn dA und dC einander gleich sind, aber entgegengesetzte Bezeichnung haben, ferner aus Gleich. 11) und 12), daß $\frac{da}{a}$ und $\frac{db}{b}$ bei positiven Fehlern der Winkel größer als $\frac{do}{c}$ ausfallen, und daß der Fehler in a größer als in der Seite b ist.

4. In einem Dreiecke sind zwei Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel gemessen worden, welcher Werth dieses Winkels ist zur Bestimmung der dritten Seite der vortheilhafteste?

Bezeichnen wir die richtigen Werthe der gemessenen Stücke mit a, b, C; die bei der Messung unvermeidlichen Fehler in da, db, dC, so hat man zur Berechnung der fehlerfreien Seite die folgende Gleichung $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C$, das Differenziale der Seite c ist

$cdc = (a - b \cos. C)\, da + (b - a \cos. C)\, db + ab \sin. CdC$; dividirt man

diese Gleichung durch die Vorhergehende, so bekommt man

$$\frac{dc}{c} = \frac{(a - b\cos. C)\, da}{a^2 + b^2 - 2ab\cos. C} + \frac{(b - a\cos. C)\, db}{a^2 + b^2 - 2ab\cos. C} + \frac{ab\sin. C\, dC}{a^2 + b^2 - 2ab\cos. C},$$

also auch

$$\frac{dc}{c} = \frac{(a - b\cos. C)\, da}{a(a - b\cos. C) + b(b - a\cos. C)} + \frac{(b - a\cos. C)\, db}{a(a - b\cos. C) + b(b - \cos. C)}$$

$$+ \frac{ab\sin. C\, dC}{a^2 + b^2 - 2ab\cos. C}.$$

Dividirt man nun jeden Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch den ersten Faktor seines Zählers, so bekommt man

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a + b\left(\frac{b - a\cos. C}{a - b\cos. C}\right)} + \frac{db}{a\left(\frac{a - b\cos. C}{b - a\cos. C}\right) + b} + \frac{ab\sin. C\, dC}{a^2 + b^2 - ab\, cs. C}.$$

Offenbar ist der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf das Minimum gebracht, wenn $C = 180$ wird, denn dann wird das letzte Glied Null, und die Ausdrücke innerhalb der Klammern im Nenner gleich der Einheit, somit ist

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a + b} + \frac{db}{a + b} \; .\;.\;.\;.\; 13),$$

und weil bei dieser Annahme $c = a + b$ wird, so ist $dc = da + db$, was auf a priori hätte ausgesagt werden können.

Zur Bestimmung der dritten Seite ist somit ein Winkel desto zweckdienlicher je mehr er sich 180^0 nähert.

Bei den zwei vorhergehenden Fällen war der dritte Winkel durch die beiden gemessenen bestimmt, dies ist jedoch hier nicht der Fall, und es bleibt somit zu untersuchen, welche Werthe der gemessenen Daten a, b, C zur Bestimmung der beiden Winkel A und B die geeignetsten sind.

Zur Bestimmung dieser Winkel hat man folgende Gleichungen $a\sin. (A + C) = b\sin. A$, und $a\sin. B = b\sin. (B + C)$; aus der ersten folgt $\text{tang. } A = \frac{a\sin. C}{b - a\cos. C}$, aus der zweiten $\text{tang. } B = \frac{b\sin. C}{a - b\cos. C}$.

Nach einer einfachen Rechnung, nachdem $\text{Secante}^2\, A$ und $\text{Secante}^2\, B$ aus diesen beiden Gleichungen berechnet worden ist, findet man

$$dA = \frac{(bda - adb)\sin. C - a(a - b\cos. C)\, dC}{a^2 + b^2 - 2ab\cos. C} \; .\;.\;.\;.\; 14),$$

$$dB = \frac{(adb - bda)\sin. C - b(b - a\cos. C)\, dC}{a^2 + b^2 - 2ab\cos. C} \; .\;.\;.\;.\; 15).$$

Die Werthe dA und dB werden somit ein Kleinstes, wenn $C = 180^0$ wird, und werden

$$dA = -\frac{a(a + b)\, dC}{(a + b)^2} = -\frac{adC}{a + b} \; .\;.\;.\;.\; 16),$$

$$dB = -\frac{b(b + a)\, dC}{(a + b)^2} = -\frac{bdC}{a + b} \; .\;.\;.\;.\; 17).$$

Die Summe beider Gleichungen gibt $dA + dB = - dC$, was mit der Gleichung 1) vollkommen übereinstimmt.

Sind überdies die gemessenen Seiten des Dreieckes einander gleich, so ist

$$dA = - \frac{dC}{2} \text{ und } dB = - \frac{dC}{2} \quad \ldots \; 18).$$

Zur Bestimmung der Winkel ist somit ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem die beiden Schenkel sammt dem eingeschlossenen Winkel gemessen worden sind, desto vortheilhafter, je stumpfer der gemessene Winkel ist.

5. In einem Dreiecke sind alle drei Seiten gemessen worden, welche Form des Dreieckes ist zur Bestimmung der Winkel die geeignetste?

Sind die Daten fehlerfrei, so ist der eine Winkel durch $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ bestimmt, das Differenziale dieses Ausdruckes ist nach einer einfachen Reduktion

$$dA = \frac{2abcda - b(a^2 + c^2 - b^2)dc - c(a^2 + b^2 - c^2)db}{2bc \sin. A} \quad \ldots \; 19).$$

Analog mit dieser Gleichung findet man für B

$$dB = \frac{2abcdb - c(a^2 + b^2 - c^2)da - a(c^2 + b^2 - a^2)dc}{2a^2c^2 \sin. B} \quad \ldots \; 20),$$

und einen ähnlichen Ausdruck für dC.

Die Zeichen dieser Glieder sind nur unter der Voraussetzung richtig, als die Fehler der Seiten sämmtlich positiv sind; diese können aber ebenso negativ ausfallen; somit sind zur Bestimmung des möglichen, d. h. des möglich größten Fehlers in A und B die sämmtlichen Glieder positiv zu nehmen.

Geht man auf die gestellte Frage zurück, so wird dA am kleinsten ausfallen, wenn der Zähler Null wird; weil jedoch das erste Glied nicht Null werden kann, so ist die Bedingung, daß wenigstens die folgenden Glieder des Zählers Null werden, $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ und $a^2 + c^2 - b^2 = 0$, das heißt daß die Winkel C und B 90^0 betragen; aber aus Gleich. 20) folgt die Bedingung, daß C und A rechte Winkel sein sollen, damit der Winkel B am schärfsten bestimmt werden könne, somit werden in einem Dreiecke, bei welchem die Seiten gemessen worden sind, die Winkel am schärfsten bestimmt, wenn jeder ein Rechter ist; da dies jedoch bei einem ebenen Dreiecke nicht möglich ist, so wird man sich dieser Anforderung nähern, wenn man jeden Winkel $= 60^0$, somit das Dreieck ein gleichseitiges macht.

Bei dieser Annahme übergeht die Gleichung 18) und 19), wenn noch — was theoretisch ganz richtig ist — die Fehler den Seiten proportionirt angenommen werden, also $da = db = dc = x$ gesetzt wird in $dA = \frac{2a^3x - a^3x - a^3x}{2a^2 \sin. A} = 0$, ebenso $dB = 0$ und $dC = 0$, d. h. war das Dreieck ein gleichseitiges und hat man bei der Messung der Seiten in jeder einen gleich großen positiven oder negativen Fehler begangen, so ist das aus den gemessenen Daten gebildete Dreieck ebenfalls ein gleichseitiges, somit die Fehler in den Winkeln Null.

Bei einem gleichseitigen Dreiecke, aber ungleichen Fehlern in den Seiten, werden die Fehler in den Winkeln durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$dA = \frac{2\,ada - bdb - cdc}{\sqrt{3}},$$

$$dB = \frac{2\,bdb - ada - cdc}{\sqrt{3}},$$

$$dC = \frac{2\,cdc - ada - bdb}{\sqrt{3}}.$$

6. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete fehlerfrei und nur der ihr anliegende spitze Winkel fehlerhaft ist, welcher Werth dieses Winkels hat auf die Berechnung der andern Kathete den geringsten Einfluß?

Bezeichnen wir die gemessene Kathete mit a, den wahren Werth des Winkels mit C, den Fehler desselben mit dC, die zu berechnende Kathete mit c, so ist $c = a\,\text{tang.}\,C$, $dc = \frac{adC}{\cos.^2 C}$, ferner $a = c\,\text{cotg.}\,C$, daher

$$dc = \frac{cdC}{\sin.\,C\,\cos.\,C} \quad \ldots .\; 21).$$

Da hier der Zähler konstant ist, so wird dc ein Minimum, sobald der Nenner das Maximum erreicht hat; setzt man der Einfachheit halber $dc = x$, $cdC = A$, so ist $x = \frac{A}{\sin.\,C\,\cos.\,C}$, und $\frac{dx}{dC} = A(\cos.^2 C - \sin.^2 C) = 0$, wenn der Nenner sogleich weggelassen wird, somit weil C ein spitzer Winkel ist $\sin.\,C = \cos.\,C$, daher $C = 45^0$ und die Gleichung 21) verwandelt sich in

$$\frac{dc}{c} = 2\,dC \quad \ldots .\; 22).$$

Die in diesem Paragraphe abgehandelten Fälle haben wir durch Figuren zu versinnlichen unterlassen, weil es ein Leichtes ist, für die vielen möglichen Fälle die entsprechenden Figuren zu entwerfen; man braucht nur ein Dreieck mit den richtigen und ein zweites mit den fehlerhaften Daten zu zeichnen, die Fehler nach Willkür positiv oder negativ zu nehmen, so hat man das Bild fertig.

Dritter Abschnitt.

Beschreibung, Rektifikation und Gebrauch der Winkelinstrumente ohne Spiegel.

Beschreibung des Meßtisches.

§. 97. Dieses Instrument ist gegenwärtig das einzige im Gebrauche, mittelst welchen die horizontale Projektion eines Winkels unmittelbar konstruirt, d. h. graphisch bestimmt wird. Die Erfindung desselben verdanken wir dem Johann Prätorius, Professor der Mathematik zu Altdorf *); daher der bei den ältern Schriftstellern dafür gebrauchte Name: mensula Praetoriana, doch die Konstruktion seines Meßtisches ist seitdem vielfach verändert und verbessert worden, ja man findet fast in jedem Werke über praktische Geometrie, eine in einigen Bestandtheilen eigenthümliche Zusammensetzung des Meßtisches.

In den österreichischen Staaten kommen dermalen zweierlei Meßtische, nämlich die ältern nach der Angabe des Marinoni **) konstruirten und jene, worauf der Mechaniker Kraft ein Patent erhielt, am häufigsten vor.

---

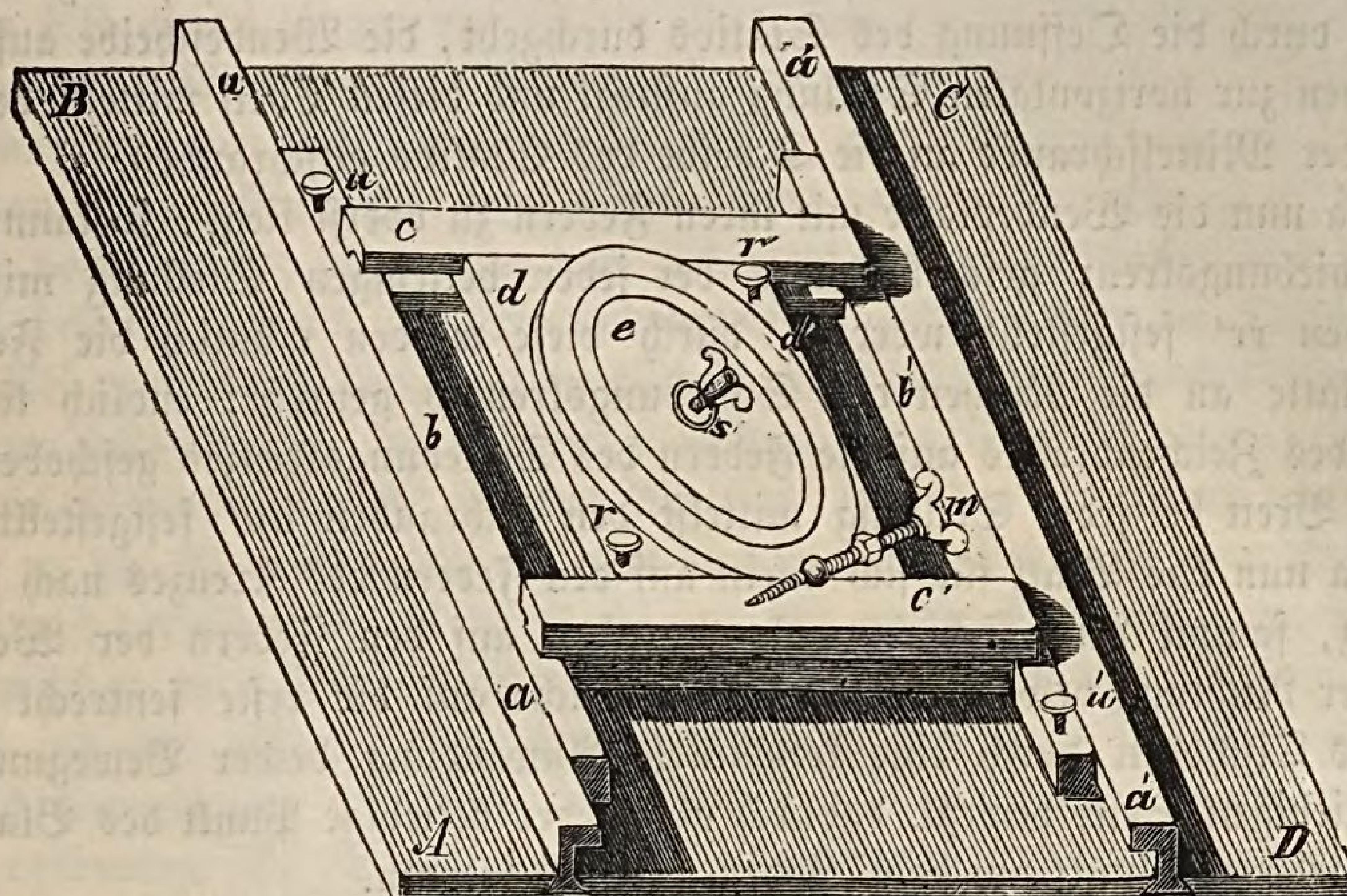
*) Johann Prätorius war geboren 1537 zu Joachimsthal, studirte zu Wittenberg, kam 1596 nach Wien als Professor der Mathematik zum Kaiser Maximilian II., ging 1570 nach Krakau, ward 1571 Professor zu Wittenberg und 1576 zu Altdorf, starb daselbst den 27. Oktober 1616. Die meisten seiner Schriften sind als Manuskripte zu Altdorf aufbewahrt, wo er 40 Jahre lebte; den Meßtisch erfand er im Jahre 1590.

Die Erfindung des Meßtisches machte erst Daniel Schwentner, Schüler und Nachfolger des Prätorius in seiner Geometrie, Nürnberg 1618, und in der zweiten Auflage 1667 pag. 633 bekannt.

**) Jakob von Marinoni war zu Udine 1676 geboren, studirte daselbst und später in Wien; erhielt vom Kaiser Leopold I. den Titel eines Hofmathematikers, von ihm sind die Umfangsmauern um die Vorstädte Wiens entworfen. Die Einrichtung seines Meßtisches machte er in dem Werke: de re ichnographicae, Wien 1751 bekannt; sein Meßtisch hat aber keine Schrauben zur horizontalen Stellung, keine Wendescheibe und Wendeschraube, aber eine doppelte Verschiebung; die Visirebene beim Diopterlineale geht nicht durch die Kante, sondern durch die Mitte desselben. Marinoni starb zu Wien den 10. Jänner 1755, seine Instrumente vermachte er der Kaiserin und diese schenkte sie der Wiener Universität.

Ueber die ursprüngliche Konstruktion des Meßtisches ist noch interessant zu lesen: Penther's Johann, Praxis Geometria, Augsburg 1755, und Theatrum Arithmetico-Geometricum, von Jakob Leupold, Leipzig 1727.

Die ältere Konstruktion des Meßtisches ist von unten angesehen in der Fig. 99 dargestellt; ABCD ist ein gut gearbeitetes Zeichenbrett aus Lindenholz



von 30 Zoll Länge und 24 Breite, in diesem sind zwei parallele Nuthleisten aa' eingepfalzt, ihre inneren Seitenflächen 16 Zoll von einander entfernt. In den Nuthen dieser Leisten läßt sich das Schiebungskreuz bb'cc' verschieben; es besteht aus 4 zu einem Ganzen verbundenen ahornen Stücken, wovon b und b' mit den Leisten aa' gleich hoch, etwa 18" lang sind und nach außen sogenannte Federn haben, die genau in die Nuthen der Leisten aa' passen; die Stücke cc' dagegen sind unter rechten Winkeln mit bb' verbunden, also unter sich parallel, 16 Zoll lang und 9 Zoll von einander entfernt. Die Leisten cc' haben wieder Nuthen, in welchen die Federn der Wendeplatte dd' liegen; diese ist ein viereckiges Brettchen 9 Zoll im Quadrat und liegt mit den Leisten cc' in einer Ebene.

Auf die Wendeplatte ist die Wendescheibe e so befestigt, daß sich diese blos rund drehen läßt, diese drehende Bewegung wird mittelst der Wendeschraube m hervorgebracht; da nämlich die Spindel dieser Schraube mit der Wendeplatte, ihre Mutter aber mit der Wendescheibe verbunden ist, so nimmt die Mutter bei der Drehung der Schraube die Scheibe mit.

In der Mitte der Wendescheibe ist eine Schraube s (die Mittel-, oder auch Herzschraube genannt), die einerseits in eine Nuß endigt und durch diese mittelst einer Platte an die Wendescheibe befestiget ist, anderseits an dem aus der Nußplatte hervorragenden Theile einen viereckigen Ansatz hat, der genau in die gleichgeformte Oeffnung eines Scheibenstativs paßt, sodann erst mit einer Schraube endigt, deren Flügelmutter die Verbindung des obern Theiles mit dem Stative vermittelt.

Die zwei Schrauben r und r' haben ihre Mutter in der Wendeplatte, jene u und u' aber in den Leisten b, b'; die ersten Schrauben dienen zur Feststellung der Wendeplatte, die letztern zur Feststellung des Schiebungskreuzes.

Der Meßtisch besteht daher, das Stativ nicht mitgerechnet, aus drei von einander getrennten Stücken:

1. aus der Wendeplatte und Scheibe sammt der Mittelschraube,

2. aus dem Schiebungskreuze, und
3. dem Zeichenbrette selbst.

Denken wir uns nun diese Theile auseinander genommen, so kann man zuerst das 1. Stück auf das Scheibenstativ aufsetzen, nämlich so, daß die Mittelschraube durch die Oeffnung des Stativs durchgeht, die Wendescheibe auf den drei Schrauben zur horizontalen Stellung aufliegt und diesen Theil mittelst der Flügelmutter der Mittelschraube an die Scheibe des Stativs anschrauben.

Da nun die Wendeplatte mit ihren Federn zu oberst liegt, so kann auf diese das Schiebungskreuz geschoben und bei jeder beliebigen Stellung mittelst den Schrauben rr′ festgestellt werden, durch diese werden nämlich die Federn der Wendeplatte an die Nuthen des Schiebungskreuzes gepreßt; endlich können die Nuthen des Zeichenbrettes auf die Federn des Schiebungskreuzes geschoben werden und das Brett bei jeder Stellung mittelst den Schrauben uu′ festgestellt werden.

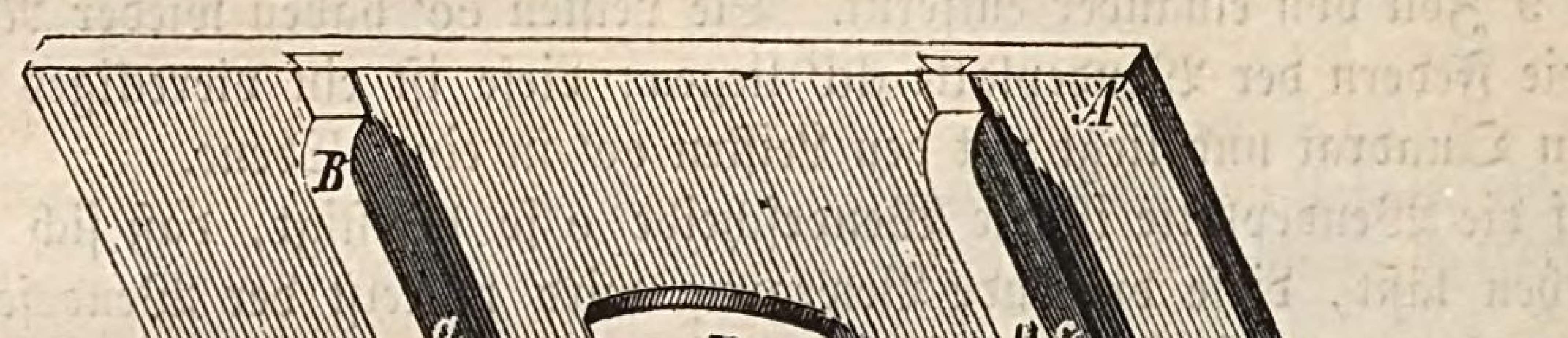
Da nun das Blatt für sich allein auf den Federn des Kreuzes nach der einen Richtung, sammt dem Schiebungskreuze aber auf den Federn der Wendeplatte nach einer Richtung bewegt werden kann, welche auf die erste senkrecht steht, so kann das Tischblatt durch eine kombinirte Anwendung beider Bewegungen nach jeder beliebigen Seite bewegt, dadurch aber jeder beliebige Punkt des Blattes über einen gegebenen Punkt auf dem Boden gebracht werden.

Wird hierauf das Tischblatt durch das Anziehen aller Schrauben festgestellt, so kann dennoch der Wendeplatte und den ober ihr liegenden mit ihr verbundenen Theilen eine sanfte, drehende Bewegung mittelst der Wendeschraube ertheilt werden.

Anmerkung. Es existiren auch ältere Meßtische, an denen keine Schrauben zur horizontalen Stellung vorkommen, solche sind in ihrem Baue etwas einfacher, lassen sich aber nicht scharf horizontal stellen.

§. 98. Eine im Vergleiche mit dem Marinoni'schen Tische wesentlich verbesserte Konstruktion hat der sogenannte Kraft'sche Meßtisch.

Von unten angesehen ist dieser in der Fig. 100 dargestellt, und besteht aus



einem 30 Zoll langen und 24 Zoll breiten Reißbrette AA′, in welchem von unten zwei starke Einschubleisten B und C eingelassen sind.

Diese Einschubleisten sind in ihrer Mitte nach zwei senkrecht auf einanderstehenden Richtungen und zwar einmal ein Fuß lang parallel mit der Ebene des

Tischblattes und dann senkrecht auf diese 8 Zoll lang ausgeschnitten. Die längeren Schnitte sind in der Figur mit ab und cd, die kürzeren mit ef und gh bezeichnet.

Der zweite Bestandtheil des Meßtisches ist ein Schiebungskreuz DE, dessen ein Arm EE etwas länger ist, als die Entfernung der Einschubleisten und nur so dick, daß er zwischen den Ausschnitten ab und cd beliebig gewendet werden kann.

Innerhalb den Einschubleisten B und C und dem Tischbrette sind Schraubenmuttern eingelassen, von dem einen Ende zum andern des Ausschnittes ef und gh verschiebbar; wird nun das Schiebungskreuz zwischen den Ausschnitten ab, cd beliebig gestellt, die Schraubenmuttern genau unter die Einschnitte des Armes EE gebracht, so kann dieser zwischen den Ausschnitten durch die zugehörigen Schrauben festgeklemmt, bei gelockerten Schrauben aber beliebig gewendet werden.

Die Wendescheibe W ist aus Messing und hat an ihrem Umfange die Mutter zu der Wendeschraube w, und da diese eine Schraube ohne Ende ist, so kann mittelst derselben die Wendescheibe um die ganze Peripherie gedreht werden.

Zwischen der Wendescheibe und dem Schiebungskreuze befindet sich eine hölzerne mit der erstern gleich große, etwa $\frac{1}{2}$ Zoll dicke Scheibe, welche mit dem Schiebungskreuze fest, mit der Wendeplatte aber durch einen messingenen Bolzen verbunden ist. Wird nun die Wendeschraube aus der Mutter ausgelöst, so läßt sich das Schiebungskreuz, somit auch das Tischblatt und die hölzerne Scheibe ohne die Wendescheibe beliebig drehen, kann aber nach jeder Bewegung durch das Einlegen der Wendeschraube wieder fest gehalten werden.

Die Verbindung der Wendescheibe mit einem Reichenbach'schen Stative, ist wie bei dem vorerst beschriebenen Meßtische.

Dieser Meßtisch besteht also — das Stativ nicht mitgerechnet — nur aus zwei von einander getrennten Stücken:

1. aus dem Tischblatte,
2. aus dem Schiebungskreuze sammt der Wendeschraube und Scheibe.

Wird nun der viereckige Hals der Mittelschraube in die eben so geformte Oeffnung des Stativs gesteckt, so kommt die Wendescheibe auf die drei Stellschrauben zu liegen und kann mittelst der Flügelmutter der Mittelschraube angepreßt werden; sind nun die Klemmschrauben in den Ausschnitten der Einschubleisten gelüftet, so kann, wie bekannt, dem Tischbrette schiebend eine größere Bewegung ertheilt werden, sind aber dieselben Schrauben angezogen, dafür die Wendeschraube ausgelöst, so läßt sich das Brett sammt dem Kreuze drehen.

Es würde zu weit führen, hier eine Vergleichung hinsichtlich der größeren oder geringeren Zweckmäßigkeit der beiden Meßtische anzustellen; Jeder, der mit beiden zu arbeiten Gelegenheit hat, wird den Kraft'schen Meßtisch gehörig zu würdigen wissen.

Anmerkung. Vergleicht man den Meßtisch von Kraft mit jenem, welchen Prof. Winkler in seinem Lehrbuche der praktischen Geometrie beschreibt, so kann man sich des Gedankens nicht erwehren, daß der erstere nur eine verbesserte Ausführung der Winkler'schen Idee ist.

Prüfung und Berichtigung des Meßtisches.

§. 99. Sind die erforderlichen Theile des Meßtisches nicht gehörig fest, und entweder zu leicht oder zu streng beweglich, beim gebrauchten Meßtische die Schrauben schon zu viel abgenützt und zu locker, ist dem Schlottern der Füße beim Stative durch ein festes Zusammenschrauben nicht abzuhelfen, so kann ein

solches Instrument nur von einem Mechaniker wieder in brauchbaren Zustand gebracht werden.

Sind aber die Bestandtheile im guten Stande, so hat der Geometer vor dem jedesmaligen Gebrauche der Tischblatte noch zu untersuchen, ob die obere Fläche vollkommen eben ist, zu welchem Zwecke er ein nach §. 57 berichtigtes Lineal mit der Kante an das Tischblatt nach verschiedenen Richtungen legt, und nachsieht, ob alle Punkte dieser Kante dieselbe genau berühren.

Ist ein grober Fehler vorhanden, so läßt man ihn von einem Tischler so viel wie möglich beseitigen, die genaue Ebene aber erhält man sodann, wenn man zwischen zwei mit den Zeichenflächen an einander gelegte Tischbretter fein gestoßenen Bimsstein streut, und beide so lange an einander reibt, bis die Bretter so kohäriren, daß das untere mit dem obern ohne weitere Verbindung oder Unterstützung aufgehoben werden kann.

Den Meßtisch horizontal zu stellen.

§. 100. Da die Meßtischebene als der Limbus des Winkelinstrumentes zu betrachten ist, so muß dieselbe vor dem Gebrauche in die horizontale Lage gebracht werden; zu diesem Zwecke werden die Füße des Stativs so weit auseinander gestellt, daß das Tischblatt eine bequeme Höhe und eine beiläufig horizontale Lage erhalte, hierauf werden die Füße in den Boden gedrückt, um dem Meßtische eine feste Stellung zu ertheilen; ist das geschehen, so wird die Mittelschraube gelüftet, die im §. 83 beschriebene und rektifizirte Libelle in die Mitte des Blattes nach der Richtung einer Stellschraube aufgesetzt, und die Blase mittelst dieser Schraube zum Einspielen gebracht; hierauf wird die Libelle von der Mitte nach der Richtung einer zweiten Stellschraube gelegt, und mit dieser zum Einspielen gebracht.

Da auf diese Art das Blatt nahe horizontal wird, somit nicht mehr viel gehoben zu werden braucht, so wird nun die Mittelschraube angezogen, die eben erklärte Art, den Tisch horizontal zu stellen, vom Neuen vorgenommen, und so lange wiederholt, bis die Blase der Libelle, diese mag auf einen beliebigen Ort des Tischblattes gestellt werden, genau einspielt.

Beschreibung des Diopterlineals.

§. 101. Da mittelst des Meßtisches die horizontale Projektion der Winkel graphisch bestimmt wird, so ist hiezu außer dem Limbus (der Tischblatte) noch eine Alhidade und eine mit dieser in unmittelbarer Verbindung stehende, durch die Diopter bestimmte Visirebene erforderlich.

Diese Erfordernisse vereinigt in sich das bereits von **Prätorius** angegebene und nach seinen Bestandtheilen so genannte Diopterlineal, es besteht nämlich,

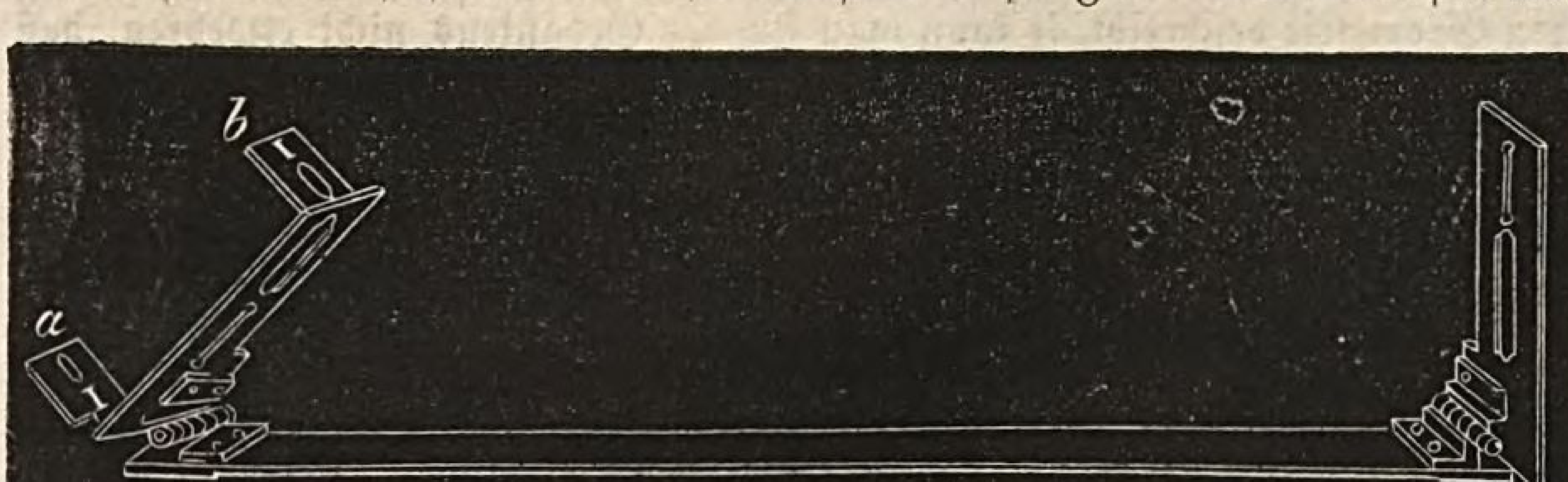


Fig. 101, aus einem 30 Zoll langen, $1\frac{1}{2}$ Zoll breiten messingenen oder auch nur hölzernen Lineale, welches an einer der längeren Seiten etwas dünner

und vollkommen gerade gehobelt ist. An den Enden sind 8 Zoll hohe und etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll breite messingene Diopter um Scharniere beweglich und lassen sich, wenn das Diopter zum Visiren gebraucht wird, vertikal auf die untere Ebene des Lineals aufstellen. Die Diopter weichen in ihrer Einrichtung von den im §. 68 beschriebenen in so ferne ab, als jedes einzelne abgetheilt, und die eine Hälfte ein Objektiv, die andere ein Okulardiopter ist; eines dieser Diopter hat nämlich an der unteren Hälfte eine enge $2\frac{1}{2}$ Zoll lange Spalte (die Okularspalte), an der oberen eine eben so lange aber 0·4 Zoll breite Oeffnung, in deren Mitte der Länge nach der Objektivfaden oder ein Pferdehaar, auch ein dünner schwarzer Draht gespannt ist, das andere Diopter hat unten eine 4 Zoll lange Objektivöffnung, einen eben so langen Faden und oberhalb derselben eine $1\frac{1}{2}$ Zoll lange Okularspalte.

Jedes der Scharniere ist mittelst zweier Schrauben an das Lineal, das Diopter dagegen mittelst zwei andern Schrauben an die Scharniere befestigt, wodurch es möglich wird, der, durch die Diopter bestimmten Visirebene eine solche Lage zu ertheilen, daß sie genau durch die Kante des Lineals geht (§. 88) und senkrecht auf die untere Ebene des Lineals steht (§. 87).

Rektifikation des Diopterlineals.

§. 102. Aus der Beschreibung dieses Visirmittels und dem im zweiten Abschnitte Gesagten folgt, daß dieses nur dann zum Gebrauche geeignet ist, wenn:

1. der Rand (die Kante) eine gerade Linie ist;
2. die Visirebene senkrecht auf die untere Ebene des Lineals steht, und
3. genau durch die Kante des Lineals geht.

Ad 1. Wie ein Lineal in Bezug auf diese Eigenschaft geprüft werden soll, ist bereits im §. 57 erklärt worden, eine Nachhilfe kann nur ein geschickter Mechaniker vornehmen.

Ad 2. Die Visirebene wird auf die untere Ebene des Lineals, somit auch auf die des Tisches senkrecht stehen, wenn der Objektivfaden oder das Haar und die Okularspalte vertikal sind.

Zur Untersuchung beider Bedingungen muß man eine vertikale und gut zu pointirende Linie haben, die man einfach dadurch erhält, daß man das eine Ende einer schwarzen Schnur an eine weiße und gut beleuchtete Wand befestigt, an das andere Ende ein Gewicht anbindet, wodurch jene in der vertikalen Richtung gespannt erhalten wird.

Nach dieser Vorbereitung stellt man den Meßtisch 20 bis 30 Klafter von der Schnur entfernt horizontal auf, legt das Diopterlineal, bei dem beide Flügel ganz aufgeschlagen sind, auf das Tischblatt und bringt das Objektivhaar sehr nahe an die Schnur. Erscheint nun dem Auge, das von einem Punkte des Okulardiopters visirt, das Haar parallel mit der Schnur, so ist ersteres entweder auch vertikal oder nur in der Visirebene gegen den Meßtisch geneigt, dieser letztere Umstand hat aber, wie leicht begreiflich ist, keinen nachtheiligen Einfluß. Bildet jedoch das Haar mit der Schnur einen Winkel, so sieht man auch zugleich, nach welcher Seite dasselbe von der vertikalen Richtung ausweicht, und kann eine kleine Korrektur dadurch erreichen, daß man von den kleinen hölzernen Keilen,

mittelst welchen das Haar an das Diopter eingespannt ist, einen oder nach Erforderniß auch beide herausnimmt, dem Haare die richtige Stellung gibt, und es in dieser befestigt.

Glaubt man jedoch mit diesem Mittel nicht auszureichen, so lüftet man jene zwei Schrauben, mittelst welchen das Scharnier des Objektivdiopters an das Lineal befestigt ist, legt nach Erforderniß zwischen das Scharnier und das Lineal kleine Stücke Papier und zieht die gelüfteten Schrauben wieder fest an. Auf diese Art kann man den Fehler immer wegbringen.

Ist das Objektivhaar vertikal gestellt, so visirt man durch die untere Oeffnung der Okularspalte und bringt das Haar in die Mitte der Schnur, hierauf sieht man durch die obere Oeffnung der Spalte nach, ob auch von dieser gesehen, das Haar in der Mitte der Schnur erscheint; sollte dies nicht der Fall sein, so wird das Objektivhaar mit der Schnur zwar parallel erscheinen, aber aus der durch das Objektivhaar und die untere Oeffnung der Okularspalte bestimmten Ebene ausweichen; somit ist die Spalte nicht vertikal, kann aber durch dieselben Mittel vertikal gestellt werden, welches bei der Rektifikation des Objektivhaares angegeben worden ist.

Es ließe sich auch der Neigungswinkel der Okularspalte gegen den Meßtisch, falls jener in einer vertikalen Ebene liegt, berechnen, wenn die Länge der Okularspalte, so auch des Lineals die Entfernung des Objektivhaares von der Mauer und der Abstand der Visur bei der obern Oeffnung von der Schnur bekannt sind, doch dergleichen Berechnungen haben für die Praxis keinen Werth.

Ad 3. Nachdem die vorhergehende Rektifikation ausgeführt ist, wird die Visirebene genau auf die Schnur eingestellt, auf dem Tischblatte neben der Kante des Lineals eine feine Bleilinie gezogen, an den Enden derselben feine Nadeln vertikal gestellt, das Diopterlineal sodann der Art umgekehrt, daß die Diopterflügel nach abwärts zu liegen kommen, und das Lineal in dieser Lage mit der Kante sanft an die beiden Nadeln angelegt.

Trifft nun die Visirebene in dieser Lage nicht eben so genau wie vor dem Umlegen auf die Schnur, so kann der Fehler entweder in der unrichtigen Stellung der Okularspalte allein, oder des Objektivhaares oder endlich in beiden zugleich liegen.

Läßt man die Oeffnungen für jene zwei Schrauben, welche das Objektivdiopter an das Scharnier halten, in der horizontalen Richtung erweitern, so kann man durch eine Verschiebung dieses Diopters die Visirebene wenigstens parallel mit der Kante und falls die Okularspalte richtig gestellt ist, die beabsichtigte Rektifikation ganz gut ausführen.

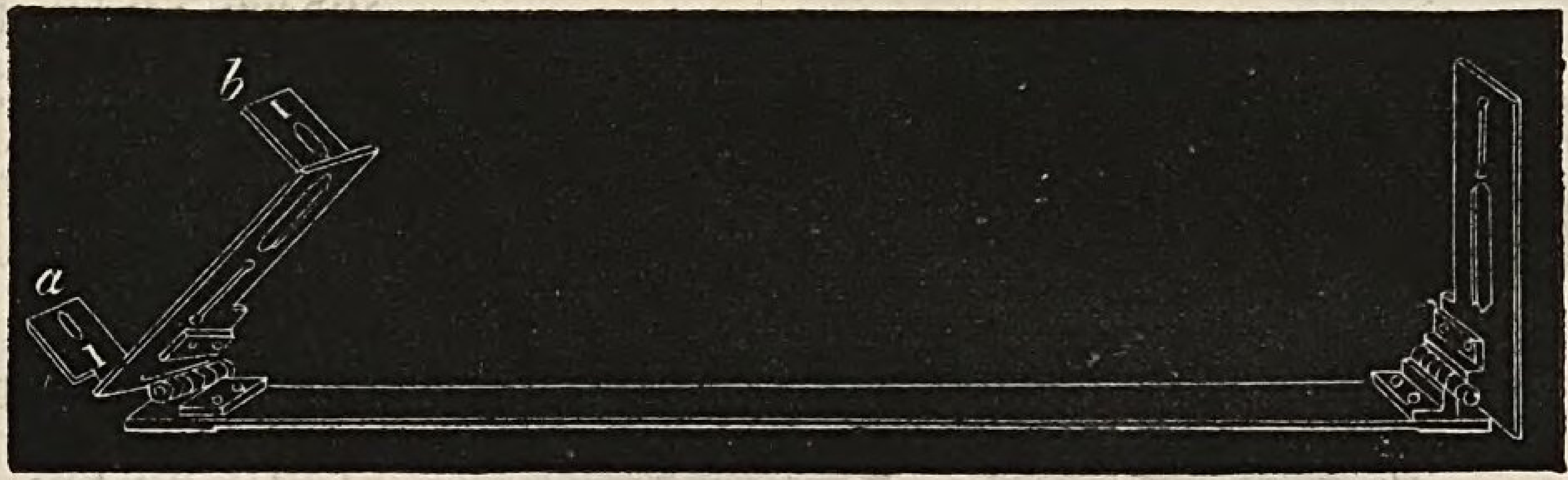
Nehmen wir an das Objektivhaar sei ganz richtig gestellt, und von der Schnur 30 Klafter entfernt, die Okularspalte weiche jedoch um 0·5 Linie aus der Kante aus, so wird die Visur nach der Umkehrung des Diopters von der Schnur um 3 Zoll ausweichen; verstellt man nun, um diesen Fehler wegzubringen, den Objektivfaden um die erforderliche Größe, so hat man den Fehler an einer unrichtigen Stelle gesucht. Ich habe in der ersten Auflage dieses Werkes eine Rektifikation des Diopterlineals angegeben, bei welcher die richtige Stellung jedes Flügels für sich ausgemittelt wird, aber angenommen, die Visirebene sei zwar mit der Kante des Lineals parallel, weiche aber aus dieser um 0·5 Linien, so beträgt der dadurch verursachte Fehler, wenn das eine der anvisirten Signale 300, das andere 10 Klafter entfernt ist, nur 11 Sekunden, ist somit ohne merklichen Einfluß, daher die obige einfache Rektifikation auch brauchbar.

Die bisher erklärten Rektifikationen beziehen sich nur auf die durch die untere Okularspalte und den entsprechenden Objektivfaden bestimmte Visirebene, welche allerdings die wesentlichere ist, eine zweite Visirebene ist aber auch durch die obere Spalte und das entsprechende Haar bestimmt; um sich noch zu überzeugen, daß diese Ebene die sub 2 und 3 angeführten Eigenschaften hat, lege man das Diopterlineal auf den Meßtisch, die Kante an die oben erwähnte Bleilinie und die bereits rektifizirte Ebene auf die Schnur. Nun wendet man das Diopterlineal so um, daß das Objektivdiopter gegen den Beobachter, das Okulardiopter gegen die Schnur gerichtet ist, und die Kante wieder genau an die Bleilinie zu liegen kommt.

Ist das Diopterlineal aus der Hand eines fleißigen Arbeiters, so wird der Objektivfaden scharf auf die Mitte der Schnur eintreffen, findet aber eine Abweichung statt, und läßt sich diese durch eine kleine Verrückung des Objektivfadens nicht wegbringen, dann bleibt, da zur Rektifikation dieser Visirebene keine besonderen Schrauben vorhanden sind, nichts übrig, als jeden Gebrauch derselben zu meiden.

§. 103. Ist ein so konstruirtes Diopter noch so genau rektifizirt, so trägt es dennoch die im §. 90 besprochenen Gebrechen an sich, durch welche die Genauigkeit wesentlich beeinträchtigt ist.

Der §. 90, Gleichung 2), berührte Uebelstand wird jedoch durch die sogenannten Bergdiopter beseitigt; man setzt nämlich an das eine der Diopter (gewöhnlich an jenes, dessen Okularspalte unterhalb der Objektivöffnung liegt) noch zwei andere, in der Fig. 101 mit a und b bezeichnet, etwa zwei Zoll hohe Diopter auf, von denen jedes wieder eine Okularspalte und Objektivöffnung hat, und da der Diopterflügel, an dem sie befestigt sind, durch das Scharnier beweglich ist, so wird



es möglich, Signale in einer beliebigen Höhe oder Tiefe anzuvisiren, allein, ist das Diopter a niedergelegt, so verdeckt es einen Theil der Okularspalte, ist es aufgestellt, so hindert es das Auge, sich der Okularspalte zu nähern, zudem ist für den Abstand beider Diopter von 8 Zoll der Objektivfaden gewöhnlich viel zu dick, so daß man auf eine größere Distanz mit Sicherheit nicht visiren kann.

Die Prüfung der Bergdiopter ist besonders dann mit großer Schärfe vorzunehmen, wenn man genöthigt wäre, diese abwechselnd mit den andern Dioptern anzuwenden; sie ist folgende:

Man legt das Diopter auf den horizontal gestellten Tisch und visirt durch die rektifizirten Diopter den Objektivfaden auf die Schnur, ist dies geschehen, so legt man das Objektivdiopter nieder, von dem Bergdiopter stellt man blos das Okular auf, und neigt den Diopterflügel nur so weit, daß man durch die Spalte die Schnur sieht; erscheinen nun beide in einer Ebene, so ist die Okularspalte des Bergdiopters richtig gestellt, wo nicht, so hat der Geometer kein Mittel diesen Fehler wegzubringen. Findet man aber, daß die Okularspalte gut gestellt ist, so stellt man das Objektivdiopter auf und beobachtet ob auch dieses in der durch

die Kante des Lineals bestimmten vertikalen Ebene liegt; und erst wenn beide Erfordernisse vorhanden sind, prüfe man ob das Diopter bei jeder Neigung in der Visirebene bleibt. Visirt man bei verschiedenen Neigungen des Flügels auf die Schnur, und bleibt die Visur in einer Ebene, so ist das Bergdiopter brauchbar, weicht die Visur aber aus, so ist das Scharnier fehlerhaft gebohrt, und dieser Fehler nur durch ein besser gearbeitetes Scharnier zu beseitigen.

Anmerkung. Da ein solches Diopterlineal bei vier Wiener Pfunde wiegt, somit durch die Reibung an dem Tischblatte die bereits gezogenen Bleilinien verwischt, so muß dasselbe am besten mit dünnen ausgebreiteten Strohhalmen unterlegt sein.

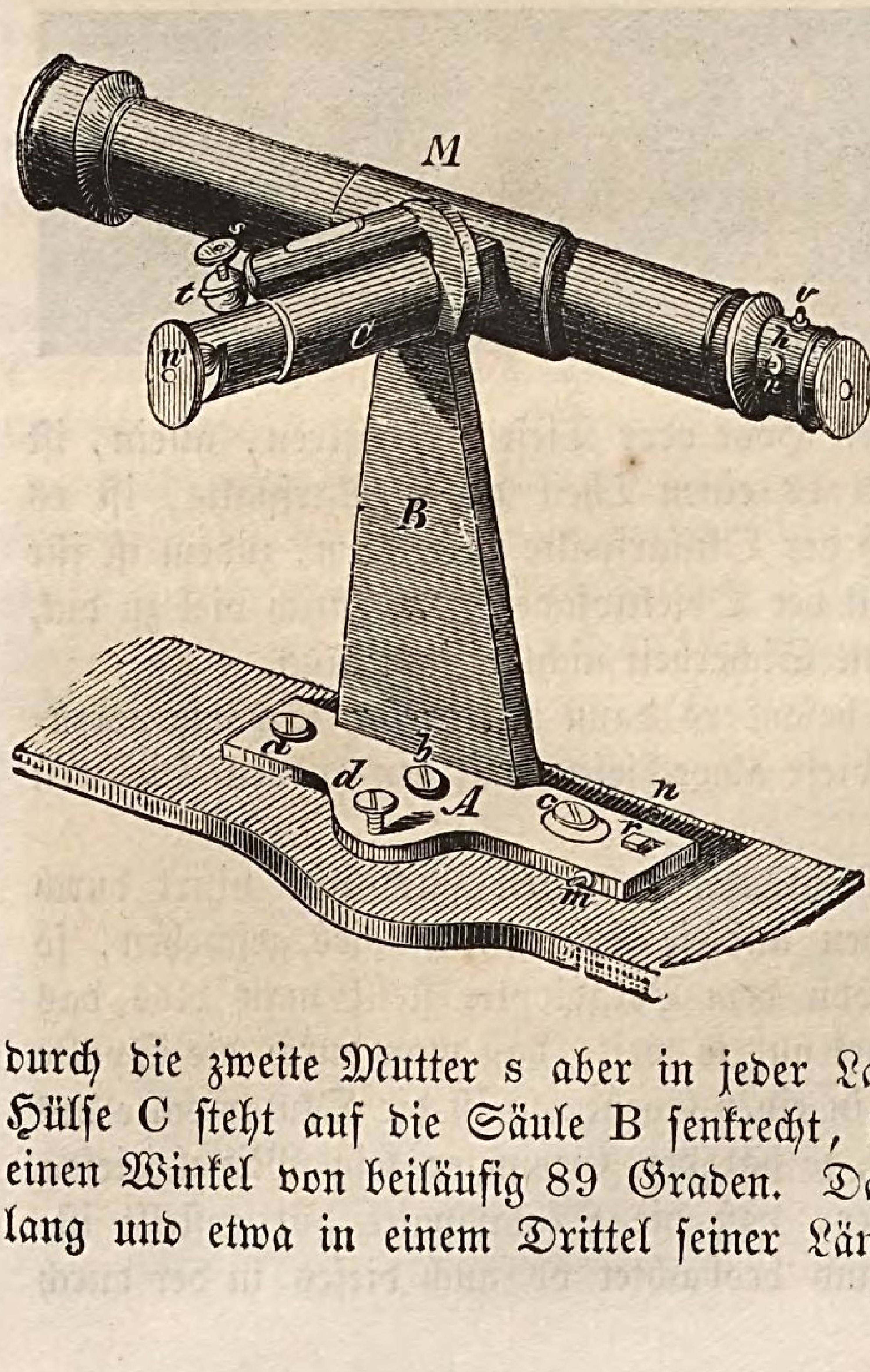
Beschreibung des Perspektivlineals.

§. 104. Das Perspektivlineal besteht aus einem messingenen 30 Zoll langen Lineale, auf das ein bewegliches Fernrohr aufgesetzt ist; aber so einfach auch die Zusammensetzung desselben ist, so hat dennoch fast jeder Mechaniker demselben eine zur Rektifikation bequemere Einrichtung zu geben getrachtet; wir haben drei in einigen Stücken von einander abweichende Perspektivlineale hier aufgenommen, weil alle drei häufig vorkommen und das Wesentlichste der übrigen in sich enthalten.

Das Perspektivlineal von Sadtler.

Die älteste Konstruktion unter diesen Perspektivlinealen ist die von dem Wiener Mechaniker Sadtler angegebene.

Das Lineal, Fig. 102, ist nur an der einen Seite ganz gerade, an der andern geschweift, und hat in der größten Breite $3\frac{1}{2}$ Zoll, diese nimmt bis auf $1\frac{3}{4}$ Zoll ab. Die 6 Zoll hohe Säule B ist mit ihrer breiten Basis A aus einem Stücke und diese mittelst den drei Schrauben a, b, c an das Lineal angeschraubt, die Schraube d hat ihre Mutter in der Basis A und stemmt sich blos gegen die Fläche des Lineals. Der vierkantige Ansatz r ist mit dem Lineale aus einem Stücke, die Schrauben m und n haben ihre Muttern in der Basis A und stemmen sich gegen diesen Ansatz. An der Säule B ist oben eine konische Hülse C befestigt, oberhalb dieser eine kurze Libelle, welche mittelst der Schraubenmutter t gehoben oder gesenkt,



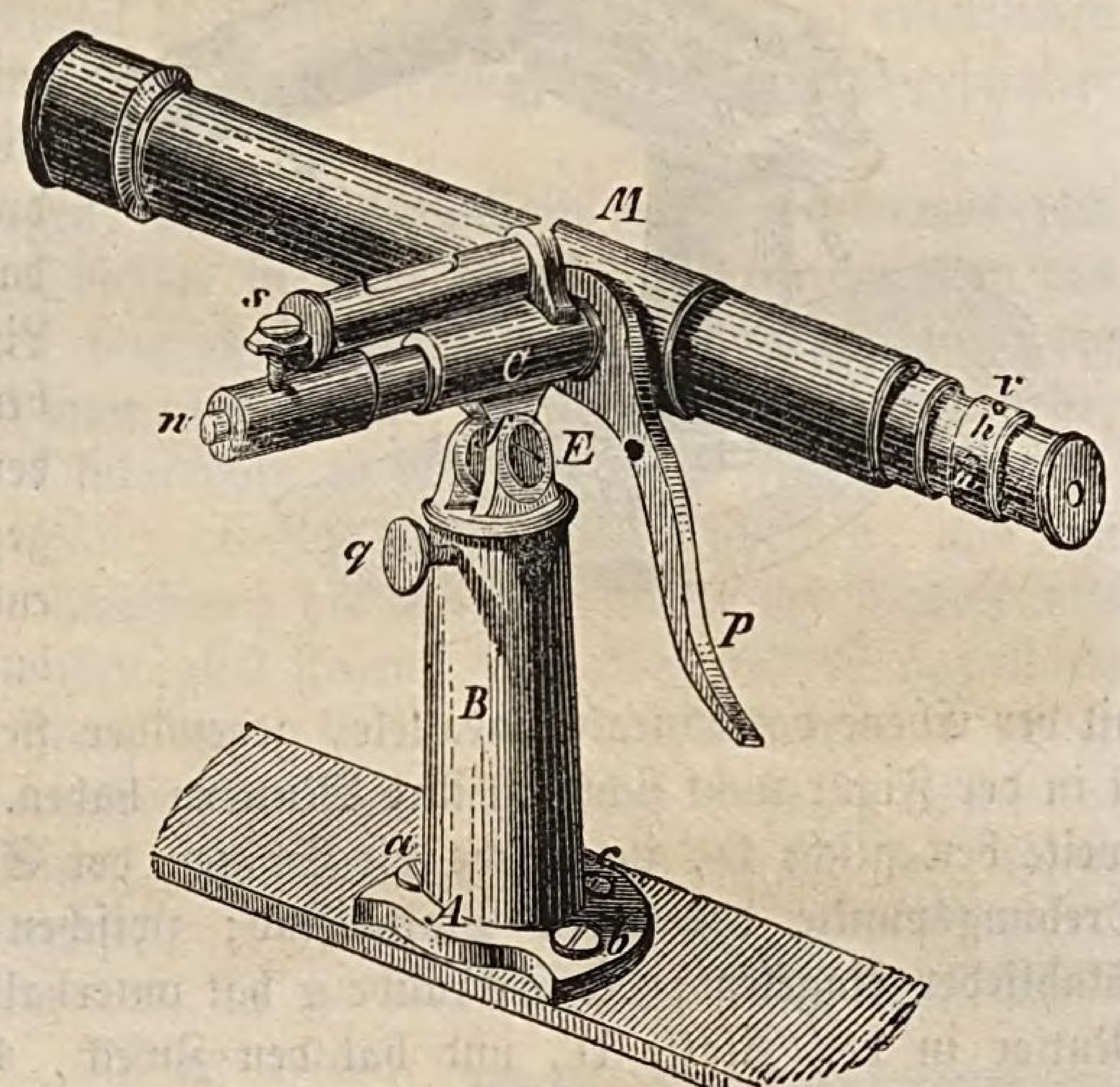
durch die zweite Mutter s aber in jeder Lage festgehalten wird. Die Achse der Hülse C steht auf die Säule B senkrecht, diese aber bildet mit ihrer Basis A einen Winkel von beiläufig 89 Graden. Das achromatische Fernrohr ist 14 Zoll lang und etwa in einem Drittel seiner Länge, vom Okulare gemessen, an eine

Hülse M angeschraubt; die Verbindung des Rohres mit der Säule ist im §. 92 sub 1 besprochen worden; an die Hülse M ist nämlich ein abgestutzter Kegel aus Stahl so befestigt, daß sich seine und die optische Achse des Rohres unter einem rechten Winkel schneiden; der Kegel paßt in die Oeffnung der Hülse C und wird darin durch die Schraubenmutter w fester oder lockerer gehalten.

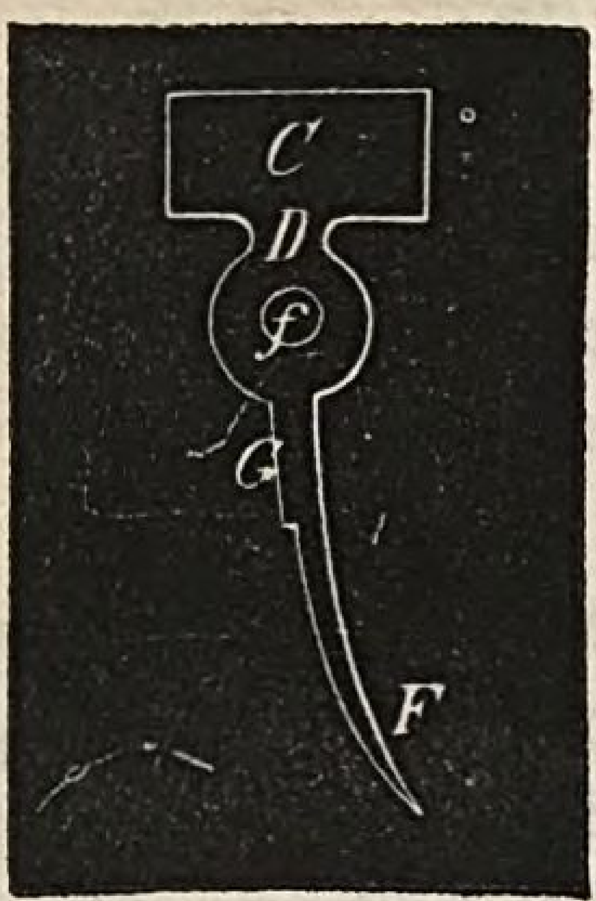
Das Fadenkreuz läßt sich durch die Schraube u, und eine zweite dieser entgegen gesetzte in der Richtung der beiden Schrauben, mittelst des Ringes h aber, sammt den Schrauben u und v längs der Okularröhre verschieben, wird aber die Schraube v gelüftet, so kann das Fadenkreuz wieder mittelst des Ringes h so weit gedreht werden, daß der eine Faden vertikal, somit der andere horizontal wird. Daß das Fadenkreuz sammt der Okularlinse, also die Okularröhre selbst, beweglich sind, ist bekannt.

Beschreibung des Perspektivlineals von Kraft.

§. 105. Die in der Fig. 103 dargestellte Anordnung des Perspektivlineals ist von dem Wiener Mechaniker Kraft. Das zwei Zoll breite Lineal ist beiderseits gerade und kantig geschliffen *), die Säule B ist mittelst der durch ihre Basis A gehenden drei Schrauben a, b, c an das Lineal angeschraubt, der Kopf jener Schraube c ist absichtlich in die Platte eingesenkt; die Säule B ist hohl, und endet oben in zwei Ansätze E, welche durchbohrt sind. Das 15 Zoll lange achromatische Fernrohr ist beiläufig in einem Drittel seiner Länge, vom Okularglase gemessen, durch einen Ring M umfaßt, an welchem ein abgestutzter Kegel befestigt ist, dessen Achse die des Fernrohres rechtwinklig durchschneidet.



Der Kegel paßt genau in die Hülse C und wird daselbst durch die Schraube w gehalten. Die Verbindung der Hülse mit der Säule B ist deutlicher in der Fig. 104 ersichtlich, die Hülse C nämlich hat unten einen starken Ansatz D, der eben so breit ist als die Ansätze E von einander entfernt sind, der Ansatz D endet in einen zweiten G und dieser endlich in eine messingene Feder F. Der Theil F und G wird nun in die hohle Säule B so gesteckt, daß man durch die Oeffnungen f (in dem Ansatze D und E) eine Schraube durchstecken kann, mittelst der E an D angezogen wird. Die Schraube q hat ihre Mutter in der Säule B,



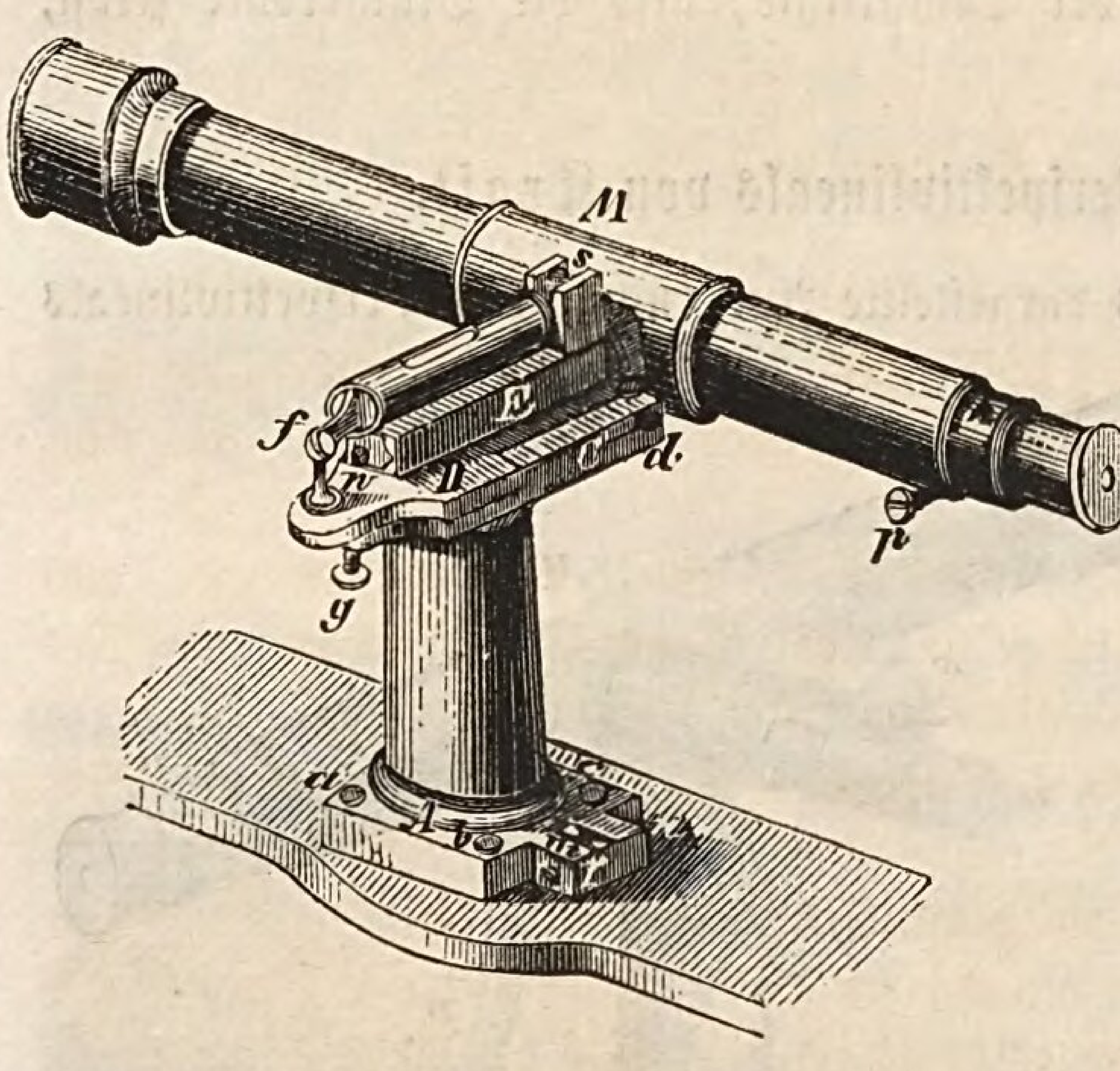
*) Diese Form des Lineals kann leicht zu Irrungen Anlaß geben.

drückt bei ihrer Bewegung an das Stück G, wodurch die Neigung der Hülse geändert, und durch die Feder F eine bestimmte Neigung unverändert erhalten wird. Oberhalb der Hülse liegt eine kleine Libelle, s ist ihre Rektifikationsschraube.

Die Einrichtung der Okularröhre hinsichtlich des Fadenkreuzes ist genau so wie bei dem Sadtler'schen Perspektivlineale.

Beschreibung des Perspektivlineals von Schablaß.

§. 106. Das von dem Wiener Mechaniker Schablaß angegebene Perspektivlineal hat die in der Fig. 105 dargestellte Einrichtung. Das Lineal ist dort, wo die 6 Zoll hohe Säule B aufsteht, etwa einen Zoll breiter, außerdem aber durchaus gleich, nämlich $1\frac{1}{2}$ Zoll breit, also nur an der einen Kante ganz gerade.



Die Basis A der Säule ist mittelst vier Schrauben an das Lineal befestigt, von denen nur die drei a, b, c in der Zeichnung sichtbar sind; der Ansatz r ist in das Lineal eingeschraubt, die Schrauben m, n haben ihre Muttern in der Basis A und stemmen sich gegen den Ansatz. Die Säule B endet oben in eine, mit ihr verbundene Platte C, in welcher zwei mit der Ebene des Lineals parallele, gegenüber stehende Schrauben d (die zweite ist in der Figur nicht sichtbar) ihre Muttern haben. Auf der Platte C liegt eine zweite bewegliche D, in welche die Spitzen der Schrauben d eingreifen und die Drehungspunkte der obern Platte sind; zwischen beiden Platten ist eine starke Stahlfeder eingelegt; die Schraube g hat unterhalb C einen breiten Ansatz, ihre Mutter in der Platte D, und hat den Zweck, dieser eine bestimmte Neigung gegen den Horizont zu ertheilen, welche durch die Feder unveränderlich erhalten wird. Das vierseitige Prisma E ist an die Platte D fest, innerhalb aber konisch ausgehöhlt; die oberhalb E liegende Libelle hat bei s ihre Rektifikationsschraube, f ist der Drehungspunkt der Libelle, wenn s gedreht wird.

Das 10 Zoll lange Fernrohr hat ein achromatisches Objektiv, ein terestrisches Okular, ist nahe in der Mitte mit einem Ringe M aus Glockenmetall umfaßt, an welchem ein Kegel befestigt ist, der in die Höhlung des Prisma E paßt und darin durch die Schraube w gehalten wird.

Der Ring h an der Okularröhre ist längs derselben verschiebbar, hiedurch wird das Fadenkreuz in der Richtung der optischen Achse bewegt; durch die Schräubchen u und eine zweite dieser diametral gegenüber liegenden kann das Fadenkreuz in der Richtung dieser Schrauben bewegt werden, um aber dem Fadenkreuze auch eine drehende Bewegung ertheilen zu können, hat die Okularröhre unten eine kleine Leiste, diese liegt zwischen den Schrauben p und p' (diese letztere ist in

der Zeichnung nicht sichtbar), welche ihre Muttern in der Okularröhre haben; durch diese Schrauben kann das Fadenkreuz rechts oder links gewendet werden.

Rektifikation der vorhergehenden Perspektivlineale.

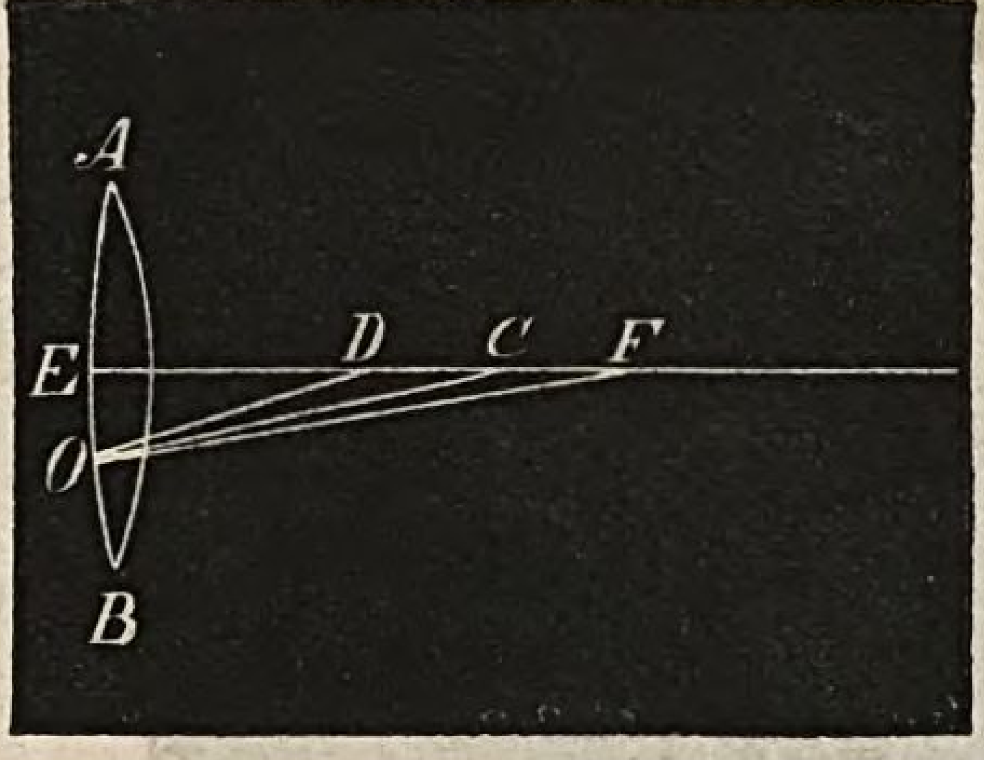
§. 107. Die Bedingungen, welche ein brauchbares Perspektivlineal zu erfüllen hat, sind folgende: es soll

1. die eine Kante des Lineals gerade sein,
2. das Fadenkreuz mit dem optischen Bilde in einer Ebene liegen,
3. die optische Achse auf die Drehungsachse senkrecht stehen,
4. die Drehungsachse horizontal sein,
5. die Visirebene durch die Kante des Lineals gehen; endlich wird noch gewöhnlich verlangt, daß
6. der eine Faden des Fadenkreuzes vertikal gestellt sei.

Ad 1. Die Art, wie ein Lineal hinsichtlich dieser Eigenschaft zu untersuchen ist, wurde bereits §. 57 erklärt; eine Nachbesserung kann nur ein geschickter Mechaniker vornehmen.

Ad 2. Um sich zu überzeugen, ob der Durchschnitt des Fadenkreuzes und das optische Bild des anvisirten Objektes in einer Ebene liegen, richte man das Fernrohr auf einen weit entfernten deutlich sichtbaren Gegenstand, und ziehe die Okularröhre so weit heraus, daß man das pointirte Objekt möglichst scharf sieht; hierauf verschiebe man, ohne die Okularröhre zu verrücken, das Fadenkreuz mittelst der Röhre h allein, bis die Fäden deutlich und schwarz erscheinen, und nun bewege man das Auge an der Okularöffnung hin und her. Bleibt der Durchschnitt der beiden Fäden auf dem Bilde unbeweglich stehen, so hat er die richtige Stellung, bewegt sich aber das Fadenkreuz auch, so ist es entweder vor oder hinter dem Bilde; und zwar ist das Fadenkreuz zu weit vom Auge entfernt, wenn es sich mit diesem nach einerlei Richtung, zu nahe aber, wenn es sich mit diesem nach entgegengesetzter Richtung bewegt.

Um das Letztgesagte nachzuweisen, sei in der Fig. 106, AB die Okularlinse, C das Bild des Objektes, CE die optische Achse, F oder D der Durchschnitt der Fäden, so wird das Auge, dieses in E angenommen, das Bild und den Durchschnitt der Fäden in einer geraden Linie sehen; bewegt sich aber das Auge von E z. B. nach O, so wird sodann, wenn der Durchschnittspunkt der Fäden in F ist, dieser rechts von C erscheinen, somit scheinbar sich nach derselben Seite mit dem Auge bewegt haben; war aber das Fadenkreuz



in D, so erscheint es jetzt von O betrachtet, links von C, somit haben sich in diesem Falle das Auge und das Fadenkreuz scheinbar nach entgegengesetzter Richtung bewegt. Bei einem fehlerhaften Stande des Fadenkreuzes also würde die Visur von dem Orte des Auges abhängen, was offenbar Fehler veranlassen könnte.

Zusatz. Der Stand des Fadenkreuzes rücksichtlich des Bildes ist für alle Augen derselbe das Bild und das Fadenkreuz müssen nämlich in einer Ebene liegen, aber

die deutliche Sehweite ist nicht für alle Augen gleich, daher die Entfernung der Okularlinse von dem Bilde eine andere, weshalb auch das Fadenkreuz vom Okularglase für jedes Auge etwas anders gestellt werden muß.

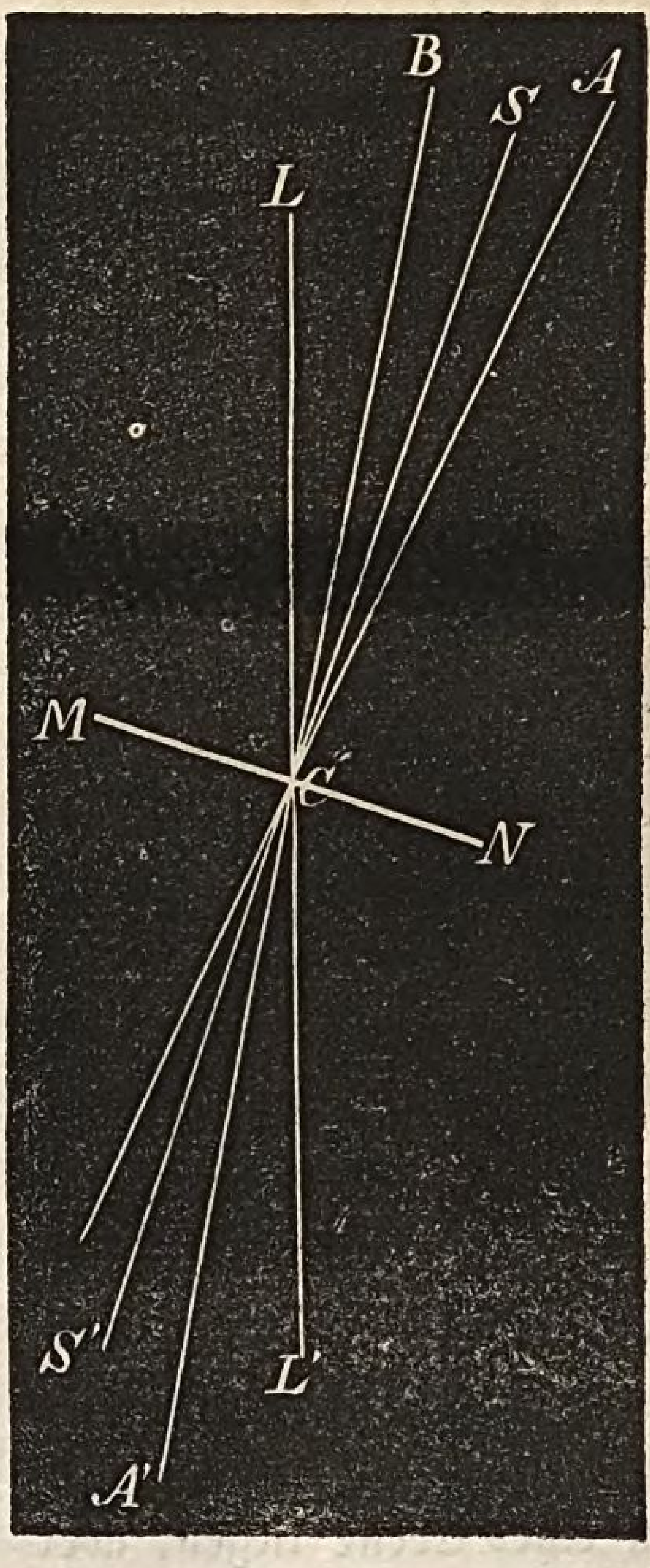
Ad 3. Steht die optische Achse auf die Drehungsachse nicht senkrecht, so wird die Alhidade (hier das Lineal) auf dem Limbus (in unserm gegenwärtigen Falle der horizontal gestellte Meßtisch) nicht den wahren Winkel angeben, sobald (§. 93) die anvisirten Objekte ungleich hoch sind.

Als Vorbereitung zu dieser und den folgenden Rektifikationen wird der Meßtisch in einer ebenen Gegend genau horizontal und fest, von diesem in einer Entfernung von circa 300 Klafter eine Meßfahne vertikal gestellt, auch ist es erforderlich, daß die kürzere Kante des Blattes mit jener Ebene nahe parallel ist, die durch die Meßfahne und die Mitte des Tischblattes gedacht wird.

Das Verfahren bei der Untersuchung, ob das Perspektivlineal die sub 3 angeführte Eigenschaft besitze oder nicht, ist folgendes:

Man stellt das Perspektivlineal auf den Meßtisch, das Fernrohr mit der Libelle horizontal, visirt den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes auf die Fahne scharf ein, bemerkt aber genau, welchen Punkt derselben die Visur trifft, und zieht neben der Kante des Lineals eine feine Bleilinie.

Hierauf dreht man, bei derselben Lage des Lineals, das Objektiv gegen sich, sodann das Fernrohr sammt dem Lineale wieder gegen denselben Punkt, der zuerst pointirt worden ist, und legt jetzt das Lineal wieder auf die Bleilinie, so ist der Winkel zwischen der ersten und der gegenwärtigen Visur noch einmal so groß, als das Komplement jenes Winkels, unter welchem die optische Achse gegen die Drehungsachse geneigt ist.



Den Beweis für das eben Gesagte wollen wir durch die Fig. 107 versinnlichen; in dieser bedeuten die Linien Durchschnitte vertikaler Ebenen mit dem horizontalen Meßtische, und zwar ist LL' der Durchschnitt einer vertikalen Ebene durch die gezogene Bleilinie, CA durch die horizontale Visur nach dem pointirten Punkte A, CN durch die Drehungsachse des Fernrohres, SS' einer durch den Drehungspunkt C des Lineals auf die Ebene NC und den Meßtisch senkrecht stehenden Ebene; endlich sei SCA $= \delta$ der Winkel, unter welchem die Visur CA gegen die Ebene SS' geneigt ist.

Als das Fernrohr mit dem Objektivglase gegen den Beobachter gewendet und wieder horizontal gestellt war, habe es die Richtung CA' gehabt, so ist

$$SCA = S'CA' = \delta \; \ldots\ldots 1).$$

Denken wir uns das Lineal, also auch das in A'C liegende Fernrohr nach der rechten Seite um C gedreht, bis A' in die Linie CA kommt, die Visur scharf auf den Punkt A eingestellt (dies ist nur deshalb nothwendig, damit sie wieder horizontal werde), endlich das Lineal an die Linie LL' gelegt, so wird

L' in der Linie CL, die Ebene CN in ihrer Verlängerung, nämlich nach CM und die Visur CA' in irgend eine Richtung, die wir durch CB andeuten wollen, zu liegen kommen; auch wird LCS = L'CS' bleiben.

Aber während der Drehung hat sich der Winkel S'CA' nicht geändert, daher ist, weil S'C auf CS fällt, der Winkel S'CA' = BCS = SCA = δ; wird also in der Visur CB ein Stab mit A nahe gleich weit gestellt, und ist B ein Punkt desselben, welcher mit A gleich hoch ist, so ist der Winkel zwischen den Signalen A und B (weil §. 93 Gleichung 3), y = 0, somit auch x = 0 ist), ganz genau seiner horizontalen Projektion BCA, die Drehungs- und die optische Achse mögen wie immer geneigt sein.

Halbirt man nun den Winkel BCA durch einen dritten Stab S, und bringt man ohne Aenderung der Lage des Lineals, also auch der Ebene, durch MN die horizontale Visur CB in die Ebene CS, so liegt die optische Achse in einer Ebene, welche auf die vertikale Ebene MN senkrecht steht; die Visur ist ferner horizontal, daher steht die optische Achse auf die Ebene MN, folglich auf alle Linien senkrecht, die durch ihren Fußpunkt gezogen sind, eine davon ist die Drehungsachse, daher steht die optische auf die Drehungsachse senkrecht.

Um nun die optische Achse allein in die Ebene CS zu bringen, wird bei jedem der beschriebenen Instrumente das Lineal neben die gezogene Bleilinie scharf gelegt, und sodann der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes, ohne das Rohr zu heben oder zu senken, durch die Schräubchen u an der Okularröhre auf das Signal S eingestellt.

Eine Wiederholung der beschriebenen Operation wird zeigen, wie genau man den Zweck erreicht hat; am Ende derselben aber darf nicht vergessen werden, sich zu versichern, daß die beiden Schräubchen an jener Röhre fest aufsitzen, in der die Fäden aufgespannt sind, was leicht durch den plötzlichen Widerstand bei dem Eindrehen der einen oder der andern dieser Schräubchen wahrgenommen wird.

Ad 4. Da nun die beiden Achsen einen rechten Winkel einschließen, so wird die optische Achse bei der drehenden Bewegung des Fernrohres eine Ebene beschreiben, und diese vertikal sein, wenn die Drehungsachse horizontal ist; man kann somit umgekehrt, aus der vertikalen Lage der Visirebene auf die horizontale Lage der Drehungsachse schließen.

Bringt man also den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes scharf auf die Achse der vertikalen Fahne, überdies noch so tief als sie nur sichtbar ist, und bewegt man die Visur längs der Fahne, so wird der Durchschnitt auf der Mitte derselben bleiben oder nicht; geschieht das letztere, so muß erst die Drehungsachse horizontal gemacht werden.

Ist nun das Sadtler'sche Perspektivlineal zu rektifiziren, so läßt man die Schrauben a, b, c etwas nach, und hebt oder senkt mittelst der Schraube d die Basis der Säule, wodurch auch die Hülse C und mit ihr die Drehungsachse bewegt, die letztere somit in die horizontale Lage gebracht wird, wo sodann die gelüfteten Schrauben wieder angezogen werden müssen.

Bei dem Perspektivlineale von Kraft wird der Drehungsachse die horizontale Lage durch die Schraube q, und bei dem Instrumente von Schablaß durch die Schraube g ertheilt.

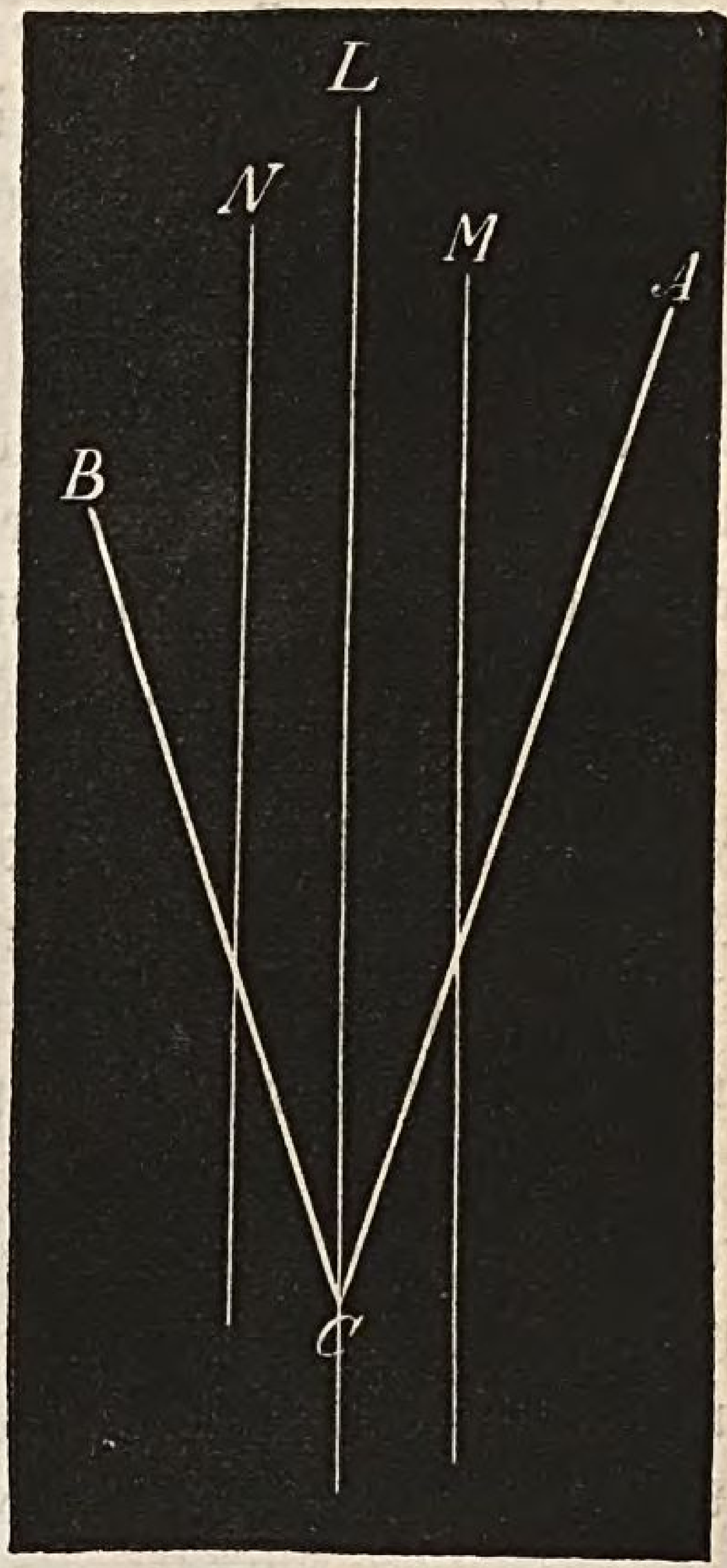
Hat eine mehrmalige Wiederholung der Bewegung des Fernrohres gezeigt, daß der Durchschnittspunkt der Fäden aus der Mitte der Fahne nicht ausweicht, so wird die oberhalb der Achse liegende Libelle zum Einspielen gebracht, und zwar bei dem Instrumente von Sadtler mittelst der Schraubenmutter t, und damit in der Folge keine Verstellung der Libelle so leicht eintreten kann, noch mittelst der Schraubenmutter s geklemmt; bei den zwei andern Instrumenten bringt man die Libelle mittelst der Schraube s zum Einspielen, wo jede Senkung der Libelle durch eine um die Spindel derselben gewundene Feder verhindert wird.

Ad 5. Sind die vorhergehenden Rektifikationen vollkommen ausgeführt, so beschreibt die Achse bei der Bewegung des Rohres eine vertikale Ebene, es bleibt noch (§. 88) diese Ebene so zu stellen, daß sie durch die gerade Kante des Lineals geht, weil jeder Punkt der letzteren als der Drehungspunkt der Alhidade oder Mittelpunkt des Limbus angenommen werden kann.

Um zu prüfen, ob die Visirebene nicht schon die erforderliche Lage habe, lege man das Lineal nach der Breite des horizontal und festgestellten Blattes nahe am Rande, visire den Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes auf einen Punkt der Fahne, und ziehe neben der Kante des Lineals eine feine Bleilinie.

Nun lege man das Lineal so auf den Meßtisch, daß das Rohr unterhalb desselben, die gerade Kante aber wieder genau oberhalb der Linie zu liegen kommt, das letztere läßt sich mittelst der Anlegung einer Libelle an die Linie und des Lineals an die erstere sehr genau ausführen.

Wird nun das Signal wieder scharf geschnitten, so hat die Visirebene die erforderliche Lage, ist dies aber nicht der Fall und hat z. B. Fig. 108 die Visirebene in der ersten Lage die Richtung CA, während CL die Kante des Lineals LCM war, so wird, nachdem dieses in die Lage LCN umgekehrt worden ist, die Visirebene eine Richtung CB annehmen, so daß die Winkel LBC = LCA sind. Macht man die Richtung CB durch einen Stab B ersichtlich, so ist BCA der doppelte Winkel, welchen die Visirebene mit der Kante bildet, halbirt man BCA durch ein Signal S, so muß nun die Visirebene allein, also ohne Aenderung des Lineals in die Linie CS gebracht werden. Dies wird beim Perspektivlineal von Sadtler erreicht, indem man die Schrauben a, b, c etwas lüftet und die Säule B mittelst den Schrauben m und n entsprechend dreht; diese Drehung geschieht um die Spindel der Schraube a, weßhalb die Oeffnungen für b und c etwas ovalförmig erweitert sind.



Hat man die Visirebene in die Mitte des Stabes S gebracht, das Fernrohr mag oberhalb oder unterhalb des Tisches liegen, wenn nur jedesmal die Kante über der Bleilinie liegt, so werden die Schrauben a, b, c wieder fest angezogen, auch nachgesehen, ob die Schrauben m, n an dem Ansatze r aufsitzen.

Aehnlich dieser ist die Rektifikation bei dem Instrumente von Kraft, hier werden die Schrauben a, b, c nachgelassen und die Säule B nach Erforderniß um

die Schraube c gedreht, die Oeffnungen für a und b sind also ovalförmig. Nach erreichtem Zwecke werden die gelüfteten Schrauben wieder fest angezogen.

Bei dem Perspektivlineale von Schablaß werden die Schrauben, mit denen die Säule B gehalten wird, nachgelassen, und diese mit Hilfe der Schrauben m und n entsprechend gedreht; die Drehung erfolgt hier um einen, aus dem Lineale hervorstehenden, durch die Mitte der Säule B gehenden Schraubenkopf. Auch hier muß zwischen den Schrauben m und n jeder Spielraum beseitigt sein.

Ad 6. Ohne an dem Tische etwas zu ändern, richte man den vertikal sein sollenden Faden auf einen scharf begränzten Punkt und bewege das Fernrohr etwas auf und ab; verläßt der Faden seiner Länge nach den anvisirten Punkt, so wird der Fehler beseitigt und zwar:

bei dem Sadtler'schen und Kraft'schen Perspektivlineale wird die Schraube v gelüftet und der Ring h entsprechend gedreht, sodann dieselbe Schraube wieder angezogen; bei dem Instrumente von Schablaß wird die eine der Schrauben p oder p' nachgelassen und die andere um eben so viel nachgeschraubt, wodurch das Fadenkreuz gedreht wird.

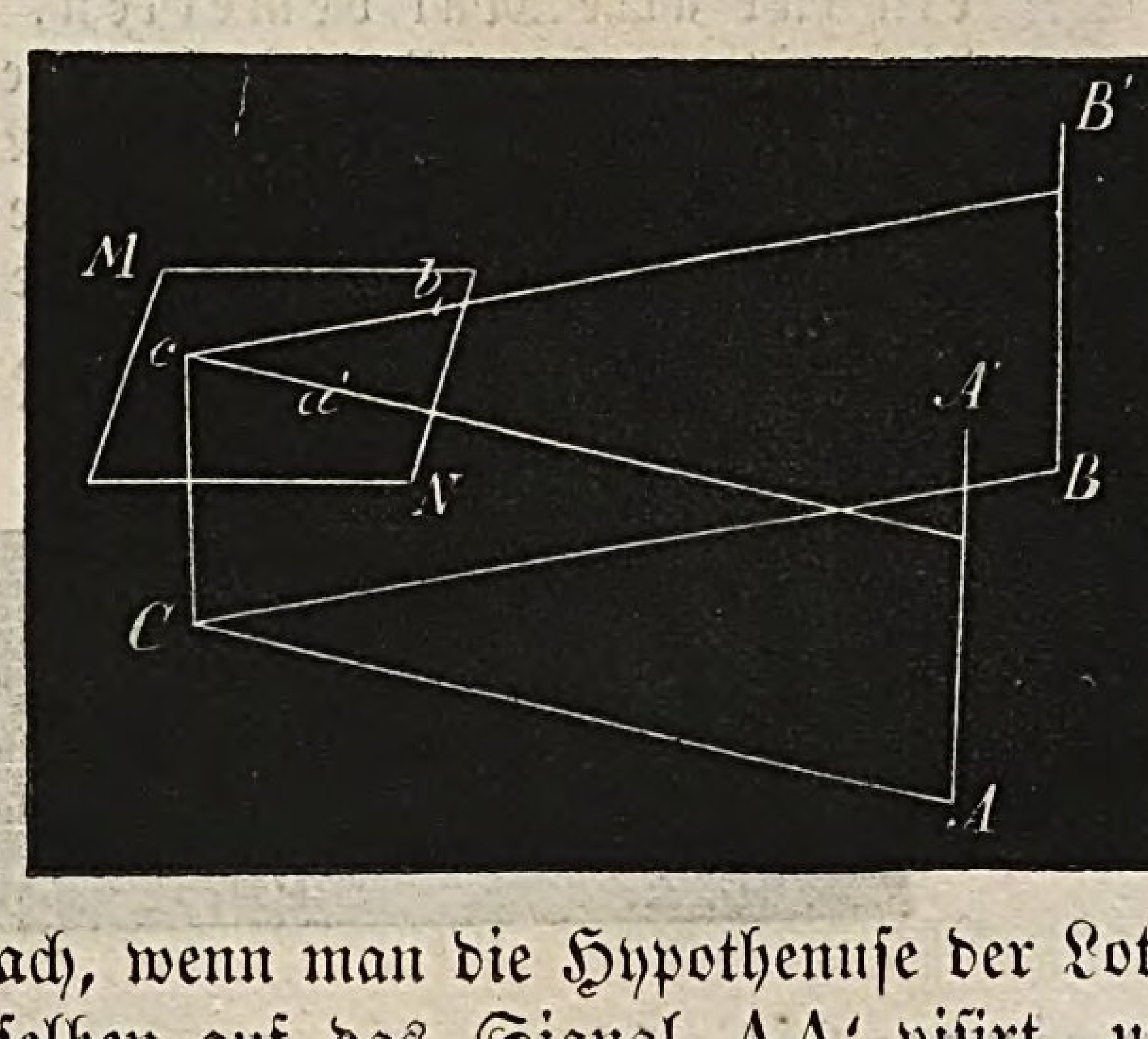
Bei jedem dieser Instrumente hat man aber Acht zu geben, daß durch diese Rektifikation das Fadenkreuz nicht längs der Röhre verschoben, somit die zweite Rektifikation wieder gestört wird.

Ist der eine Faden vertikal, so ist der andere, weil beide unter einem rechten Winkel sich schneiden, horizontal gestellt, übrigens könnte man leicht das Horizontalsein desselben prüfen, dabei müßte das Fernrohr, nachdem ein bestimmter Punkt anvisirt wurde, durch die Wendeschraube sammt der Tischblatte bewegt werden.

Sind endlich alle Rektifikationen durchgeführt, so dient es zur eigenen Beruhigung, das Stattfinden jeder einzelnen, der am Anfange dieses Paragraphes angeführten Eigenschaften des Perspektivlineals noch einmal zu prüfen.

Gebrauch des Meßtisches.

§. 108. 1. Aufgabe. Einen Winkel ABC, Fig. 109, den die Objekte AA' und BB' an der Erdfläche in C bilden, auf dem Meßtische MN zu konstruiren, wenn auf demselben der Scheitel c und die Lage eines Schenkels ca gegeben sind.



Auflösung. Man stellt den Meßtisch in dem Punkte C auf, mittelst der Stativfüße nahe horizontal, lockert die Mittelschraube und wendet das Tischblatt so, daß die Linie ca nahe mit AC parallel wird. Dies erreicht man ganz einfach, wenn man die Hypothenuse der Lothgabel an die Linie ca legt, längs derselben auf das Signal AA' visirt, und während dem das Tischblatt entsprechend dreht.

Hierauf untersucht man mittelst der Lothgabel, ob c mit C in einer vertikalen Linie liege, und wenn das nicht stattfindet, wird das Tischbrett allein an den Schiebungsleisten zweckmäßig bewegt.

Nachdem auch dies erreicht ist, wird der Tisch genau horizontal und durch das Anziehen aller Klemmschrauben festgestellt, das Diopter- oder Perspektiv-Lineal scharf an die gegebenen Schenkel ca angelegt, und die Visur auf das Objekt AA' mittelst der Wendeschraube gebracht.

Wird die Visirebene sodann blos durch das Drehen des Lineals um den Punkt c auf das zweite Signal BB' eingestellt und neben der Kante eine feine Bleilinie gezogen, so ist der auf dem Tischblatte konstruirte Winkel acb die gesuchte horizontale Projektion des gegebenen Winkels ACB, was aus der Figur selbst ersichtlich ist.

Zusatz 1. Wie man sieht, besteht die Vorbereitung, bevor man den Winkel selbst konstruiren kann, in Folgendem:

a. den gegebenen Punkt c in die durch C gehende vertikale Linie zu bringen, den Punkt C nennt man den Standpunkt (§. 11).

b. Die gegebene Linie ca, in die durch CA gehende vertikale Ebene CcAA' zu bringen; diese Operation nennt man den Tisch orientiren.

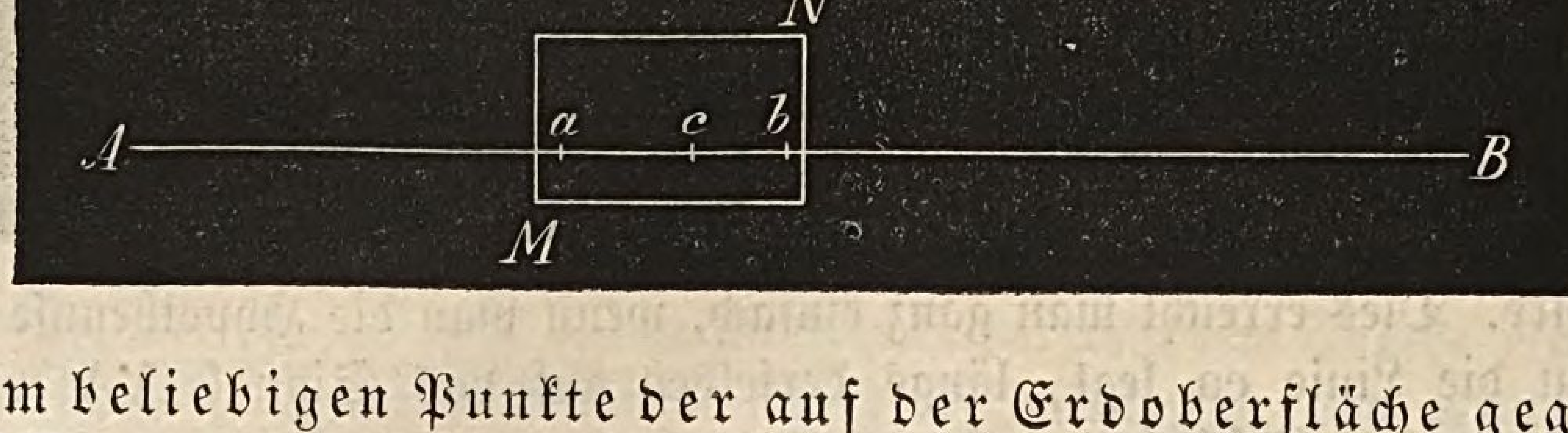
Im Allgemeinen versteht man unter dem Worte: orientiren, eine auf dem Tischblatte gegebene gerade Linie mit einer auf der Erdfläche bestimmten vertikalen Ebene parallel zu stellen, der Abstand der geraden Linie von der Ebene ist beliebig, er kann also auch Null sein, und ein Beispiel dieses letztern Falles ist eben die obige Auflösung.

In der technischen Sprache also hätte man die obige Aufgabe so ausgesprochen: Den Meßtisch im Standpunkte C aufzustellen, denselben nach CA zu orientiren und den Winkel ACB zu konstruiren.

Zusatz 2. Ist man bei der obigen Aufgabe an keine Bedingung gebunden, so ist die Auflösung noch einfacher und folgende: Man stellt den Meßtisch im Scheitel des durch Signale bestimmten Winkels horizontal auf, projicirt mittelst der Lothgabel den Scheitel des Winkels C auf das Tischblatt, wodurch man c erhält; legt hierauf an diesen Punkt die Kante des Diopterlineals, visirt nach dem ersten Signale AA' und zieht neben der Kante eine feine Bleilinie; visirt man sodann von demselben Punkte c auf das Signal BB' und zieht von c eine zweite Linie, so ist der auf dem Tischblatte konstruirte Winkel der gesuchte.

Zusatz 3. Bei jedem Gebrauche des Meßtisches wird vorausgesetzt, daß das Tischblatt auf die im §. 63 angegebene Art mit Papier überzogen ist; auch wollen wir hier ein für alle Mal bemerken, daß bei den nachfolgenden Figuren die mit großen Buchstaben bezeichneten Punkte auf der Erde, die entsprechenden mit kleinen Buchstaben auf dem Tische liegen. Ist also ein Punkt genannt, aber nicht sichtbar, so liegt er vertikal unter dem gleichnamigen des Tisches.

2. Aufgabe. Eine auf dem Meßtische gegebene Linie ab, Fig. 110,

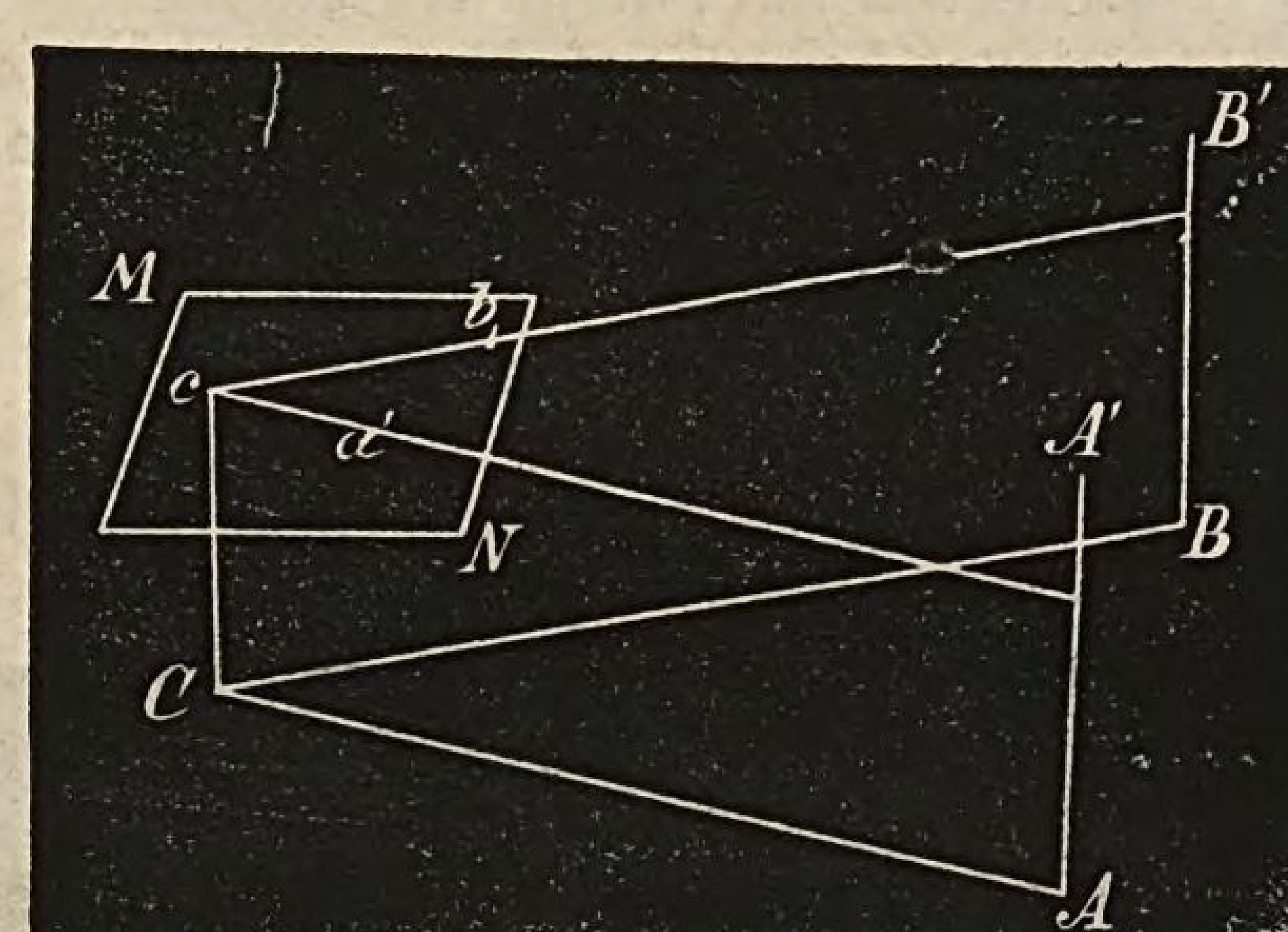


in einem beliebigen Punkte der auf der Erdoberfläche gegebenen Linie AB zu orientiren.

Auflösung. Man bestimme in der Linie AB durch einen Pflock den Punkt C, und stelle den Meßtisch MN über diesen, den Punkt c der Linie ab vertikal über C, ab aber nahe mit AB parallel; nun stelle man den Tisch horizontal und fest, lege das Visirmittel an ab scharf an, und bringe die Visirebene mittelst der Wendeschraube auf das eine Signal z. B. B. Ist der Punkt c mathematisch genau über C gestellt, und das Signal B scharf anvisirt, so ist die Aufgabe aufgelöst; um sich aber davon zu überzeugen, lege man das Diopterlineal an ab, mit dem Objektivfaden aber gegen A (beim Perspektivlineale braucht blos das Fernrohr gegen A gewendet zu werden) und sehe nach, ob der Faden dasselbe halbirt.

Geschieht das Gegentheil und ist weder im Anlegen des Lineals an ab noch beim Visiren ein Fehler begangen worden, so liegt (da c scharf über C gestellt wurde) der Punkt C nicht genau in der AB; in diesem Falle wähle man in dem Gesichtsfelde ein Objekt, durch welches der Abstand der Visirebene vom Signale A halbirt wird, und stelle diese durch die Wendeschraube auf das gewählte Objekt. Nach dieser Operation wird die Linie ab mit AB parallel, liegt aber nicht in der durch AB bestimmten vertikalen Ebene; um nun auch das letztere zu erhalten, wird das Tischblatt allein an den Schiebungsleisten nach Erforderniß mit AB parallel verschoben, und die erst beschriebene Operation von Neuem und zwar so oft wiederholt, bis endlich bei dem Umkehren des Diopterlineals auch das zweite Signal scharf geschnitten wird.

Zusatz. Man sieht, daß die Orientirung in diesem Falle viel schärfer ist, als bei der ersten Aufgabe, und daß aus dem Umstande allein, die durch ac, Fig. 109 gelegte Ebene gehe durch AA', noch nicht mit Sicherheit auf die Orientirung des Meßtisches geschlossen werden kann, wenn man nicht überzeugt ist, die Visirebene habe mit der durch C und AA' bestimmten Ebene außer AA' noch einen Punkt gemeinschaftlich.

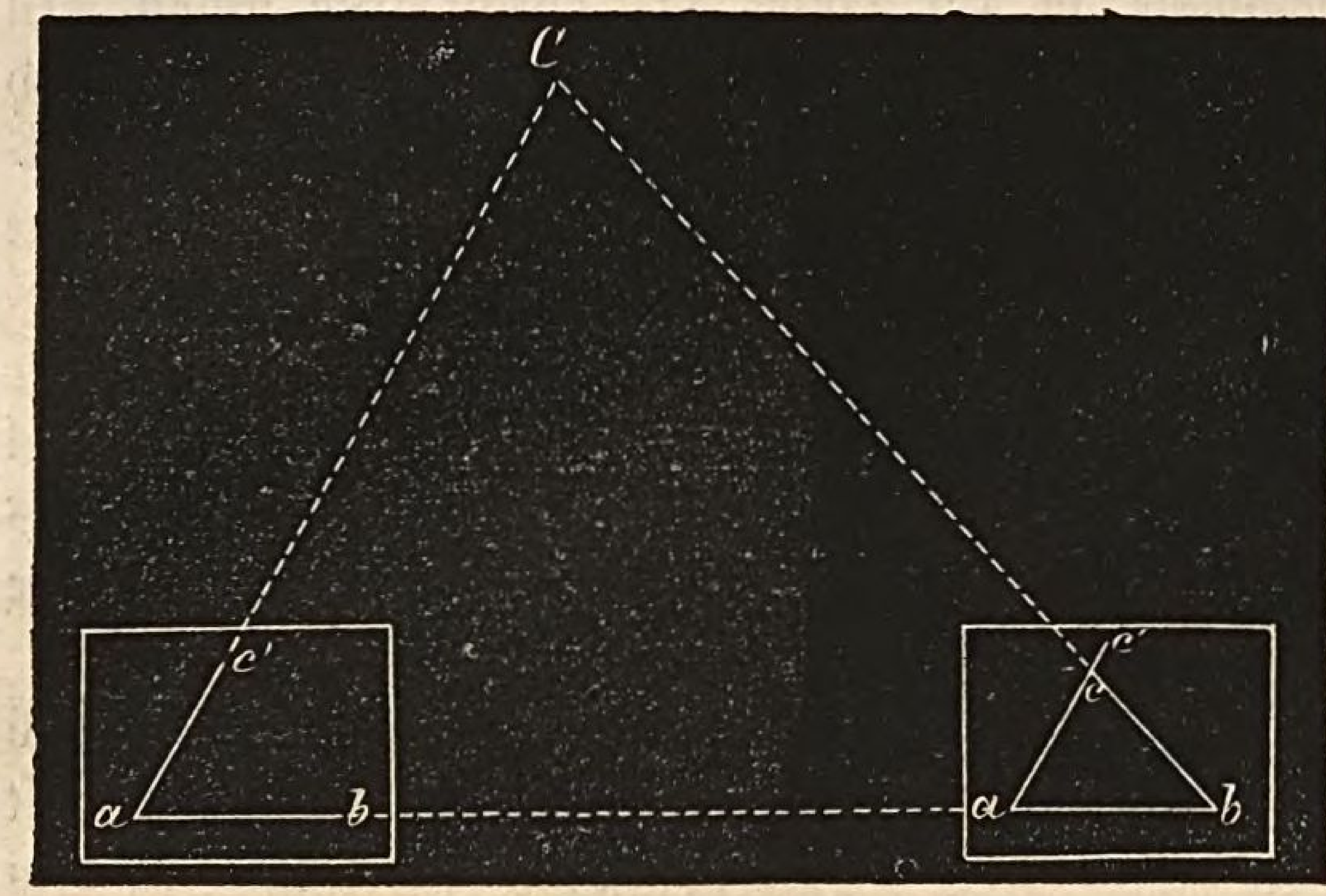


§. 109. Aufgabe. Auf dem Meßtische ein Dreieck zu konstruiren, welches einem in der Natur durch Signale bestimmten Dreiecke ähnlich ist.

Da man diese Aufgabe gewöhnlich in der Absicht auflöst, hierdurch die Länge einer Seite oder die Fläche des gegebenen Dreieckes zu finden, so ist vor allem nothwendig, daß die Länge wenigstens einer dieser Seiten durch das unmittelbare Messen oder auf irgend eine Art gegeben ist. Die Linie, in deren Endpunkten man den Meßtisch aufgestellt hat, ihre Länge mag bekannt, oder unbekannt sein, nennt man die Standlinie, die Konstruktion des ähnlichen Dreieckes selbst ist jedoch durch die Umstände, die da eintreten können, verschieden.

1. Auflösung. Es sei ABC, Fig. 111 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), das durch Signale bezeichnete Dreieck, die Länge der Linie AB bekannt, und A und B zu Standpunkten geeignet.

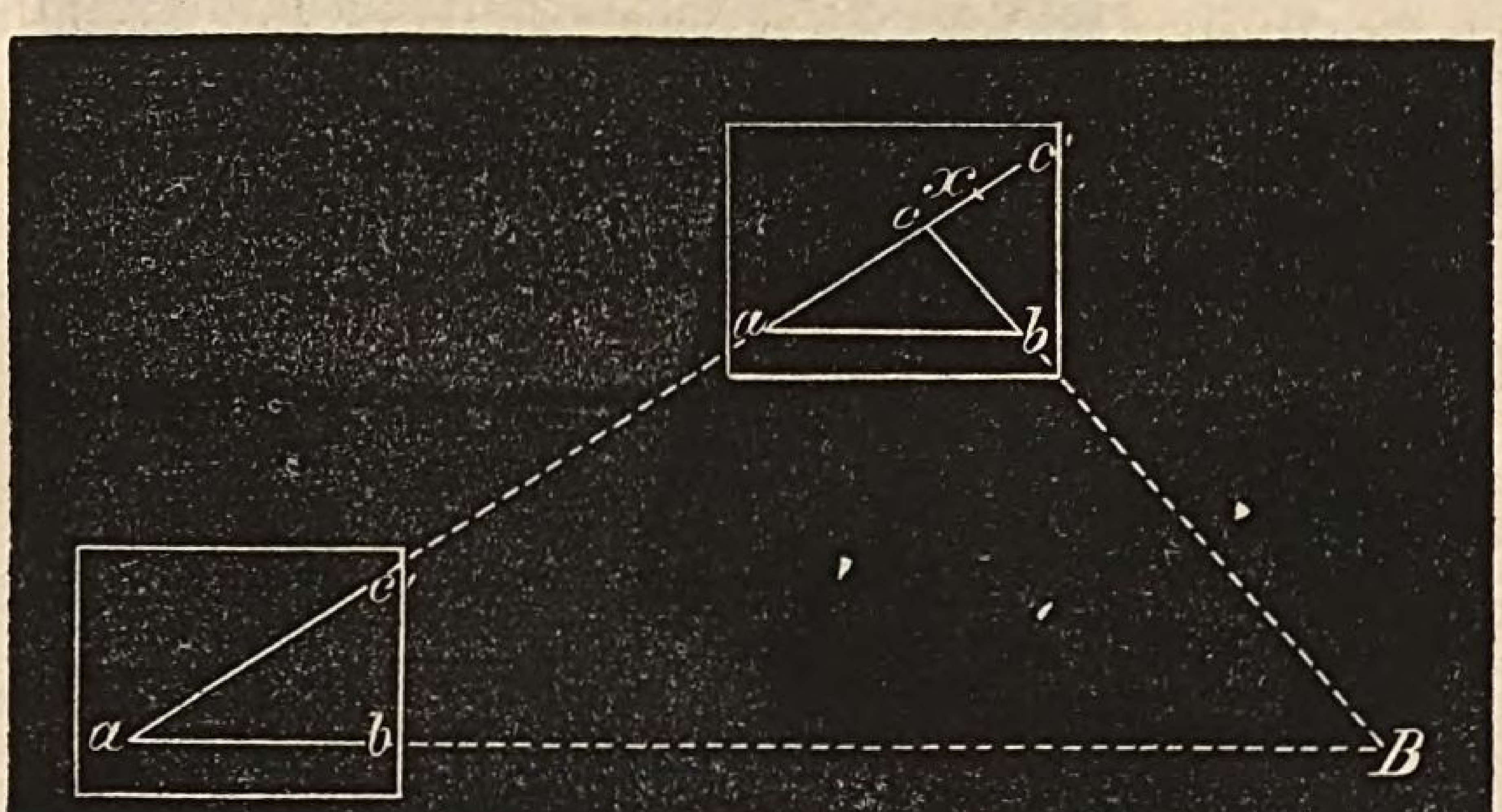
Man trage die Länge der Standlinie AB im verjüngten Maßstabe auf das Tischblatt so auf, daß kein Theil des zu konstruirenden Dreieckes über den Rand



desselben falle, hierdurch erhält man die Linie ab; dann stelle man den Tisch in A horizontal, a vertikal über A und orientire ihn mittelst ab nach AB. Ist dies geschehen, so visire man von a nach C und ziehe neben der Kante des Lineals eine dünne Bleilinie ac′ bis dorthin, wo man vermuthet, daß der Scheitel des Dreieckes abc fallen könnte. Nun lasse man das Signal in A wieder aufstellen, begebe sich mit dem Meßtische nach B, stelle ihn daselbst (b über B) horizontal und orientire ihn mittelst ba nach BA, visire jetzt von b nach C und durchschneide die von a nach C gezogene Visur ac′ in einem Punkte c, so ist das so erhaltene Dreieck abc mit ABC ähnlich, weil sie zwei Winkel wechselweise gleich haben.

Zusatz. Die Art, wie hier c als entsprechender Punkt von C erhalten worden ist, nennt man in der praktischen Geometrie einen Punkt durch das Vorwärtsabschneiden bestimmen. Die mittelst der Bleistiftlinie ersichtlich gemachte horizontale Projektion der Visirebene nennt man den Rayon (Strahl), gebraucht aber den Ausdruck nur, wenn ein Signal das erste Mal anvisirt worden ist; wird dasselbe Signal das zweite Mal, also von einem andern Standpunkte anvisirt, so nennt man die ersichtlich gemachte horizontale Projektion der Visirebene den Schnitt. In der obigen Auflösung also ist ac′ der Rayon, bc der Schnitt nach dem Punkte C, auch hat man noch dafür den technischen Ausdruck C ist von A rayonirt, von B geschnitten worden.

2. Auflösung. Es sei ABC, Fig. 112, das durch Signale bezeichnete Dreieck, die Länge der Linie AB bekannt, AC jedoch die Standlinie.



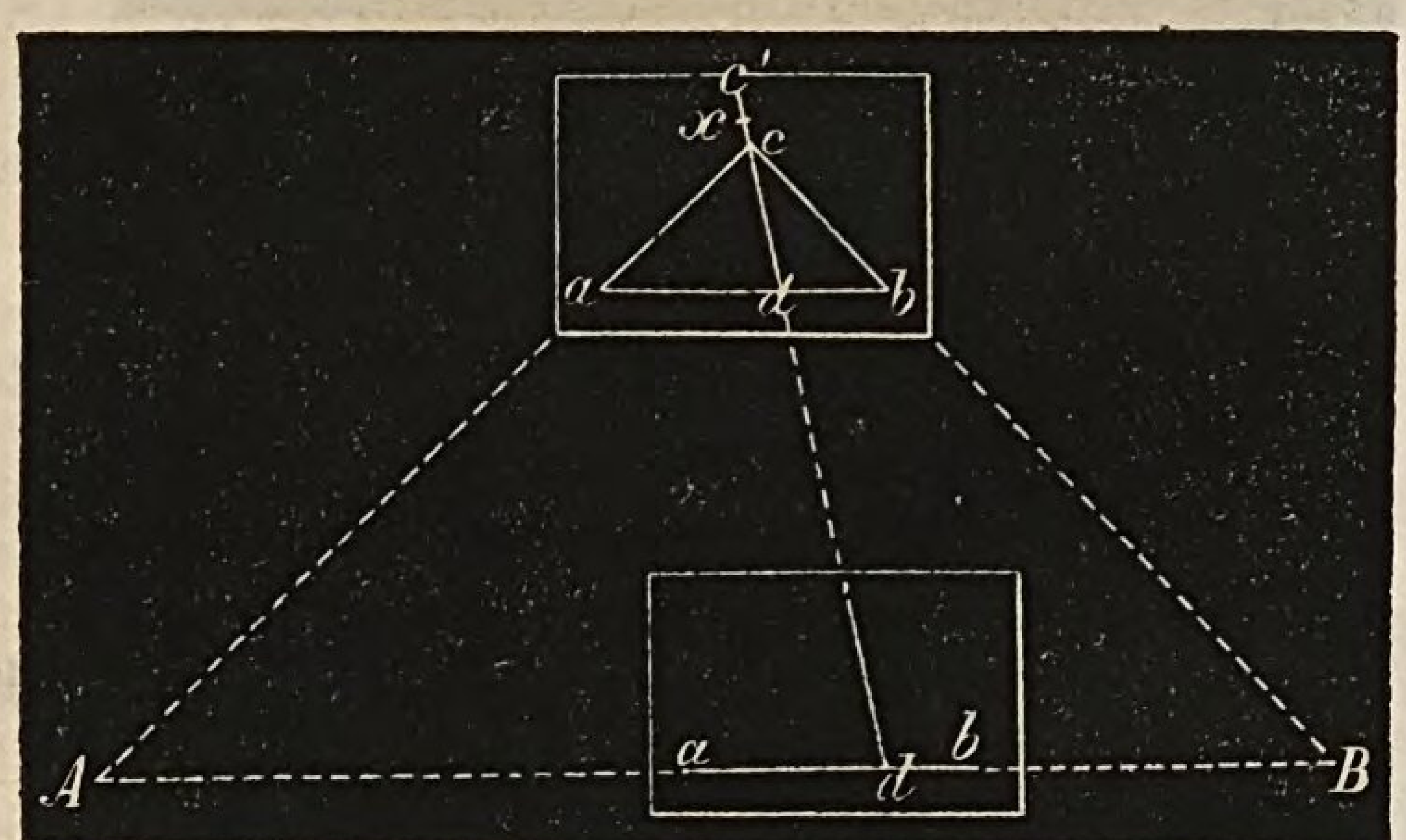
Hier bleibt die in A vorzunehmende Operation genau dieselbe, wie bei der vorigen Auflösung, man hat also, wenn man von A weggeht, die Linie ab und von a nach C die Visur ac′ auf dem Meßtische. Nun läßt man in A das Signal wieder aufstellen und geht sogleich zu dem Punkte C; weil aber dieser noch nicht auf dem Tischblatte bestimmt ist, so wählt man in der Linie ac′ einen beliebigen Punkt x, stellt x über C vertikal und orientirt den Meßtisch mittelst der ax nach AC, so ist ab mit AB parallel, weil ax in der durch CA bestimmten vertikalen Ebene liegt.

Nun lege man das Diopterlineal an b, visire von b nach B, ohne auf den Punkt x Rücksicht zu nehmen, und durchschneide die von a nach C gezogene Visur ac in einem Punkte c.

Ist der Punkt C der Art, daß man ihn noch ändern kann, so bestimme man mittelst der Lothgabel den in der Vertikalen durch c liegenden Punkt auf der Erdoberfläche und nehme diesen definitiv als den Standpunkt an, so ist abc ähnlich mit ABC, was leicht nachgewiesen werden kann.

Darf aber der Punkt C nicht mehr verstellt werden, und ist x von c bedeutend verschieden, so könnte hierdurch in dem Winkel acb wegen §. 74 ein Fehler entstehen; um diesen zu vermeiden, bringe man den eben erhaltenen Punkt c über C und orientire den Meßtisch mit ca nach CA, wiederhole die Visur von b nach B, so erhält man einen zweiten Schnitt, und dieser ist der wahre Punkt c.

3. Auflösung. Es sei ABC, Fig. 113, das durch Signale bezeichnete Dreieck, AB die bekannte Seite, die Punkte A und B von der Art, daß keiner, wohl aber ein dritter zwischen beiden in der geraden Linie liegender Punkt D als Standpunkt gewählt werden kann, dessen Abstand von A und B bekannt ist und von welchem alle drei Signale sichtbar sind.



In diesem Falle wird, nachdem die ganze Linie ab aufgetragen ist, in dieser ein Punkt d bestimmt, dessen Entfernung von a und b in demselben Verhältnisse mit jenem D von A und B steht; d über D gestellt, der Tisch (§. 108, 2. Aufgabe) nach AB orientirt, und von d nach C der Rayon dc' gezogen.

Nun läßt man in D eine Fahne aufstellen, begibt sich mit dem Meßtische nach C, wählt in der Linie dc' einen Punkt x, stellt diesen über C und orientirt das Tischblatt, nachdem dasselbe horizontal ist, mittelst xd nach CD.

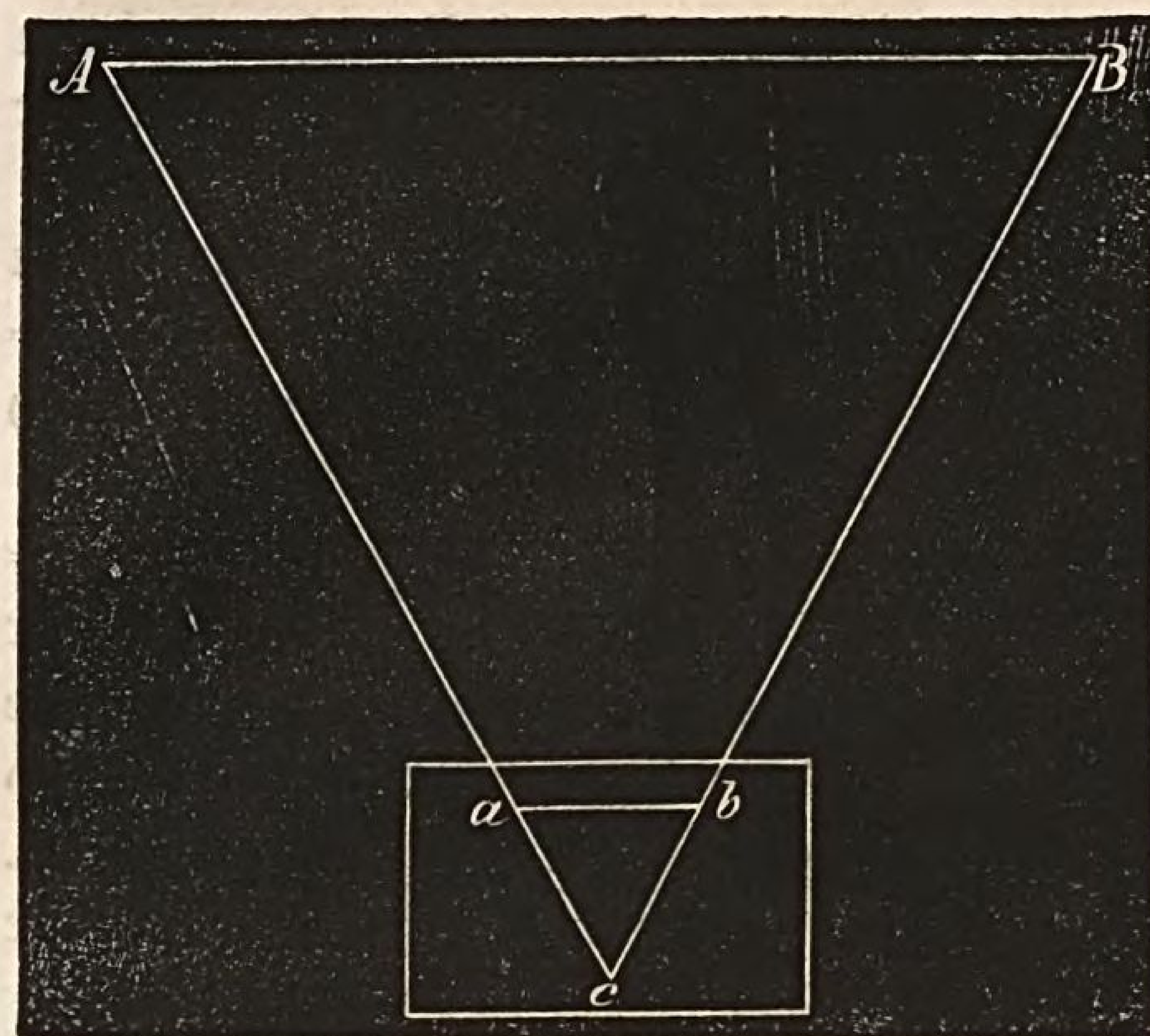
Da nun xd in der durch CD bestimmten vertikalen Ebene liegt, so ist wegen der gleichen Winkel adc und ADC die ab mit AB parallel; legt man also das Diopterlineal an a und visirt nach A, so erhält man die Linie ac und dadurch zugleich den Punkt c als den Scheitel des Dreieckes abc. Zur Kontrolle lege man das Diopterlineal an b und visire nach B, so müssen sich die Rayons ac, bc und dc in einem Punkte c schneiden (§. 114, Zusatz 2).

Die weitere Operation ist bei der zweiten Auflösung erklärt worden.

Zusatz. Die Art wie in der zweiten und dritten Auflösung der Punkt c erhalten worden ist, nennt man einen Punkt durch das Rückwärtsabschneiden bestimmen.

4. Auflösung. Es sei ABC, Fig. 114 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), das gegebene Dreieck, jedoch so bestimmt, daß nur C als Standpunkt benützt, dafür aber von C nach A und B direkt gemessen werden kann.

In diesem Falle stelle man den Meßtisch über C horizontal auf, und da zur Konstruktion des Winkels ACB keine weitern Bedingungen gegeben sind, so ist derselbe (§. 108, Zusatz 2) leicht konstruirt. Hierauf messe man die Seiten CA



und CB, trage die gefundenen Längen im verjüngten Maßstabe auf die Schenkel des Winkel acb von c entsprechend auf, so werden dadurch die Punkte a und b, somit das ganze Dreieck abc bestimmt. Daß es mit ABC ähnlich ist, bedarf hier keines Beweises.

Aus den im §. 96 vorgenommenen Untersuchungen folgt, daß der Punkt c bei den ersten drei Auflösungen am besten bestimmt wird, wenn ABC ein rechtwinkeliges, gleichschenkeliges Dreieck, und AB dessen Grundlinie ist; bei der zuletzt angegebenen Auflösung soll das zu konstruirende Dreieck ebenfalls ein gleichschenkeliges, der Winkel C dagegen möglichst stumpf sein.

Zusatz. Welche dieser vier Auflösungen in einem bestimmten Falle anzuwenden ist, dies hängt von Umständen ab, und kann hier nicht näher angegeben werden.

Das Stationiren oder die Pothenotische Aufgabe.

§. 110. In dem vorigen Paragraphe war die Konstruktion des ähnlichen Dreieckes die Hauptsache und die zu diesem Behufe nöthige Orientirung des Meßtisches als Nebensache zu betrachten, kehren wir nun die Aufgabe um:

Auf der Erdoberfläche ist ein Dreieck durch Signale bezeichnet, auf dem Tischblatte ein diesem ähnliches Dreieck gegeben, es soll

1. der Meßtisch orientirt und dann

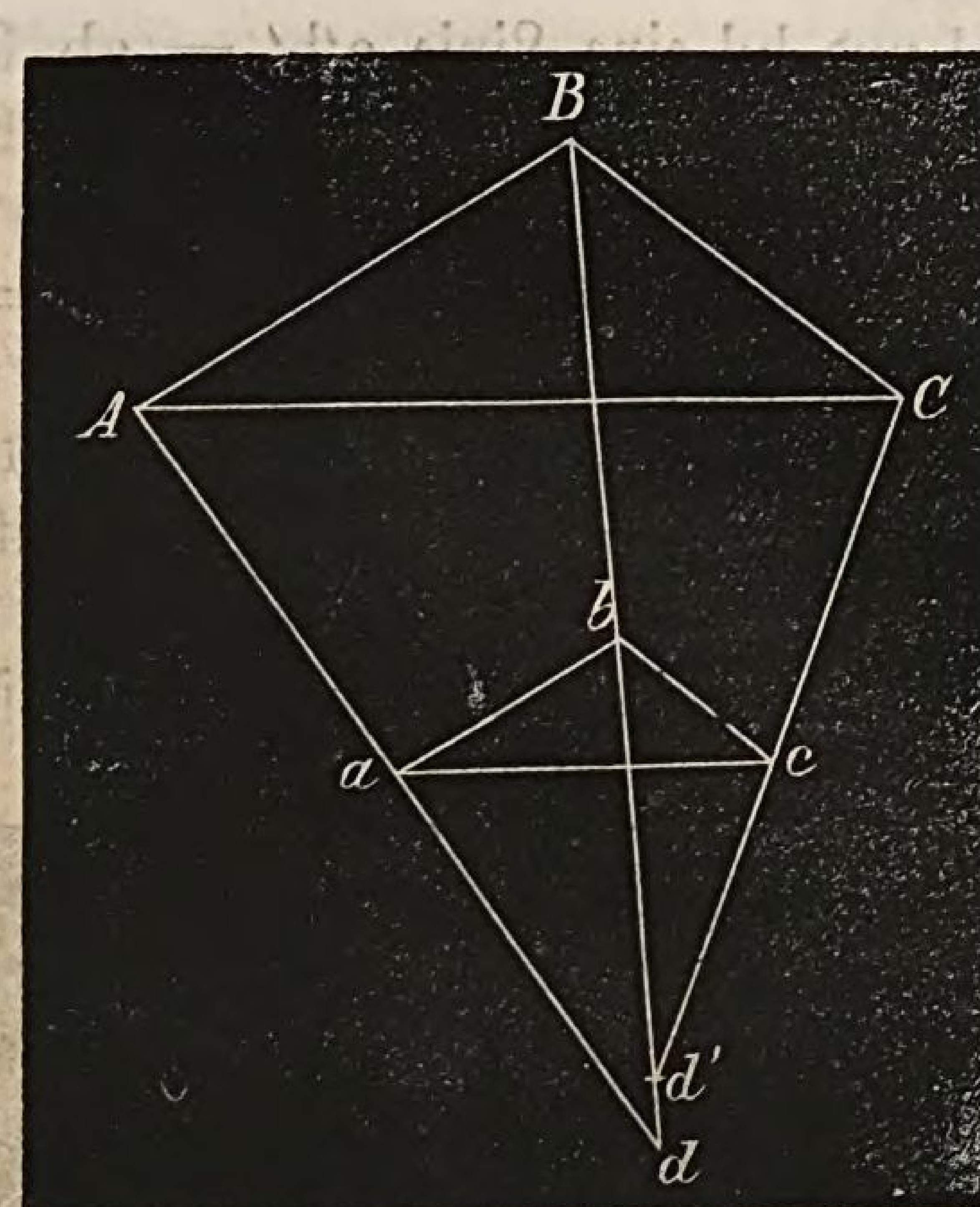
2. der Standpunkt auf demselben bestimmt werden, wobei der Fall ausgenommen ist, daß man sich in einer Seite oder in einem Scheitel des Dreieckes aufstellen kann*).

---

*) Diese Aufgabe ist in der praktischen Geometrie unter verschiedenen Namen bekannt, als: das eigentliche Rückwärtsabschneiden, Stationiren, das Problem der vier Punkte, die Pothenot'sche Aufgabe. Sie soll zuerst der holländische Geometer Willebrord Snellius um das Jahr 1614 erfunden haben; nach ihm machte im Jahre 1692 der französische Geometer Pothenot (Mémoires de l'Ac. roy. de sciences 1692) eine Auflösung dieser Aufgabe bekannt; in späteren Zeiten haben Clairaut, Lambert, Kästner, Tobias Mayer, Pfleiderer, Cagnoli, Burkhardt, Olbers, Langsdorf, Delambre, Vega, Lehmann, Beßel, Netto und mehrere Andere über die Auflösung dieser Aufgabe geschrieben, und der Umstand, daß sich so viele berühmte Männer mit ihr befaßt haben, läßt auf ihre Wichtigkeit für den praktischen Geometer schließen.

Der Auflösung selbst müssen wir einige theoretische Sätze vorausschicken.

1. Satz. Wenn, Fig. 115, ABC das auf der Erdoberfläche durch Zeichen bestimmte, abc das auf dem Tischblatte gegebene mit ABC ähnliche Dreieck überdies bereits orientirt, also ab mit AB, bc mit BC und ac mit AC parallel ist, so werden die Visuren von a nach A, von b nach B und von c nach C hinlänglich verlängert, sich in einem Punkte schneiden.



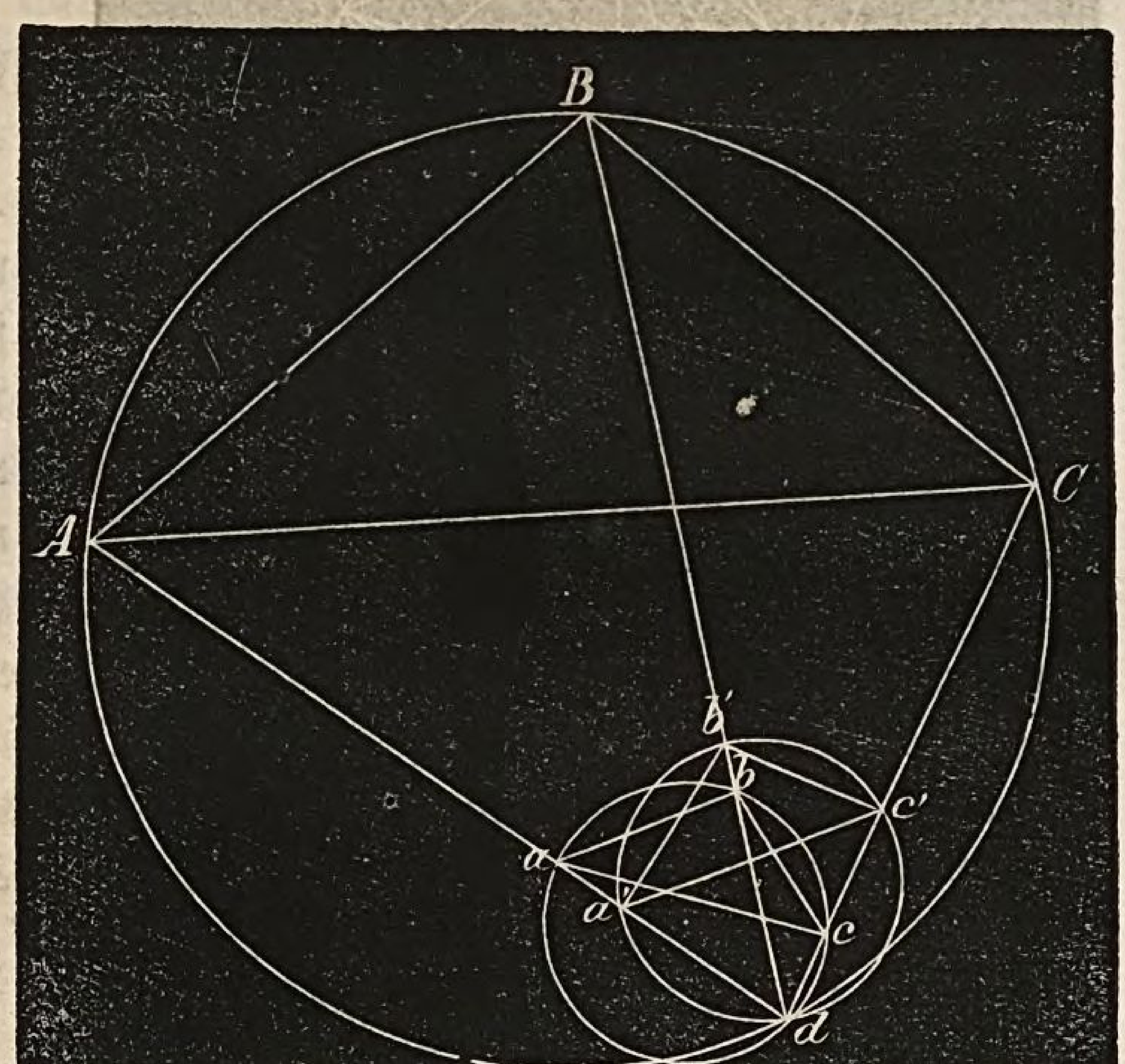
Beweis. Nehmen wir an, die eben genannten drei Visuren können sich in zwei Punkten d und d′ schneiden, so folgt weil ab || AB ist

$$AB : ab = Bd : bd \ldots \alpha)$$

und weil bc || BC ist . . . . . $BC : bc = Bd' : bd' \ldots \beta)$

aber ABC ist ähnlich mit abc, daher $AB : ab = BC : bc$,

somit wegen α) und β) $Bd : bd = Bd' : bd'$; daraus folgt wieder $(Bd - bd) : bd = (Bd' - bd') : bd'$, und weil, wie die Figur zeigt, in dieser Proportion die Vorsätze gleich sind, so müssen es auch die Nachsätze sein, daher $bd = bd'$, was so lange ein Widerspruch bleibt, als d und d′ zwei verschiedene Punkte sind; daher schneiden sich die drei Visuren in einem einzigen Punkte.

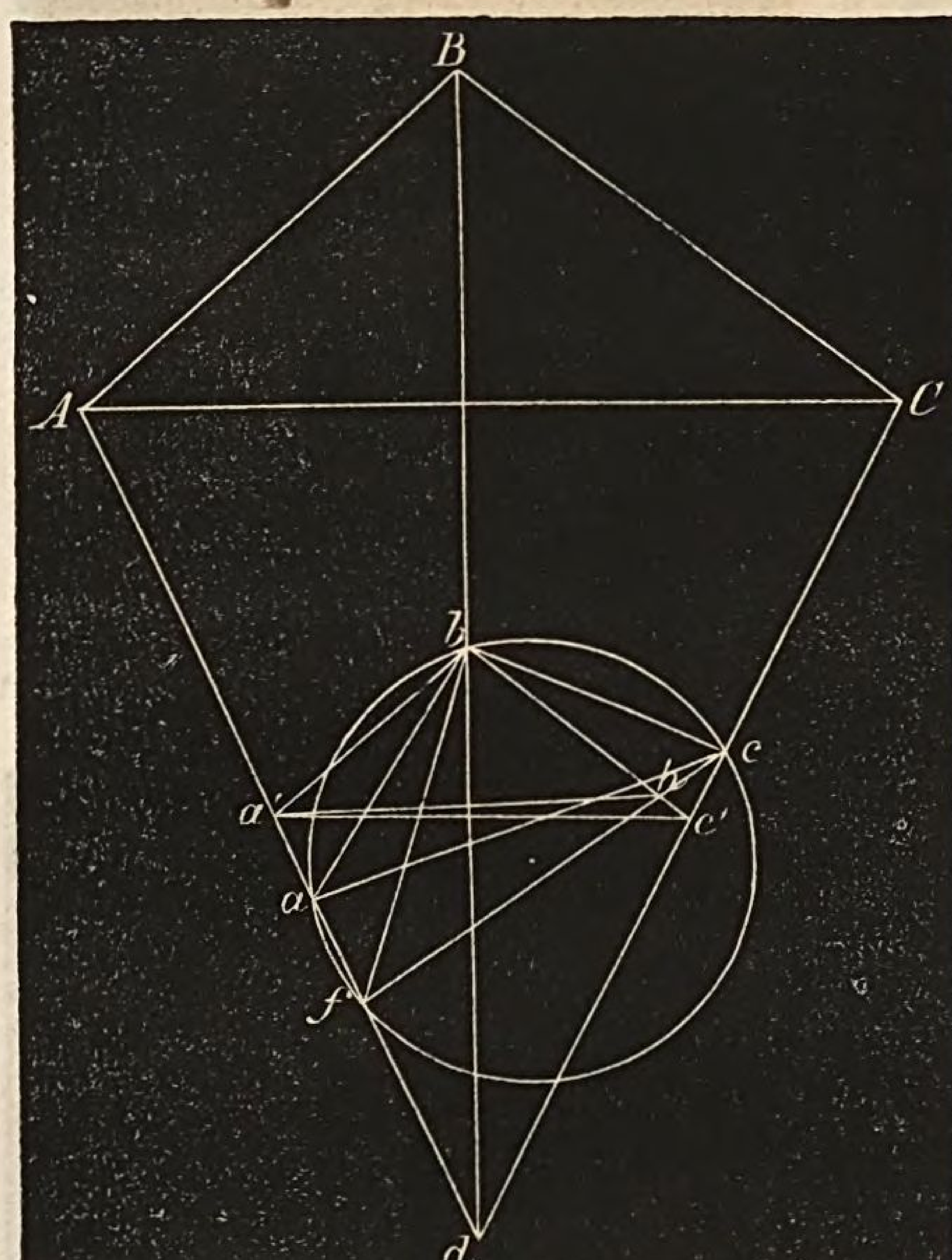


2. Satz. Wenn das Tischblatt mit dem darauf gezeichneten Dreiecke abc, Fig. 116, welches dem durch Signale bestimmten ABC ähnlich ist, in einem Punkte D mit der Seite ac gegen AC nicht parallel gestellt wird, so schneiden sich die drei Visuren von a nach A, von b nach B und von c nach C dennoch in einem Punkte d, wenn D in der Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises liegt.

Beweis. Da nach der Voraussetzung D in der Peripherie eines Kreises liegt, so ist $ABC + ADC = 2R \ldots \alpha)$; nun ist $ADC = adc$, weil d vertikal oberhalb D liegt und $ABC = abc$, weil die beiden Dreiecke einander ähnlich sind, daher ist auch $abc + adc = 2R \ldots \beta)$; demnach läßt sich auch um das Viereck abcd ein Kreis umschreiben. Wird nun auf dem Tischblatte zwischen

ad und bd eine Linie $a'b' = ab$ beliebig eingetragen, an den Schenkel $a'b'$ ein Winkel $a'b'c' = abc$ konstruirt, so betragen Gleich. β) auch $a'b'c' + a'dc' = 2R$ und es läßt sich auch dem Vierecke a'b'c'd ein Kreis umschreiben.

Da nach der Konstruktion $ab = a'b'$, der Winkel $abc = a'b'c'$ und wie die Figur zeigt $b'dc' = bdc = b'a'c' = bac$ ist, so sind die Dreiecke abc und a'b'c' kongruent, also werden bei der gemachten Voraussetzung die drei Visuren in jeder, der Orientirung nur annähernden Lage des Dreieckes abc sich in einem Punkte schneiden.



3. **Satz.** Wird der Meßtisch über einen Punkt D, Fig. 117, gestellt, welcher nicht in der Peripherie des durch die drei Punkte ABC bestimmten Kreises liegt, und sind die Seiten des auf dem Tischblatte gegebenen Dreieckes abc mit den Seiten des ähnlichen Dreieckes ABC nicht parallel, so schneiden sich die entsprechenden Visuren Aa, Bb, Cc nicht in einem, sondern in drei Punkten.

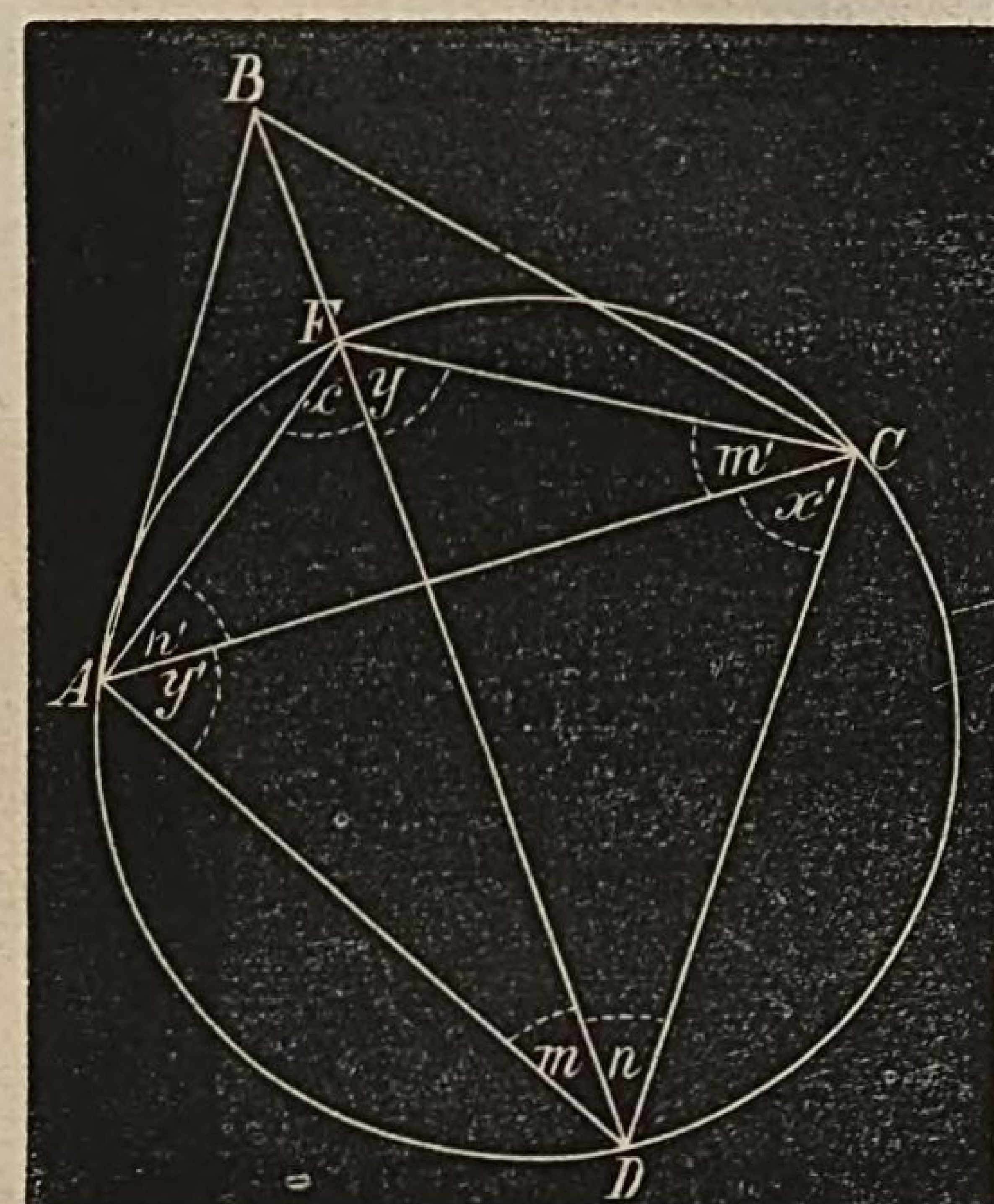
Beweis. Nehmen wir an, die Seiten des Dreieckes abc sind mit ABC nicht parallel, die Visuren Aa, Bb, Cc aber schneiden sich dennoch in einem einzigen Punkte d, so kann man, um den in dieser Annahme enthaltenen Widerspruch nachzuweisen, von b aus die ba' mit AB und bc' mit BC parallel ziehen, und wird a' mit c' verbunden, so wäre a'bc' mit ABC ähnlich, weil beide Dreiecke einen gleichen Winkel $a'bc' = ABC$ und die diesen Winkel einschließenden Seiten proportionirt hätten; und weil ABC mit abc ähnlich ist, so wäre es auch abc mit a'bc' . . . . α).

Wird durch die Punkte a, b, c ein Kreis beschrieben, so wird die ad von der Peripherie außer a noch in einem Punkte f geschnitten, der wegen dem zweiten Satze mit d nicht identisch sein kann, verbindet man nun f mit b und c, so schneidet die Linie fc jene bc' in einem Punkte h; endlich ziehe man noch die Linie ha'.

Aus der vierseitigen, dem Kreise eingeschriebenen Figur abcf folgt: $abc + afc = 2R$, und weil vermöge α) der Winkel $a'bc' = abc$, oder statt a'bc' auch a'bh gesagt, der Winkel $abc = a'bh$ ist, so sind auch $a'bh + a'fh = 2R$, folglich könnte bei der obigen Annahme dem Vierecke a'bhf ein Kreis umgeschrieben werden, und in diesem wäre $ba'h = bfh$ als Peripheriewinkel auf der Sehne bh, ferner der Winkel $bfh = bac$, wegen der Sehne bc, daher $ba'h = bac$; und weil vermöge α) der Winkel $ba'c' = bac$ ist, so wäre $ba'h = ba'c'$; was ein Widerspruch ist.

Sollte a' näher als a an d liegen, so beschreibt man zuerst über a'bc' einen Kreis, zieht die c'f, welche die bc in h schneidet und verbindet a mit h. Der Gang des Beweises bleibt derselbe.

4. Satz. Wenn in einer vierseitigen Figur ABCD, Fig. 118, die beiden Diagonalen AC und BD gezogen werden, ferner die zwei Winkel, welche an derselben Diagonale z. B. BD liegen, und denselben Scheitel haben, hier m, n, an der andern Diagonale nach der entgegengesetzten Seite, also m=m' und n = n' konstruirt werden, so schneiden sich die neu gezogenen Schenkel AF und CF in einem Punkte, der zugleich in der allenfalls verlängerten Diagonale BD liegt.



Beweis. Man konstruire zuerst an der Diagonale CA einen Winkel ACF = m' gleich dem Winkel ADB = m, so wird der Schenkel CF die Diagonale BD in einem Punkt F schneiden; nun beschreibe man durch die Punkte A, D, F einen Kreis, und ziehe die Sehne AF, so ist der Winkel ADF ein Peripheriewinkel auf der Sehne AF, ist aber vermöge der Konstruktion dem Winkel ACF gleich, der auf derselben Sehne aufsteht, daher muß dieser letztere ein Peripheriewinkel sein, und der Kreis auch durch den Punkt C gehen; somit ist auch FDC = FAG, oder n = n'. Hätte man also gleich ursprünglich m = m', n = n' konstruirt, so hätten sich die beiden Schenkel AF, CF in einem Punkte geschnitten.

Zugleich folgt aus diesem Beweise, daß die Winkel AFD = ACD; DFC = DAC oder mit einzelnen Buchstaben bezeichnet x = x', y = y' sind.

Nachdem zufolge des Beweises die vier Punkte ADCF stets in der Peripherie eines Kreises liegen, so betragen, wenn ADC = α, AFC = β gesetzt wird, $\alpha + \beta = 180$ Grade . . . . . 1)

Sind demnach A, B, C drei unbewegliche, D und F aber bewegliche Punkte, so folgt aus dieser Gleichung:

1. Ist $\alpha = 0$, d. h. der Punkt D von AC unendlich weit entfernt, so ist $\beta = 180^0$, also der Punkt F in der Linie AC selbst.

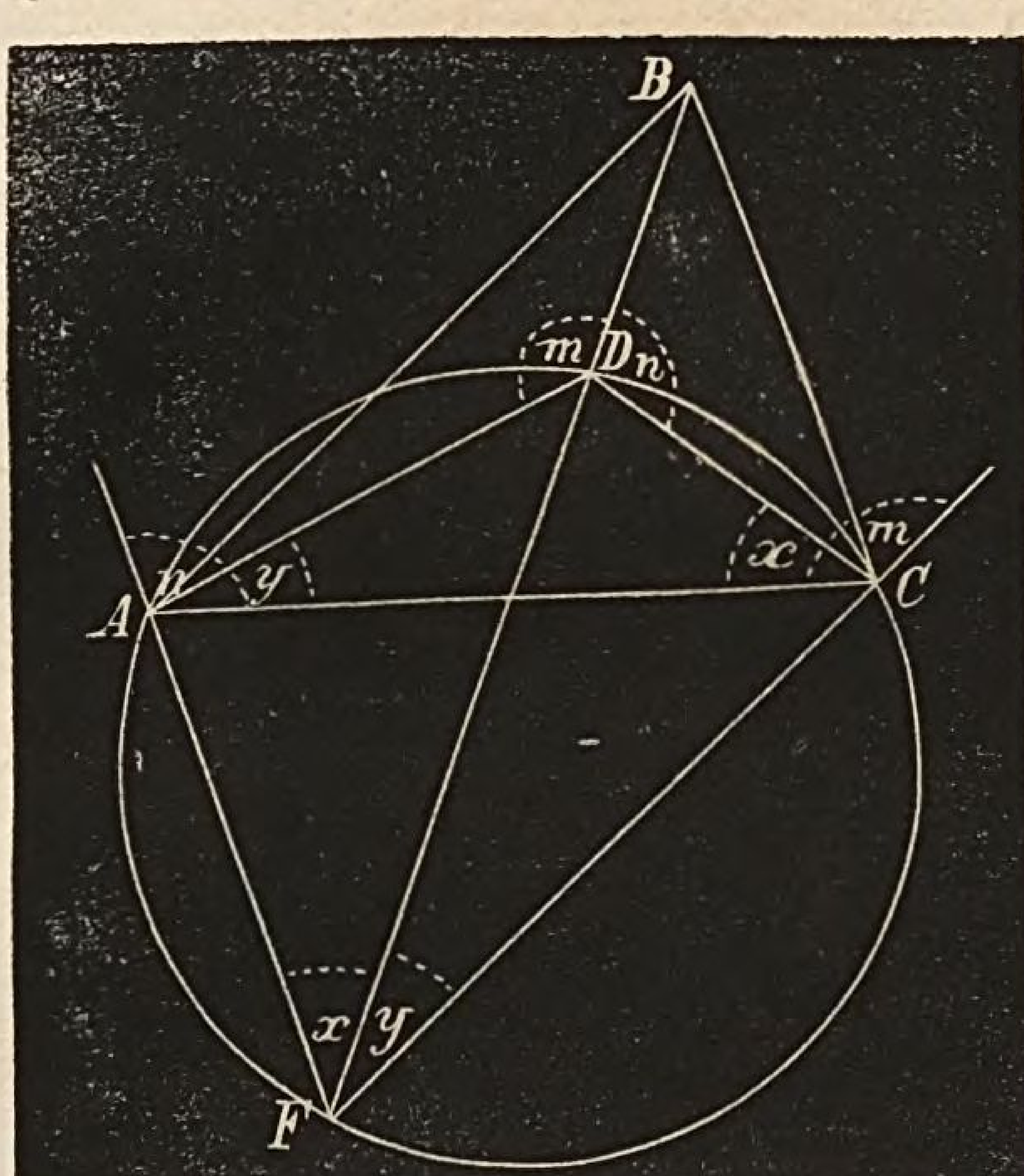
2. Mit dem Wachsen von α ist eine Abnahme von β verbunden, nähert sich also der Punkt D gegen AC, so entfernt sich der Punkt F von derselben.

3. Kommt F nach B, so liegt D (weil F, D und C stets in der Peripherie eines Kreises bleiben) in der Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises. Hat sich also D von einer unendlich großen Entfernung bis zu der Peripherie des um ABC beschriebenen Kreises bewegt, so ist der Punkt F von der Seite AC bis zu dem Scheitel des Dreieckes gekommen.

4. Liegt der Punkt D in AC, ist also $\alpha = 180^0$, so ist $\beta = 0$. Hat

sich also D von der Peripherie bis zu der Sehne AC bewegt, so ist F von B bis in's Unendliche gekommen.

5. Liegt der Punkt D innerhalb des Dreieckes ABC, so ist $\alpha > 180^0$ (der Winkel ist dann konvex), mithin β negativ, d. h. F ist dann unterhalb AC, dieser Fall ist in der Fig. 119 dargestellt, wo ABCD das ursprüngliche Viereck bedeutet. Aus der Vergleichung der Figuren ist ersichtlich, daß D und F ihren Ort gewechselt haben.



6. Je weiter sich D, Fig. 119, über B bewegt, desto stumpfer werden die Winkel m und n, desto mehr nähert sich $\alpha = m + n$ an 360^0, β an 180 Grade, dieser letztere Winkel ist negativ, daher nähert sich F der Linie AC.

§. 111. Orientirung des Meßtisches nach der Methode des Tobias Mayer.

Diese beruht auf der Konstruktion eines Viereckes, Fig. 118 und 119, von welchen die Seiten AC, AB, BC, und die Winkel m und n gegeben sind.

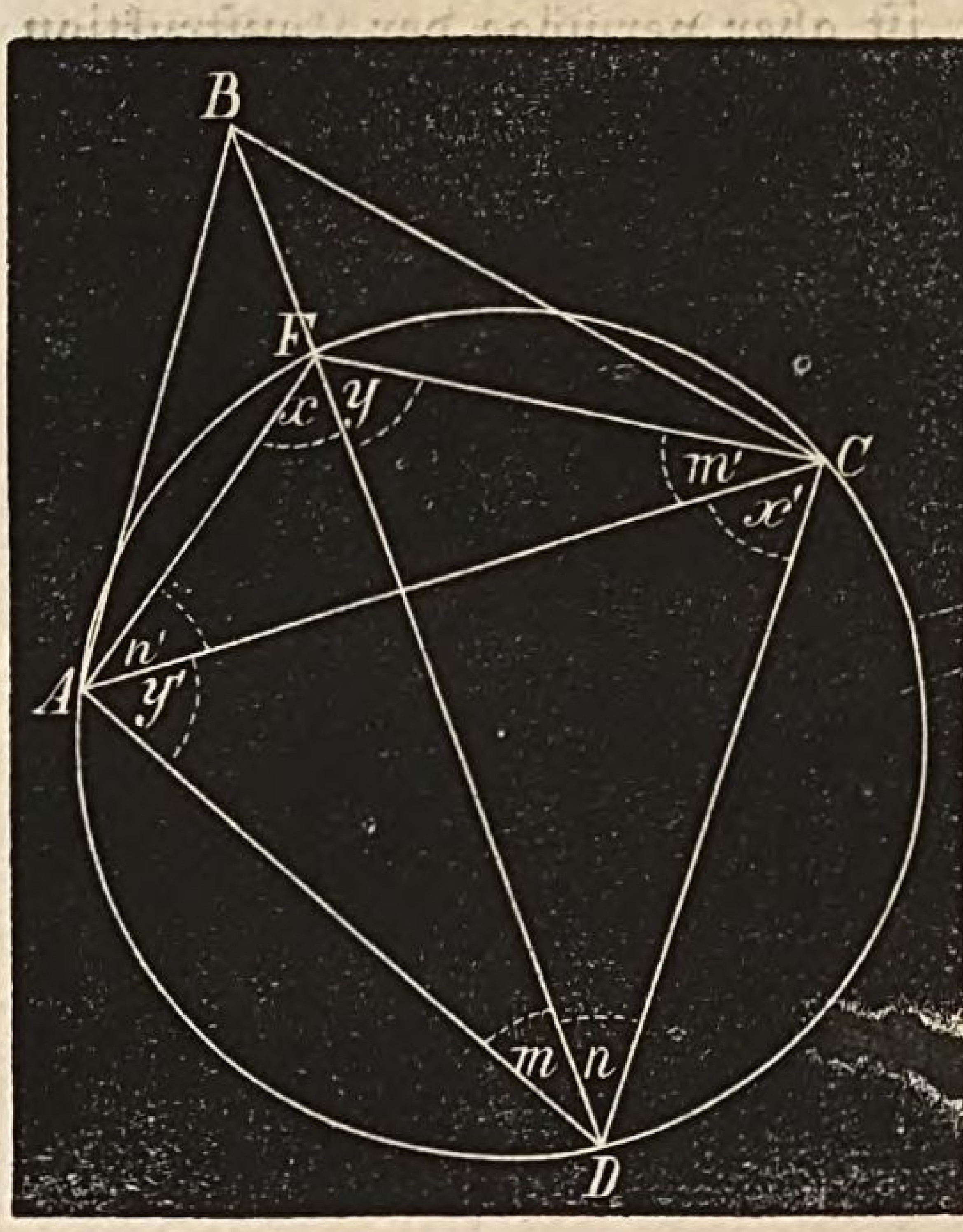


Fig. 118.

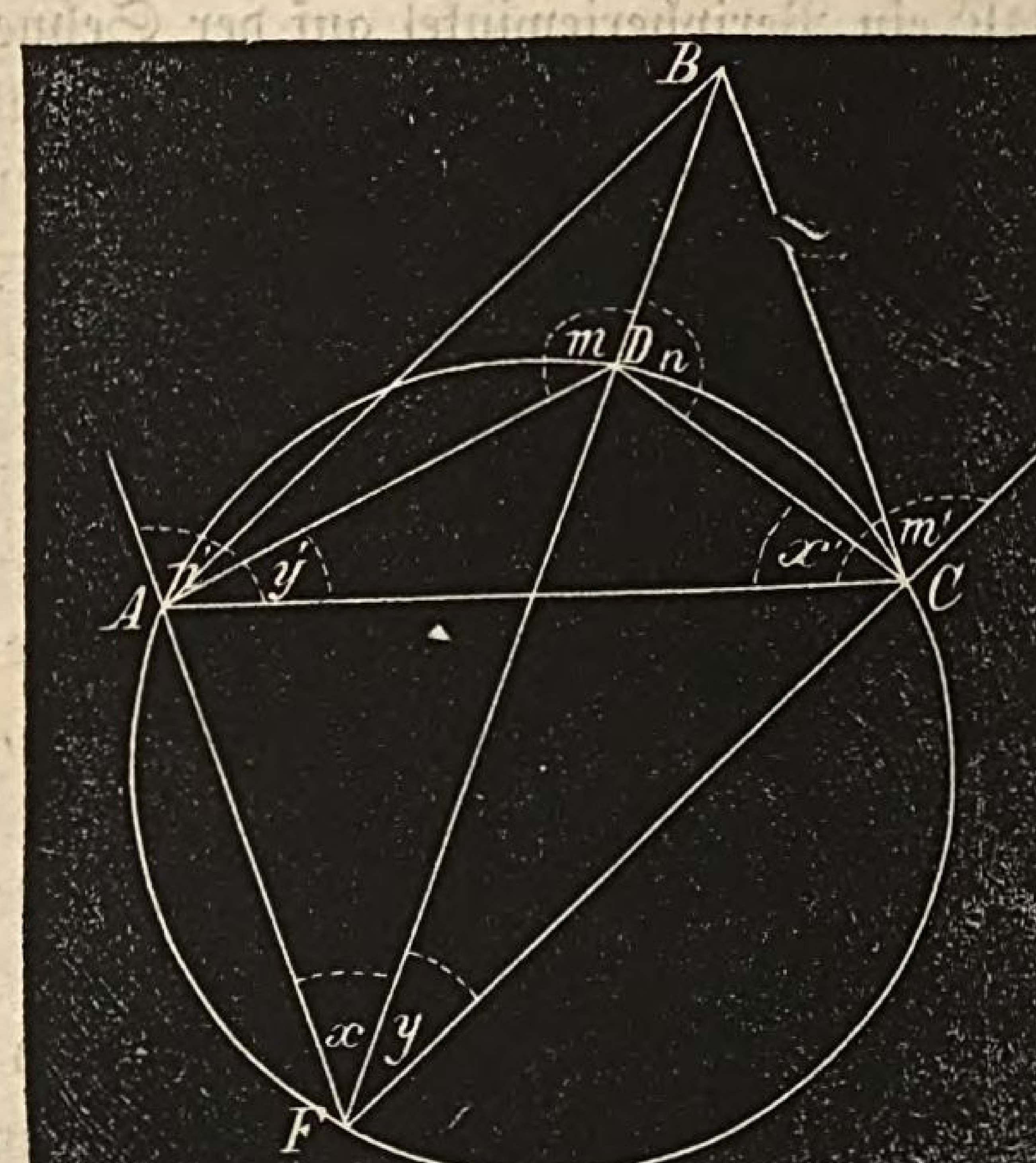


Fig. 119.

Um dasselbe zu konstruiren, wird man zuerst mit den gegebenen Längen ein Dreieck ABC bilden, sodann an der AC in C den Winkel $m' = m$, in A den Winkel $n' = n$ auftragen, und die neu gezogenen Schenkel so weit verlängern, daß sie sich schneiden, wodurch der Punkt F bestimmt wird. Durch die Verbindung der Punkte F, B entstehen bei F zwei Winkel x, y; den links liegenden x trage man an die AC rechts, den rechts liegenden y links, beide x' und y' nach derselben Seite, nach welcher ihre gleichen Winkel x und y gelegen sind, so schneiden

sich ihre Schenkel AD und CD mit BD in einem Punkte D, und das Viereck ABCD ist das gesuchte, denn die bei D liegenden Winkel ADB, BDC sind gleich m und n, vermöge dem vierten Satze.

Die Anwendung des eben Gesagten ist folgende:

Ist ABC das durch Signale bezeichnete Dreieck und der Meßtisch in einem Punkte zu orientiren, von welchem die drei Signale sichtbar sind, so wird jener horizontal und festgestellt, ohne auf das Dreieck abc, Fig. 120 und 121, welches

Fig. 120.

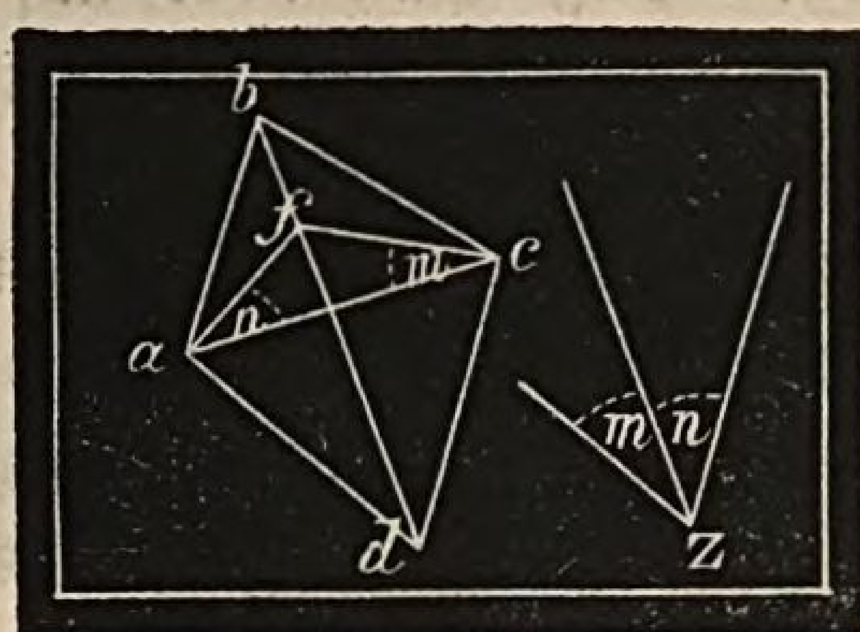
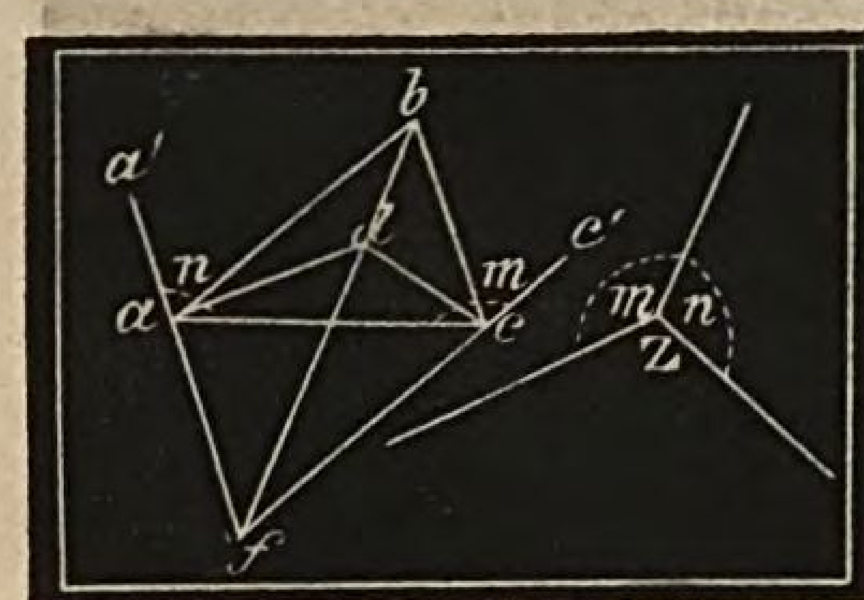


Fig. 121.



mit ABC ähnlich und auf dem Tischblatte aufgetragen vorausgesetzt wird, Rücksicht genommen zu haben; sodann in einem beliebigen Punkte z des Tischblattes die Lothgabel angelegt, auf dem Boden der Punkt D bestimmt, welcher mit z in einer Vertikalen liegt, und daselbst ein Pflock geschlagen. Nun visirt man von z nach A, B, C und zieht die Rayons, so erhält man von dem Vierecke ABCD die Winkel ADB = m, BDC = n, und da das Dreieck ABC bereits auf dem Blatte im verjüngten Maßstabe konstruirt ist, so kann man wie oben gezeigt wurde den fehlenden Theil des Viereckes ergänzen, und erhält abcd ähnlich mit ABCD. Nun stellt man den Punkt d genau über D, orientirt den Meßtisch mittelst db nach B, so ist die Aufgabe aufgelöst; zur Kontrolle lege man das Diopter an die Punkte d,a oder d,c, so wird bei richtiger Konstruktion des Viereckes im ersten Falle die Visur das Signal A, im zweiten C treffen.

Die Konstruktion des verjüngten Viereckes läßt sich noch vereinfachen und zwar:

1. Da der Punkt d, Fig. 120 und 121, mit b und f immer in einer geraden Linie liegt, so ist das Uebertragen der Winkel x und y überflüssig, denn nachdem die Winkel m = m′, n = n′ an das Dreieck konstruirt und dadurch f erhalten ist, so kann man in der bf einen Punkt schicklich wählen, diesen genau über D stellen, den Meßtisch mittelst bf nach B orientiren, und dann d mittelst des Abschneidens von A und C bestimmen; man legt nämlich das Diopter an a und visirt nach A, sodann von c nach C, die Rayons werden sich mit bf in einem Punkte schneiden, und dieser ist der gesuchte Punkt d.

2. Noch einfacher wird die Konstruktion, wenn man die Winkel m und n unmittelbar an der Seite ac konstruirt, was auf folgende Art möglich ist: man stellt c über D, legt das Diopterlineal an ac, orientirt den Meßtisch nach A und visirt von c nach B, so ist der konstruirte Winkel = m; hierauf stellt man a über D, das Diopter abermals an ac, orientirt das Tischblatt nach C, und visirt von a nach B, so erhält man den Winkel n, somit auch den Punkt f. Die weitere Operation ist bereits sub 1 erklärt worden.

In dem Falle, wenn der Meßtisch innerhalb des Dreieckes ABC aufgestellt wird, kann es leicht geschehen, daß die verlängerten Schenkel cg und ah,

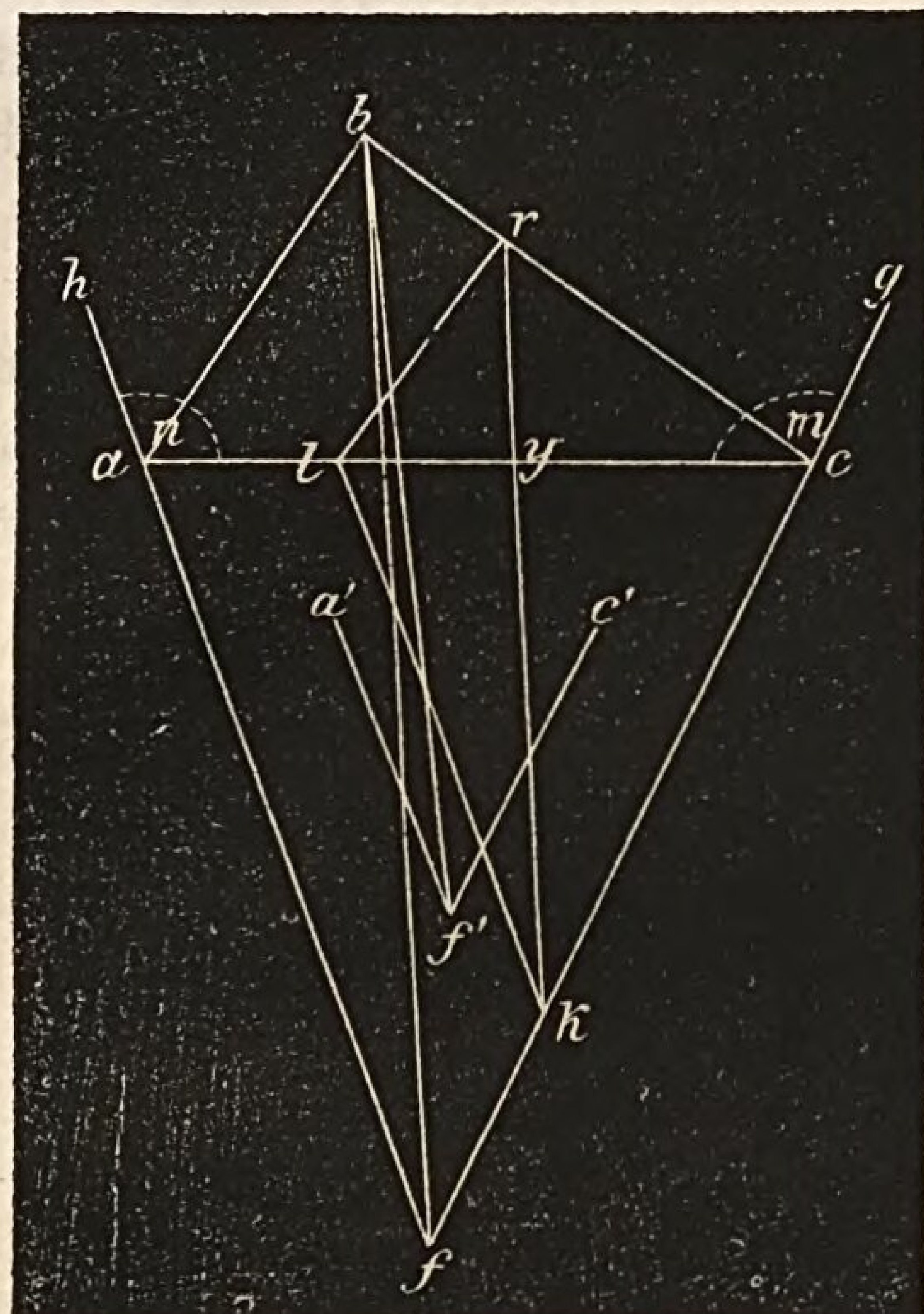
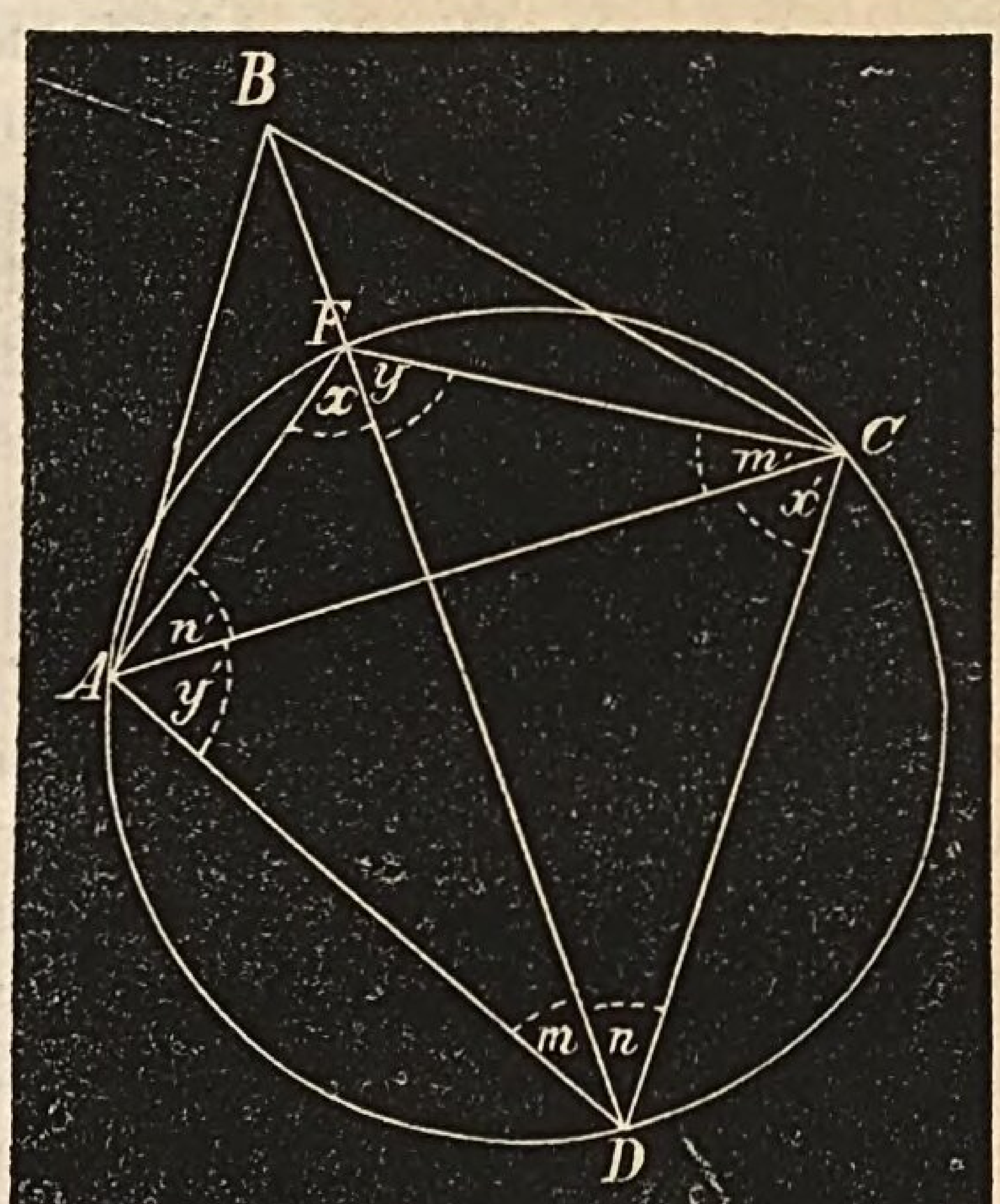


Fig. 122, sich nicht mehr auf dem Tischblatte schneiden, wodurch die ganze Auflösung vereitelt ist. In diesem Falle helfen sich die Praktiker dadurch, daß sie mit den Schenkeln cf und af parallele und gleich weit abstehende Linien c'f' und a'f' ziehen, wodurch sie den Punkt f' erhalten, das Diopterlineal an bf' anlegen und den Meßtisch orientiren. Daß man aber auf diese Art einen bedeutenden Fehler begehen kann, ist aus der Figur ersichtlich. Besser ist es, in diesem Falle von einem beliebigen Punkte k des einen Schenkels fc, eine Parallele mit fa und von dem so erhaltenen Punkte l die lr parallel mit ab zu ziehen, das Diopterlineal an kr anlegen und den Meßtisch nach B orientiren. Hier fehlt man in der Orientirung nur um den Winkel, unter welchem der Abstand der parallelen Linien bf und rk vom Objekte B erscheint.

Zusatz. Hätte man den Meßtisch in der Peripherie des um ABC, Fig. 118, beschriebenen Kreises aufgestellt und die beiden Winkel m und n konstruirt, so wäre auch ACB = m, BAC = n, und weil abc mit ABC ähnlich ist, auch acb = m, cab = n.



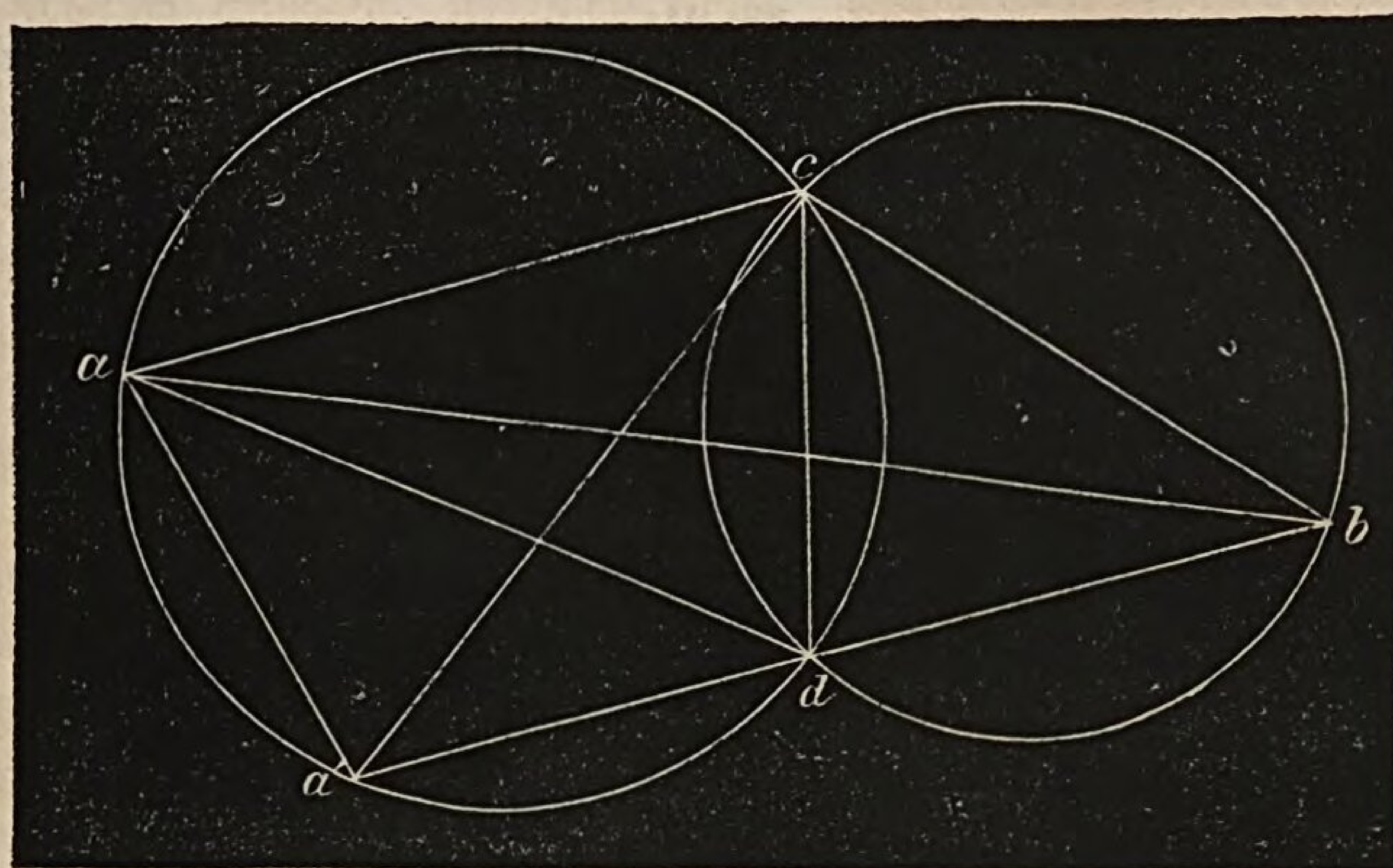
Würde man also, zufolge der obigen Auflösung, den Winkel m und n an der ac konstruiren, so schneiden sich die Schenkel dieser Winkel ebenfalls in b, und da das Ziehen der Geraden bf, nachdem b mit f identisch ist, unmöglich wird, so ist hiedurch die weitere Konstruktion eingestellt, und die Auflösung unmöglich. Ein solcher Standpunkt ist wegen §. 110, 2. Satz, zu meiden, aber auch dann noch ist er ungünstig gewählt, wenn er nahe an der Peripherie liegt.

§. 112. Orientirung des Meßtisches nach der Methode von Grunert.

Das schon mehrmals citirte Archiv für Mathematik und Physik von Grunert enthält im vierten Hefte des achten Theiles drei Methoden, die fragliche Aufgabe direkt aufzulösen, von diesen verdient die dritte ihrer Einfachheit halber allgemein bekannt zu werden.

Die Theorie dieser Auflösung ist folgende: wenn sich, Fig. 123 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), zwei Kreise schneiden, und man zieht die gemeinschaftliche Sehne cd, von einem dieser Punkte c, zu beiden Seiten derselben die Linie ca und cb, verbindet ferner den andern der Durchschnittspunkte d mit b, und überträgt den erhaltenen Winkel cdb an die ca, so daß cdb = caa' wird, so liegt der Punkt a', in welchem derselbe Kreis das zweite Mal geschnitten wird, mit d und b immer in einer geraden Linie.

Fig. 123.



Denn vermöge der Konstruktion ist cdb = caa', und weil das Viereck caa'd dem Kreise eingeschrieben ist, caa' + cda' = 180°, wird hier statt caa' der gleiche Winkel cdb substituirt, so erhält man cdb + cda' = 180°, also a'db eine gerade Linie.

Will man nun nach der Grunert'schen Methode den Meßtisch orientiren, so wird der Standpunkt D durch einen Pflock bezeichnet (wobei wieder die großen Buchstaben am Boden, die entsprechenden am Tischblatte liegen), a bei horizontal gestelltem Tische über D gebracht, ac nach C orientirt und B anvisirt, also der Winkel caa' = cdb unmittelbar an die ac übertragen.

Hierauf wird in der aa' ein Punkt a' nach dem Augenmaße angenommen, dieser über D gestellt, a'a nach A orientirt und von c nach C visirt; der Durchschnitt dieser Visur mit aa' bestimmt definitiv den Punkt a'.

Wird nun das Diopter an a'b angelegt, und die Visirebene durch das Drehen des Tischblattes nach B eingestellt, so ist der Tisch orientirt.

Um noch den Standpunkt d auf dem Blatte zu bestimmen, sucht man den Durchschnitt zwischen den Visuren von a nach A, bB, cC und erhält dadurch auch eine Kontrolle der Arbeit.

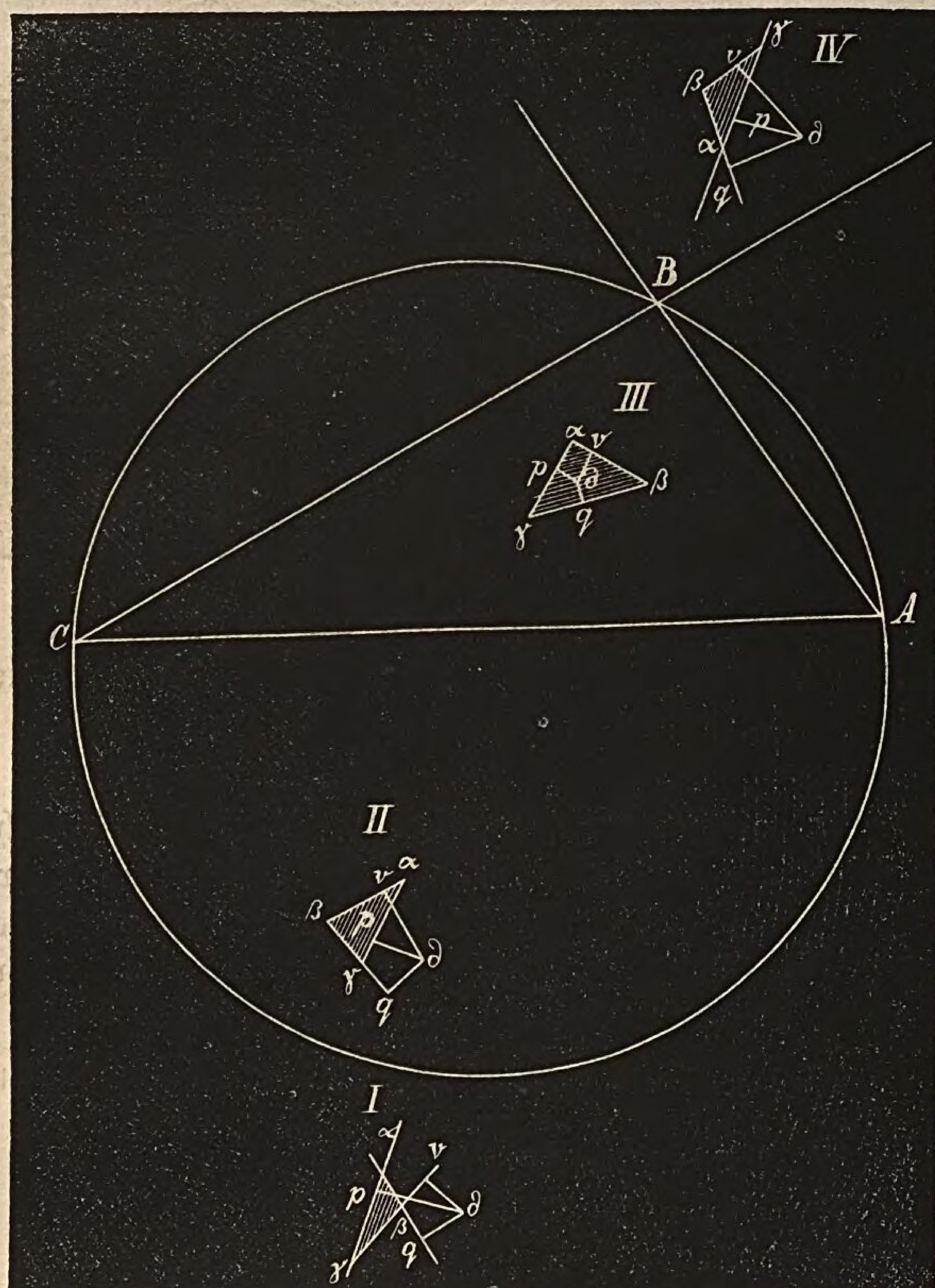
§. 113. Orientirung des Meßtisches nach der Methode des Lehmann.

Sind die Seiten des auf dem Tischblatte konstruirten Dreieckes mit jenen durch die Signale gegebenen nur beiläufig parallel gestellt, und die mehrmals erwähnten drei Visuren gezogen, so werden sich diese nicht in einem, sondern in drei Punkten schneiden, und es entsteht ein so genanntes Fehlerdreieck.

Bei dieser Methode hat man nun folgende Punkte zu unterscheiden:

1. Steht der Meßtisch außerhalb des um die drei Signale ABC, Fig. 124 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), beschriebenen Kreises und eine Seite des Dreieckes gegenüber (in I), so liegt der Punkt d, in welchem sich die drei Visuren beim orientirten Meßtische schneiden werden, und der Scheitel β des Fehlerdreieckes auf derselben Seite der mittleren Visur $\alpha\gamma$.

Fig. 124.



2. Steht der Meßtisch innerhalb des Kreises aber auch außerhalb des Dreieckes ABC (in II), oder außerhalb des Kreises in einem Scheitelwinkel (in IV), so liegt der Punkt d auf der einen und der Scheitel des Fehlerdreieckes auf der andern Seite der mittleren Visur.

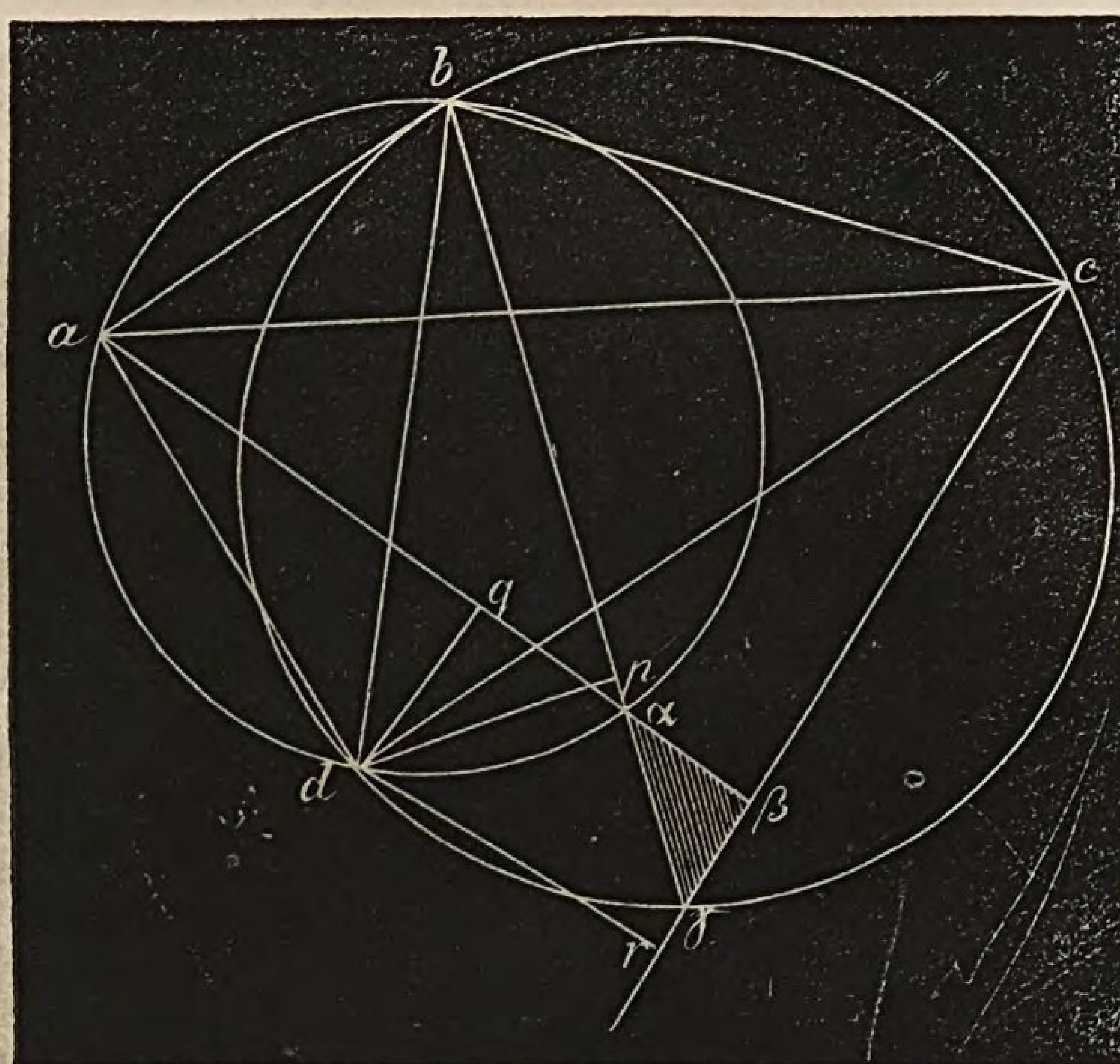
3. Steht der Meßtisch innerhalb des Dreieckes (in III), so liegt der Punkt d innerhalb des Fehlerdreieckes.

4. In allen Fällen verhalten sich die Abstände des Punktes d von den drei durch a, b, c gezogenen Visuren, wie die Entfernung des Punktes d von a, b, c.

Bis in die neueste Zeit wurde die Begründung des vierten Punktes auf die Annahme basirt, daß der Meßtisch jedesmal um den Punkt d gedreht werden könne. Diese Annahme, die nicht für alle Fälle zugegeben werden kann, veranlaßte mich in der ersten Auflage an der allgemeinen Giltigkeit der Auflösung zu zweifeln.

Professor Hantner hat aber seit dem Erscheinen meines Werkes nachfolgenden von der Drehung des Tisches unabhängigen Beweis dieser Methode gegeben.

Es sei Fig. 125 das auf dem Meßtische gegebene aber nicht genau orientirte Dreieck, so daß durch das Ziehen der Visuren das Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$ entsteht; so können wir, weil die Punkte α, β, γ sehr nahe an einander liegen, mit Rücksicht auf den 4. Satz §. 110 den Winkel $a\alpha b = m$ und $b\gamma c = n$ setzen, und es wäre somit die Aufgabe zu dem Dreiecke abc einen 4. Punkt zu finden, von welchem die Visuren nach A und B den Winkel m, nach B und C den Winkel n einschließen. Beschreibt man über $ab\alpha$ und $bc\gamma$ Kreise, so werden sich diese außer b noch in einem zweiten Punkte d schneiden, und dieser ist der gesuchte; denn dann



ist $adb = a\alpha b = m$; $b\gamma c = bdc = n$; orientirt man noch db nach B und bestimmt den Punkt D vertikal unter d, so ist die Aufgabe aufgelöst. Zur Kontrolle legt man noch das Diopter an da oder an db, so wird die Visur bei einer richtigen Konstruktion im ersten Falle A, im zweiten B treffen.

Aus der Figur folgt ferner die Gleichheit der Peripheriewinkel $da\alpha$, $db\gamma$ und $dc\beta$, die erstern zwei stehen auf dem Bogen $d\alpha$, die letztern auf $d\gamma$. Bezeichnet man diese gleichen Winkel mit α, und ist dq senkrecht auf $a\alpha$, dp auf $b\gamma$, dr auf $c\beta$, so ist $\sin.\ \alpha = \frac{dq}{da} = \frac{dp}{db} = \frac{dr}{dc}$, daher

$$dp : dq : dr = da : db : dc \ldots .\ 1).$$

Daß diese Proportionen bei jedem der eingangserwähnten Standpunkte ihre Richtigkeit behalten, folgt aus der Ableitung von selbst, da keine Rücksicht auf den Ort der Aufstellung genommen worden ist.

Die letzten Proportionen machen aber das Zeichen der erwähnten Krise nicht nur entbehrlich, sondern beschleunigen die Auflösung wesentlich; denn hat man ein Fehlerdreieck erhalten, und aus der Lage der Punkte ABCD beurtheilt, wo der richtige Durchschnitt liegen müsse, so wird man diesen nach dem Augenmaße der Art annehmen, daß seine Entfernung von den Visuren mit der von den Ecken des Dreieckes im Verhältniß steht, ihn vorderhand nur durch einen feinen Punkt bezeichnen, an diesen und b das Diopter legen, den Tisch nach B orientiren und abermals die drei Visuren ziehen.

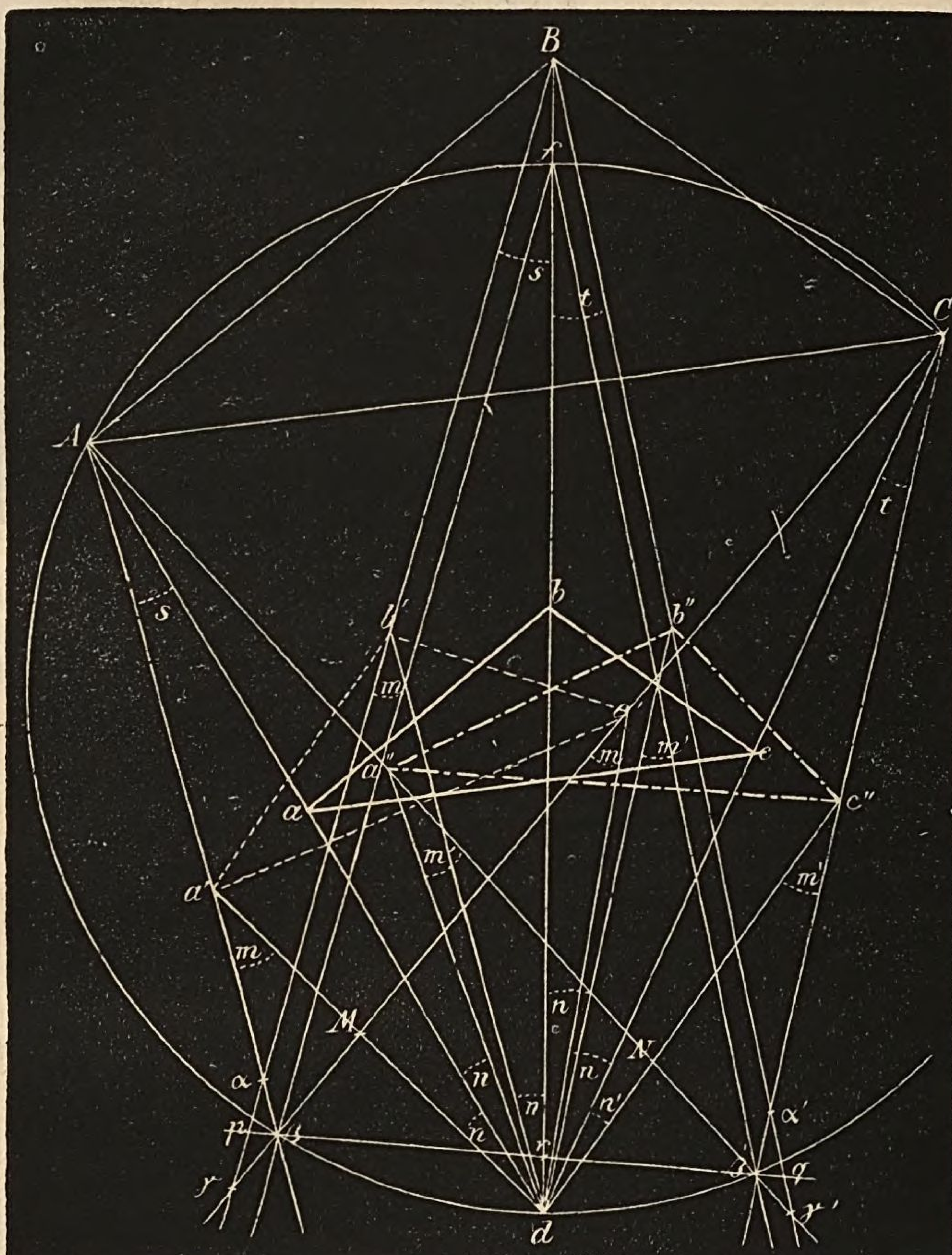
Ist d richtig gewählt, so werden sich die Visuren in einem Punkte schneiden, an den Durchschnitt legt man die Lothgabel an und bestimmt am Boden den Punkt D, der Tisch ist dann orientirt und der Standpunkt bestimmt.

Gewöhnlich wird man das obige Verfahren zwei auch drei Mal wiederholen müssen, dabei jedoch immer das neu erhaltene Fehlerdreieck zur Beurtheilung der Entfernungen nehmen, bis sich die Visuren in einem Punkte schneiden.

§. 114. Orientirung des Meßtisches nach der Methode des Friedr. Netto *).

Hier müssen wir noch folgende Untersuchung voranschicken:

Es sei, Fig. 126, ABC das durch Signale, und abc das auf dem Tischblatte



gegebene Dreieck, das letztere mit dem Dreiecke ABC ähnlich und in der parallelen Lage, d der Punkt, in welchem sich die drei Rayons aA, bB, cC schneiden.

Nehmen wir an, das Dreieck abc werde um d bewegt und komme in die Lage a'b'c', so werden sich bei dieser Lage die Rayons in drei Punkten schneiden und somit ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ bilden, welches wir der Kürze halber das Fehlerdreieck, die von dem Scheitel des Dreieckes gezogene Visur Bb oder Bb' die

*) Diese Auflösungsart hat er in seinem Handbuche der gesammten Vermessungskunde, Berlin 1820, bekannt gemacht.

mittlere, und den Durchschnitt zwischen den zwei andern Visuren Aa′ und Cc′, nämlich β, den Scheitel des Fehlerdreieckes nennen wollen.

Verbinden wir die Punkte a′, b′, c′ mit d, so wird, weil die Lage der Punkte a, b, c gegen einander unveränderlich ist, sobald a′ auf a zurück bewegt wird, zu gleicher Zeit auch b′ auf b und c′ auf c kommen müssen, daher sind die mit n bezeichneten Winkel, nämlich a′da, b′db, c′dc einander gleich; aus demselben Grunde sind die mit m bezeichneten Winkel unter sich gleich, denn diese, nämlich βa′d, γb′d und βc′d werden zugleich Null, als a′ auf a oder c′ auf c kommt, und wachsen in demselben Verhältnisse, als sich einer dieser Punkte, z. B. b′, von dem entsprechenden b entfernt.

Weil bei den Dreiecken da′A und db′B, nach dem eben Bewiesenen, die äußern Winkel, nämlich m, und einer der inneren gegenüber liegenden, nämlich n, gleich sind, so sind auch die mit s bezeichneten Winkel unter sich gleich, diese sind

$$\beta Ad = \gamma Bd \; . \; . \; . \; . \; . \; 1).$$

Denken wir uns noch das Dreieck abc um den Punkt d in die Lage a″b″c″ gewendet, sodann die entsprechenden Visuren gezogen, so erhält man das Fehlerdreieck α′β′γ′ und werden die Punkte a″, b″, c″ mit d verbunden, so kann durch dieselben Schlüsse wie vorher, die Gleichheit von cdc″ und bdb″, so wie dc″β′ und db″γ′, also der mit n′ und m′ bezeichneten Winkel nachgewiesen werden, woraus folgt, daß auch die mit t bezeichneten Winkel gleich sind, nämlich

$$dC\beta' = dB\gamma' \; . \; . \; . \; . \; . \; 2).$$

Wird der Durchschnitt zwischen den Linien a′d und c′β mit M, zwischen Aβ′ und c″d mit N bezeichnet, so folgt aus den Dreiecken a′Mβ und Mdc′, weil sie die bei M liegenden Scheitel- und die mit m benannten Winkel wechselweise gleich haben, daß auch der Winkel a′βc′ = a′dc′ ist; aber a′dc′ = a′da + adc′ = adc′ + c′dc = adc, daher auch a′βc′ = adc, oder mit andern Buchstaben ausgedrückt,

$$A\beta C = AdC \; . \; . \; . \; . \; . \; 3).$$

Auf dieselbe Art folgt aus den Dreiecken a″dN und βNc″, daß a″dN = Nβ′c″ ist, und weil Nβ′c″ = Aβ′C und a″dN = a″dc + cdc″ = a″dc + a″da = adc = AdC ist, so ist auch

$$A\beta'C = AdC \; . \; . \; . \; . \; . \; 4).$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) folgt, daß, wenn man um die Punkte A, d, C einen Kreis beschreibt, dieser auch durch die Punkte β und β′ gehen muß, denn AdC wird ein Peripheriewinkel, und die ihm gleichen Winkel AβC und Aβ′C stehen mit ihm auf derselben Sehne AC, daher sind auch die letzteren Peripheriewinkel; und wird βf mit Bγ parallel gezogen, so ist βfd = γBd, aber Gleichung 1) γBd = βAd, daher auch βfd = βAd, und weil βAd ein Peripheriewinkel ist, so ist es auch der erstere, somit f ein Punkt der Peripherie desselben Kreises, und wird f mit β′ verbunden, so ist dfβ′ = dCβ′, daher vermöge Gleichung 2) dfβ′ = dBγ′.

Ziehen wir noch durch β, β′ eine Linie, und verlängern wir dieselbe so weit, daß sich auch die mittleren Visuren αγ in p, α′γ′ in q, die Bd in r schneidet, so sind nach dem Vorhergehenden die Dreiecke pBr und βfr, so auch rBq und rfβ′

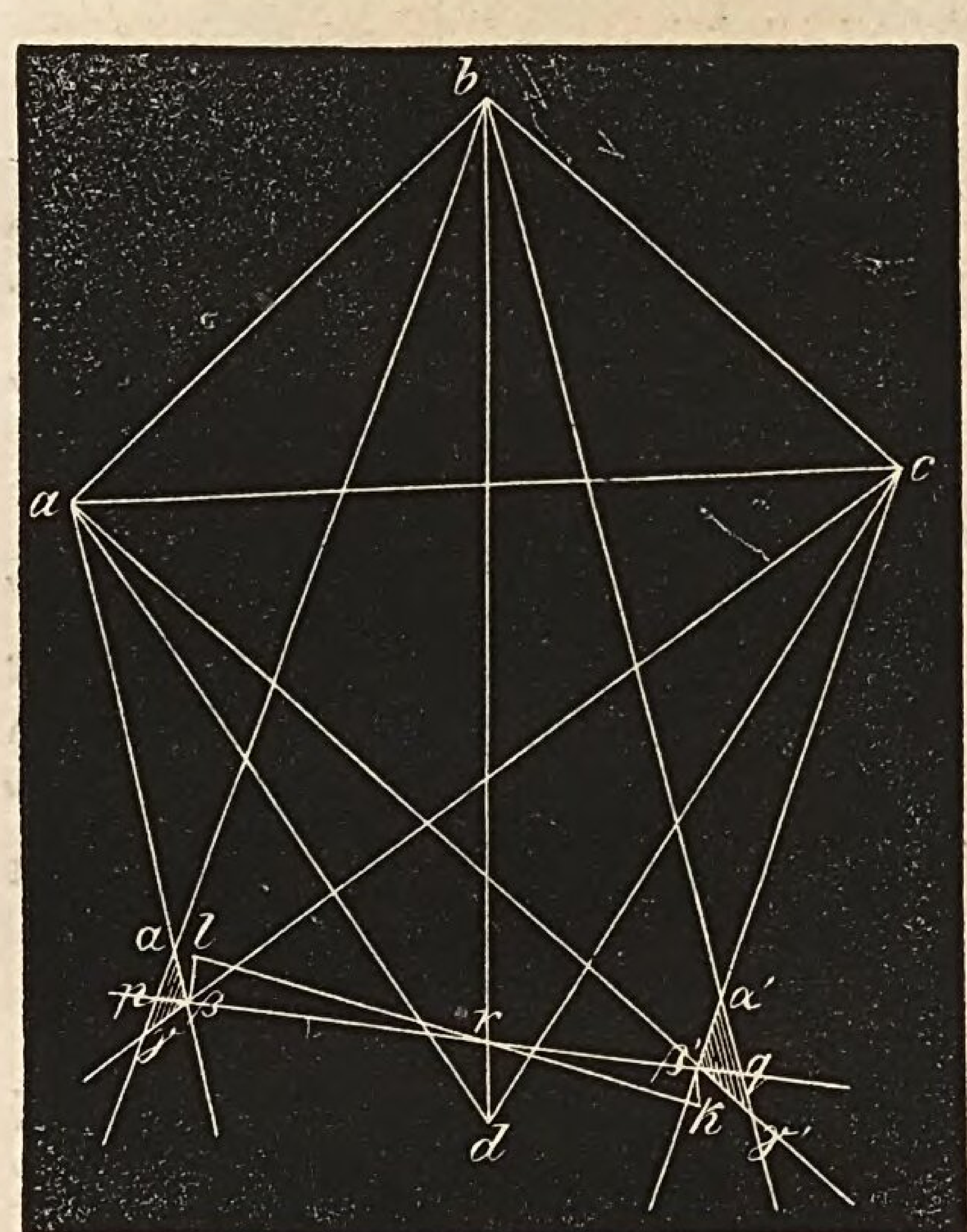
ähnlich; aus den ersten zwei Dreiecken folgt $pr : \beta r = Br : fr$, aus den letzteren $qr : \beta' r = Br : fr$, daher auch $pr : \beta r = qr : \beta' r$, und aus dieser $(pr - \beta r) : \beta r = (qr - \beta' r) : \beta' r$, oder mit Rücksicht auf die Figur

$$\beta r : \beta' r = p\beta : q\beta' \quad \ldots\ldots 5).$$

Verbindet man also die beiden Scheitel ($\beta\beta'$) der nach entgegengesetzter Richtung von den mittleren Visuren (γB und $\gamma' B$) liegenden Fehlerdreiecke durch eine gerade Linie, und verlängert man diese so weit, daß sie die mittleren Visuren in p und q schneidet, so wird die Verbindungslinie ($\beta\beta'$) durch die mittlere Visur bei orientirtem Meßtische (Bd) in zwei Stücke (βr, $\beta' r$) geschnitten, die zu einander in demselben Verhältnisse stehen, wie die Stücke der Verbindungslinie (βp, $\beta' q$) zwischen den Fehlerdreiecken.

Die Auflösung selbst ist folgende:

Man stellt den Meßtisch mit dem darauf konstruirten Dreiecke abc, Fig. 127, horizontal, nach dem Augenmaße orientirt, legt das Diopter- oder Perspektivlineal an a und visirt nach A, eben so von b nach B, von c nach C, und zieht jedesmal neben der Kante feine Bleilinien, so erhält man hiedurch, weil das Tischblatt nicht orientirt ist, ein Fehlerdreieck, z. B. das $\alpha\beta\gamma$. Hierauf macht man die Mittelschraube auf, wendet das Tischblatt ein wenig, stellt es wieder fest und horizontal, und zieht wieder die Visuren aA, bB, cC, so erhält man das zweite Fehlerdreieck $\alpha'\beta'\gamma'$; nun zieht man durch die Scheitel $\beta\beta'$ eine gerade Linie, so wird diese die mittleren Visuren in p und q schneiden, endlich errichtet man in β und β' nach entgegengesetzten Richtungen Senkrechte, trägt auf die eine $\beta l = \beta p$, auf die andere $\beta' k = \beta' q$, verbindet die Endpunkte der Senkrechten durch eine Linie kl, so wird die $\beta\beta'$ in einem Punkte r geschnitten. Weil nun $\beta l r$ mit $r\beta' k$ ähnlich ist, so verhält sich $\beta r : \beta' r = \beta l : \beta k$, und statt βl, βk die obigen Werthe substituirt, auch $\beta r : \beta' r = \beta p : \beta' q$ (die Proportion 5), daher ist r ein Punkt der mittleren Visur bei orientirtem Meßtische.



Legt man demnach das Diopterlineal an die Punkte b, r und stellt die Visierebene mittelst der Wendeschraube auf das Signal B scharf ein, so ist der Meßtisch orientirt.

Um noch den Punkt d zu erhalten, visirt man sodann von a nach A, so auch von c nach C, zieht die Visuren, so müssen sich diese mit der verlängerten br in einem Punkte schneiden, und dieser ist der gesuchte. Bestimmt man zuletzt den Punkt D auf der Erdoberfläche, welcher mit d in derselben Vertikalen liegt, so ist ersterer der Standpunkt.

Sollten beide Fehlerdreiecke an derselben Seite der mittleren Visur liegen, so müßten die in den Scheiteln errichteten Senkrechten auch nach einer Seite, also beide entweder auf- oder abwärts gerichtet sein.

Die obige Auflösung ist auch dann noch brauchbar, wenn die drei Signale A, B, C in einer geraden Linie liegen sollten, weil in der ganzen Auflösung die Entfernung des Punktes B von der AC nicht vorkommt, somit auch Null sein kann.

Zusatz 1. Die Beweisführung bleibt dieselbe, wenn der Standpunkt innerhalb des Dreieckes ABC oder in einem Scheitelwinkel desselben angenommen wird.

Zusatz 2. Wer ein gutes Augenmaß besitzt, der wird die Errichtung der Senkrechten βl und $\beta' k$ (die desto kleiner ausfallen, je näher man der Orientirung ist) entbehren können, er wird nämlich den Punkt r so annehmen, daß er glaubt, die Linie $\beta\beta'$ werde dadurch in dem Verhältnisse $\beta p : \beta' q$ getheilt, das Visirmittel an die Punkte r und b anlegen, den Tisch nach B orientiren und die drei Rayons ziehen, dabei aber auf ein kleines Fehlerdreieck gefaßt sein; mit diesem und den kleinern der zuerst erhaltenen Dreiecke dieselbe Operation wiederholen und so den Tisch bald orientirt haben.

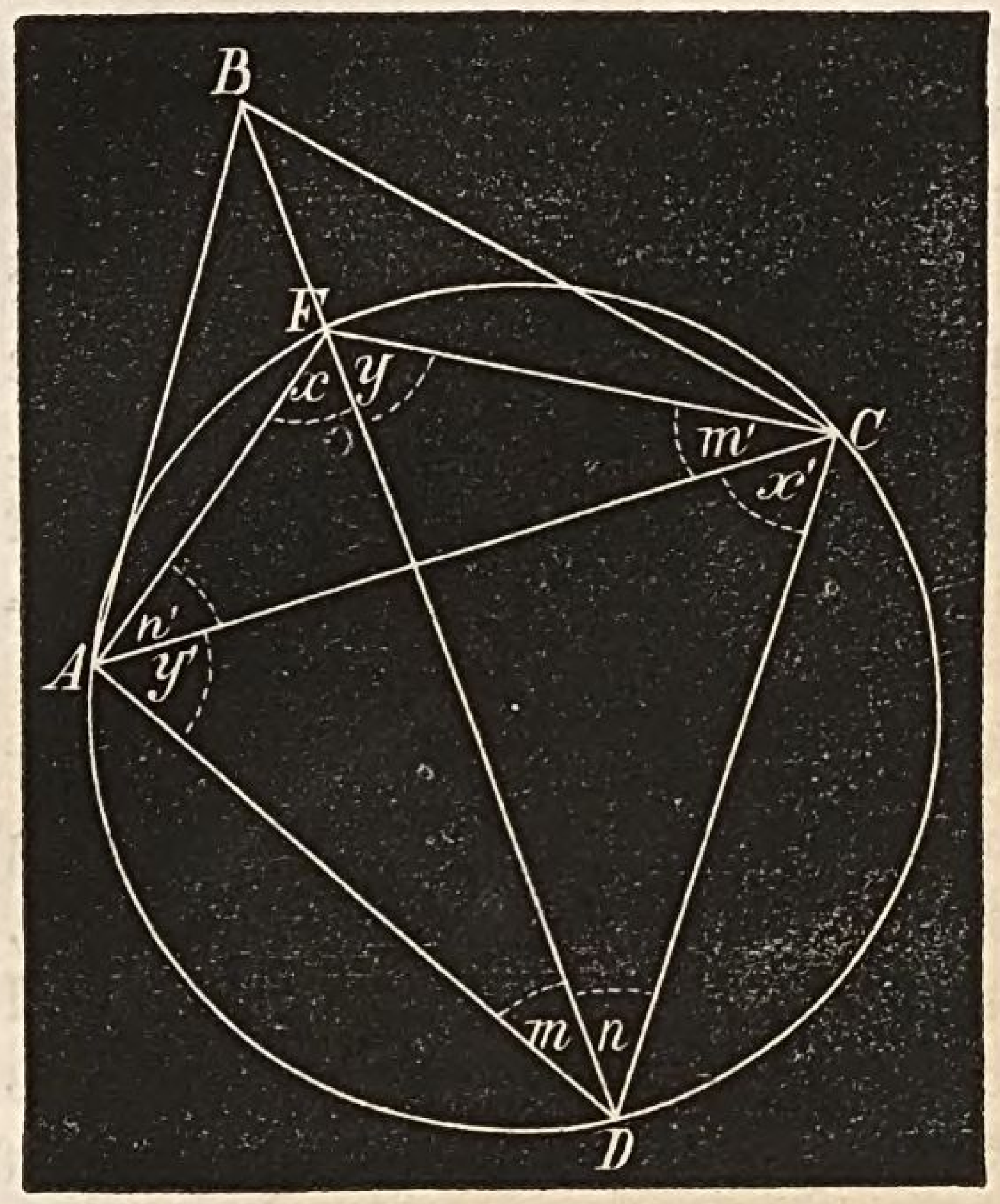
Anmerkung. Zur Auflösung der erwähnten Aufgabe bediene ich mich seit vielen Jahren einer Methode, die wohl wenig Theoretisches für sich hat, aber in allen Fällen äußerst praktisch ist, sie besteht in Folgendem:

Hat man durch das Ziehen der Visuren ein Fehlerdreieck erhalten, so drehe man das Tischblatt mittelst der Wendeschraube nach der Größe des Fehlerdreieckes um einige Schraubengänge, ziehe abermals die drei Visuren, so erhält man ein zweites Fehlerdreieck. Nun beurtheilt man, welchen Erfolg die Drehung des Tischblattes hervorgebracht hat, nämlich, ob und um wie viel das neue Fehlerdreieck kleiner oder größer als das erste ist, darnach kann man beurtheilen, nach welcher Seite das Tischblatt gedreht werden muß, und wie viel Schraubengänge diese Wendung betragen könne. Hat man die zweite Wendung auch nur beiläufig errathen, so wird das dritte Fehlerdreieck viel kleiner als das erste, und durch Wiederholung dieses Versuches stellt man den Meßtisch sehr bald so, daß sich die drei Visuren in einem Punkte schneiden.

Zu bemerken ist jedoch, auf die Lage des Scheitels eines Fehlerdreieckes, hinsichtlich der mittleren Visur, Acht zu geben, denn es kann geschehen, daß während der Drehung der Meßtisch über seine orientirte Lage auf die entgegengesetzte Seite gewendet worden ist.

Rücksichten hinsichtlich der Wahl des Standpunktes.

§. 115. 1. Durch die Wahl des Standpunktes D, Fig. 118 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), ist die Form der Dreiecke ADB, ADC und BDC bestimmt. Nun können aber (§. 96) die Seiten eines Dreieckes am genauesten bestimmt werden, wenn dasselbe gleichschenklig und am Scheitel rechtwinklig ist; da aber dieser Satz nicht zugleich auf alle drei oben genannten Dreiecke angewendet werden kann, indem ADB $=$ ADC $=$ BDC $= 90^0$ betragen müßten, so wird der Punkt D dann am vortheilhaftesten gewählt sein, wenn wenigstens eines dieser Dreiecke so viel wie möglich gleichschenklig, am Scheitel (bei D) rechtwinklig ist.



Wäre dagegen D gegeben, hätte man aber auf dem Tischblatte mehrere Punkte, deren entsprechende Signale von D sichtbar sind, so wähle man unter diesen drei solche, von welchen zwei mit dem Standpunkte nahe ein gleichschenkliges am Scheitel rechtwinkliges Dreieck bilden.

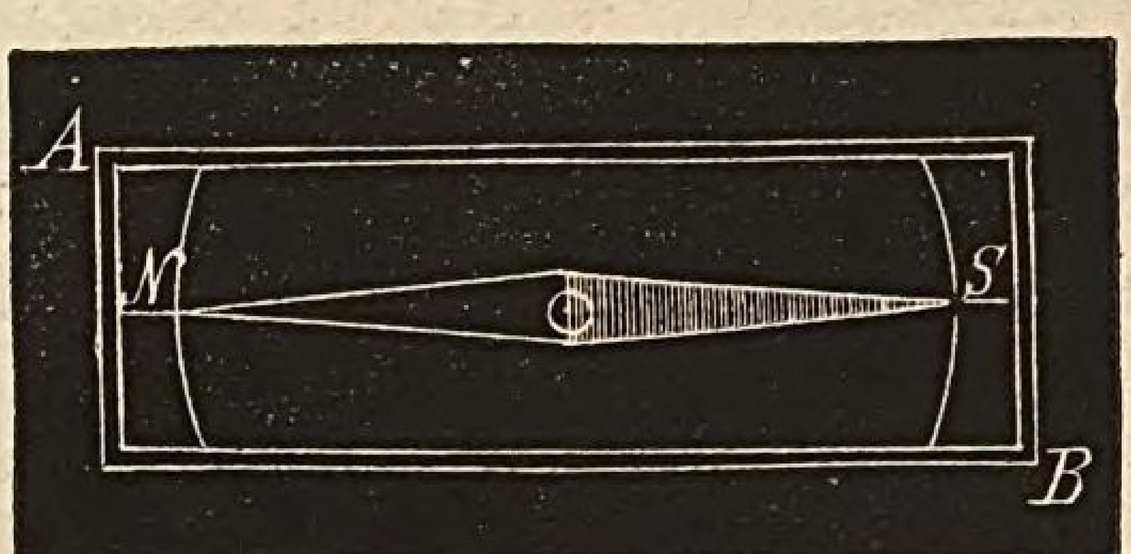
2. Von einem Standpunkte soll kein neues Signal anvisirt werden, welches weiter entfernt ist, als jenes, nach welchem der Meßtisch orientirt wurde, denn bezeichnet man die Entfernung des letzteren mit a, den in ihr enthaltenen Fehler mit da, die Entfernung des neu anvisirten Objektes mit b und den blos von da in ihr entstehenden Fehler mit db, so wird (§. 96) db kleiner als da sein, wenn $b < a$ ist.

3. Da der Fehler, welcher durch das Anlegen des Lineals an zwei gegebene Punkte entsteht, desto kleiner ist, je weiter diese von einander entfernt sind, ferner mehrere der Fehler, welche von der nicht absolut genauen Rektifikation der Instrumente entstehen, desto kleiner werden, je weiter die Signale vom Standpunkte entfernt sind, so ist deshalb die Orientirung des Meßtisches nach dem entferntesten der drei sichtbaren Objekte die vortheilhafteste.

§. 116. Orientirung des Meßtisches mittelst der Magnetnadel.

Eine frei schwebende Magnetnadel hat bekanntlich die Eigenschaft, daß sie durch eine nur momentan wirkende Kraft aus ihrer Ruhe gebracht, mehrere Schwingungen macht, dann aber, wenn kein Hinderniß obwaltet, wieder in der ursprünglichen Richtung zur Ruhe kommt. Diese Eigenschaft bietet ebenfalls ein Mittel dar, den Meßtisch zu orientiren.

Die hiezu geeignete einfachste Vorrichtung, Fig. 128, besteht aus einem 5 bis 6 auch 8 Zoll langen, etwa zwei Zoll breiten, höchstens einen Zoll hohen messingenen Kästchen (Gehäus) AB, welches auf das horizontal gestellte Tischblatt zu liegen kommt. In der Mitte der Grundebene dieses Gehäuses ist senkrecht auf diese ein Stift, und auf diesem ruht die Magnetnadel; zur Verminderung der Reibung zwischen der Spitze des Stiftes und der Nadel hat diese (gewöhnlich) ein sogenanntes Hütchen, nämlich einen harten Stein (Achat, Feuerstein) eingesetzt, der innerhalb konisch ausgehöhlt ist, und mit dieser Höhlung liegt die Magnetnadel auf der vertikalen Spitze. Das Kästchen ist oben mit Glas gedeckt, damit der Wind auf die Bewegung der Nadel keinen Einfluß ausübt; in der horizontalen Ebene, in welcher sich die Magnetnadel bewegt, sind nach der Breite des Kästchens zwei messingene Plättchen eingelegt, diese entweder in Grade abgetheilt, oder es sind mit der vertikalen Spitze in einer Linie nur kurze mit N und S bezeichnete Striche gezogen.



Das Instrument heißt die **Orientirungs-Boussole.**

Da die Richtung der Magnetnadel durch äußere Einflüsse, als durch die Nähe von Eisen oder eisenhaltigen Mineralien, elektrische Luft ꝛc. sehr geändert wird, so ist die Orientirungs-Boussole nur mit Vorsicht und nur dann zu gebrauchen, wenn alle andern Mittel, den Tisch zu orientiren, fehlen.

Der Gebrauch der Boussole ist folgender:

Nachdem der Meßtisch auf irgend einem Standpunkte orientirt ist, legt man die Boussole mit den längeren Seiten von Nord nach Süd auf das Tischblatt, und so, daß die Nadel genau auf N und S einspielt; legt sodann das Diopterlineal an die längere Seite der Gehäusplatte ohne die Magnetnadel aus ihrer Richtung zu bringen, und bemerkt an beiden Rändern des Tischblattes durch kurze an der Kante des Diopters gezogene Bleilinien die Richtung des letzteren, diese kurzen Linien können zur größeren Vorsicht piquirt werden, jeden Falls aber mit N und S unterschieden werden.

Wird in der Folge auf einem anderen Standpunkte das Diopterlineal mit der Kante an die piquirten Linien und die Boussole genau an das Lineal angelegt, das Tischblatt mittelst der Wendeschraube so gedreht, daß die Nadel scharf nach N und S einspielt, so ist der Tisch wieder orientirt, denn da die Magnetnadel in diesem Standpunkte eine mit der vorigen parallele Richtung hat, so haben es auch alle übrigen Linien des Tischblattes.

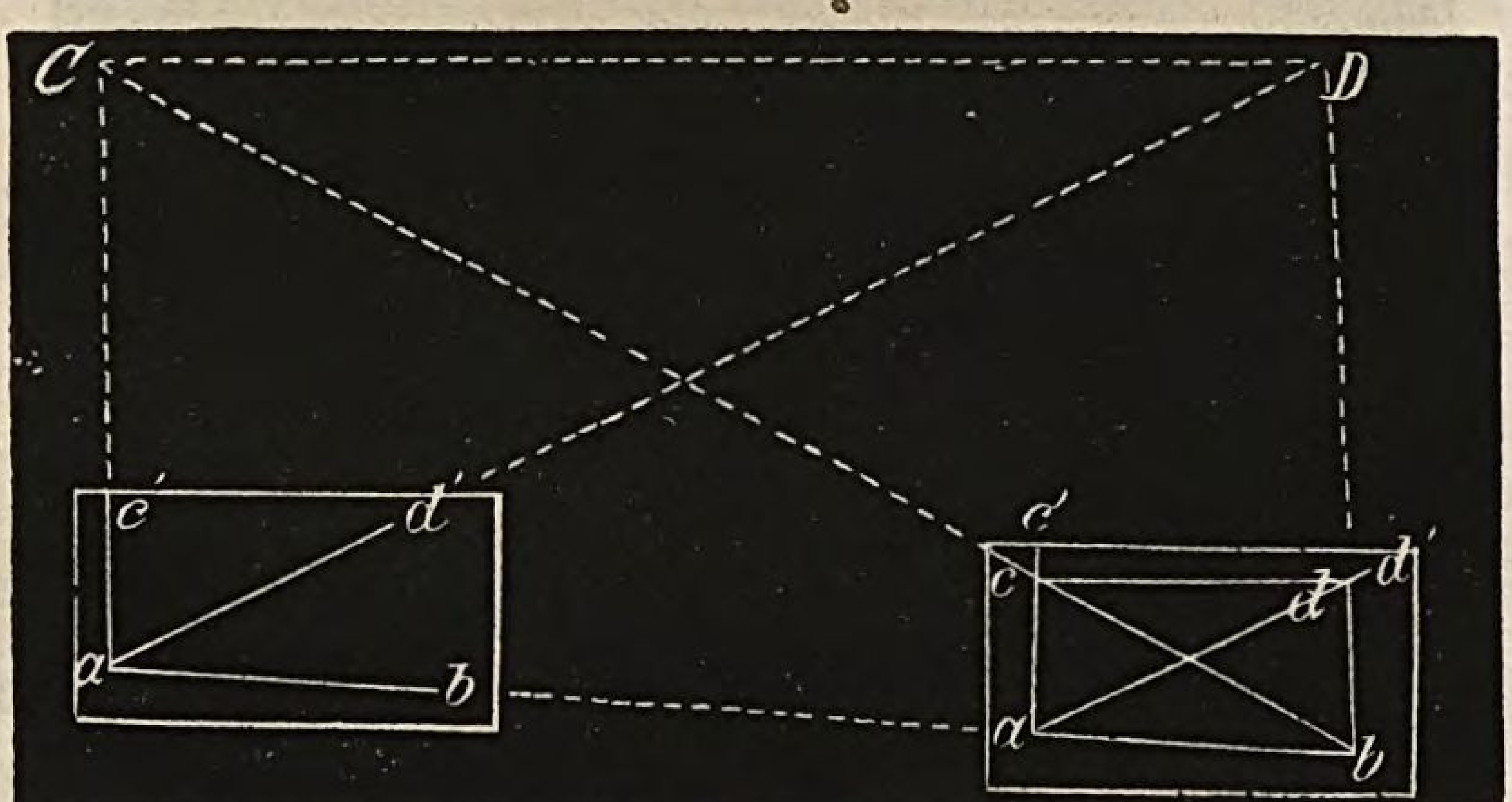
Anmerkung. Der Vorschlag über die Orientirung des Meßtisches und die Bestimmung des jedesmaligen Standpunktes mittelst bereits bestimmter Fixpunkte und auch solcher, die außer das Tischblatt fallen, den der Herr Perger im 1. Band der Wiener polytechnischen Jahrbücher bekannt gemacht hat, ist wenig oder gar nicht in Anwendung gekommen.

§. 117. **Aufgabe. Auf dem Meßtische ein Viereck zu konstruiren, welches einem durch Signale gegebenen ähnlich ist.**

Die Auflösung dieser Aufgabe richtet sich, so wie jene der Dreiecke (§. 109), nach den Bedingungen, die durch die Lokalumstände gegeben sind; und da man auch hier aus der ähnlichen Figur auf ihre natürliche Größe schließen will, so muß wieder die Länge wenigstens einer der Seiten entweder durch direkte Messung oder auf irgend eine andere Art gegeben sein.

Die wesentlichsten Fälle, ein ähnliches Viereck zu konstruiren, sind folgende:

1. **Fall.** Wenn die Endpunkte der gemessenen Linie AB des Viereckes ABCD, Fig. 129, auch als Standpunkte benützt werden können, von welchen man also die übrigen drei Signale sieht.



Auflösung. Wird die gemessene Länge im verjüngten Maßstabe auf das Tischblatt aufgetragen, so erhält man die ab; hierauf stellt man den Meßtisch in A horizontal, a mit A in dieselbe Vertikale, orientirt

ihn mittelst ab nach AB, und zieht die Rayons von a nach C, von a nach D, diese sind ac', ad'.

Nun läßt man in A ein Signal aufstellen, stellt den Meßtisch in B, b genau über B, ba nach BA orientirt; und visirt von b aus wieder nach C und D, durchschneidet die Rayons ac' in c, ad' in d, piquirt und ringelt diese zwei Punkte, so ist durch die Verbindung der Punkte das erhaltene Viereck abcd mit ABCD ähnlich.

Denn die Dreiecke acb, ACB sind ähnlich, weil sie zwei Winkel wechselweise gleich haben, daher ist

$$ab : AB = cb : CB \; . \; . \; . \; . \; . \; \alpha).$$

Aus demselben Grunde sind abd und ABD ähnlich, daher

$$ab : AB = bd : BD \; . \; . \; . \; . \; . \; \beta).$$

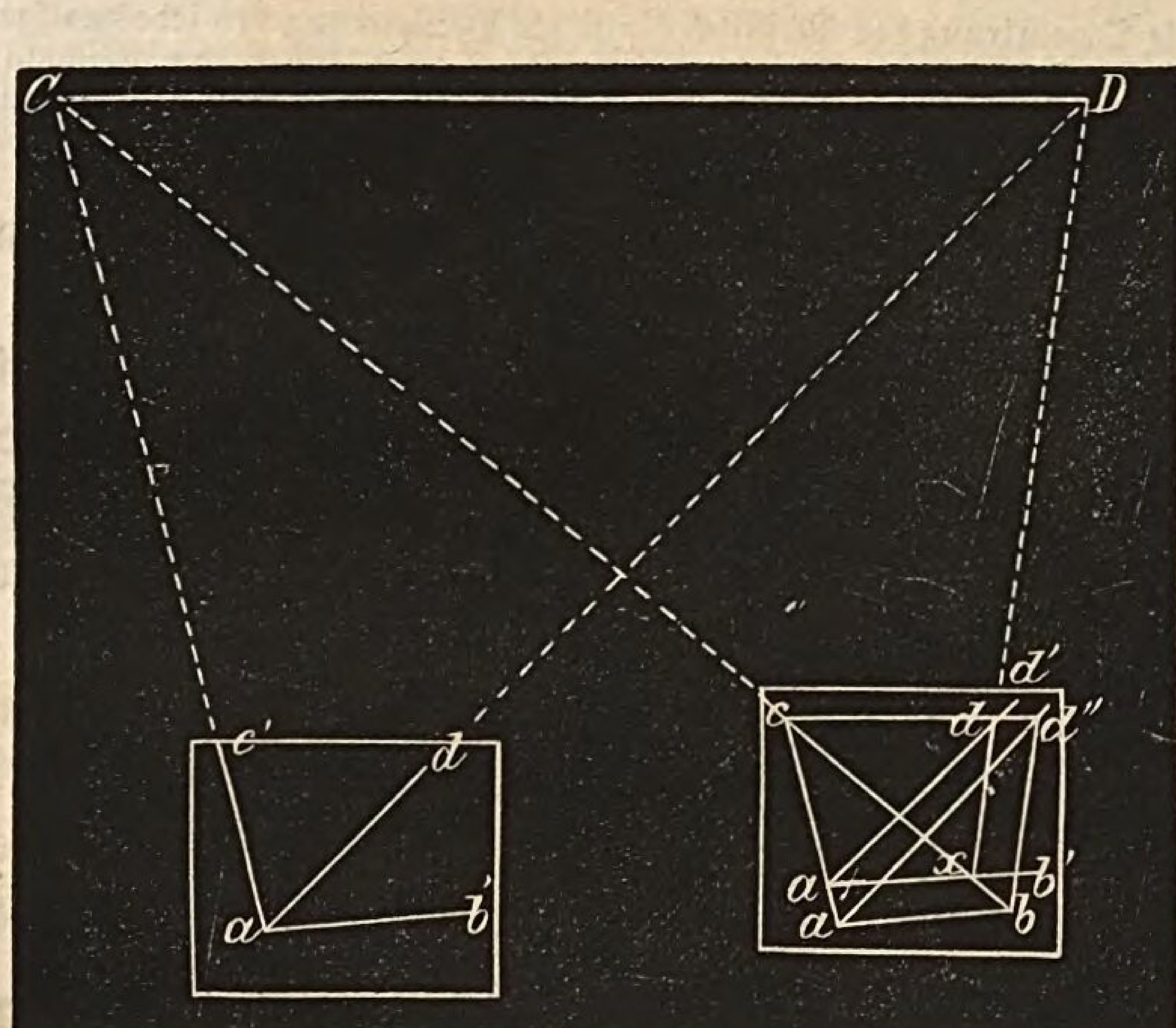
Aus α) und β) folgt cb : CB = bd : BD, und weil der Winkel cbd = CBD ist, so sind auch die Dreiecke cbd, CBD ähnlich; daher

$$ab : ac : bd : cd = AB : AC : BD : CD;$$

ferner ist leicht nachgewiesen, daß die Winkel der beiden Vierecke wechselweise gleich sind, daher beide ähnlich.

Zusatz. Aus der Aehnlichkeit beider Polygone folgt, daß, so lange der Meßtisch in B orientirt bleibt, cd mit CD parallel ist.

2. Fall. Es sei das gegebene Viereck ABCD, Fig. 130, der Art, daß man CD messen, A und B aber als Standpunkte benützen kann.



Auflösung. In diesem Falle stelle man den Meßtisch, ohne die gemessene Linie CD auf das Tischblatt aufgetragen zu haben, in A horizontal, und visire von dem mit A in einer Vertikalen liegenden Punkte a nach C, D und B, wodurch man die Rayons ac', ad' und ab' auf das Blatt erhält; hierauf läßt man in A das Signal aufstellen und geht mit dem Meßtisch nach B.

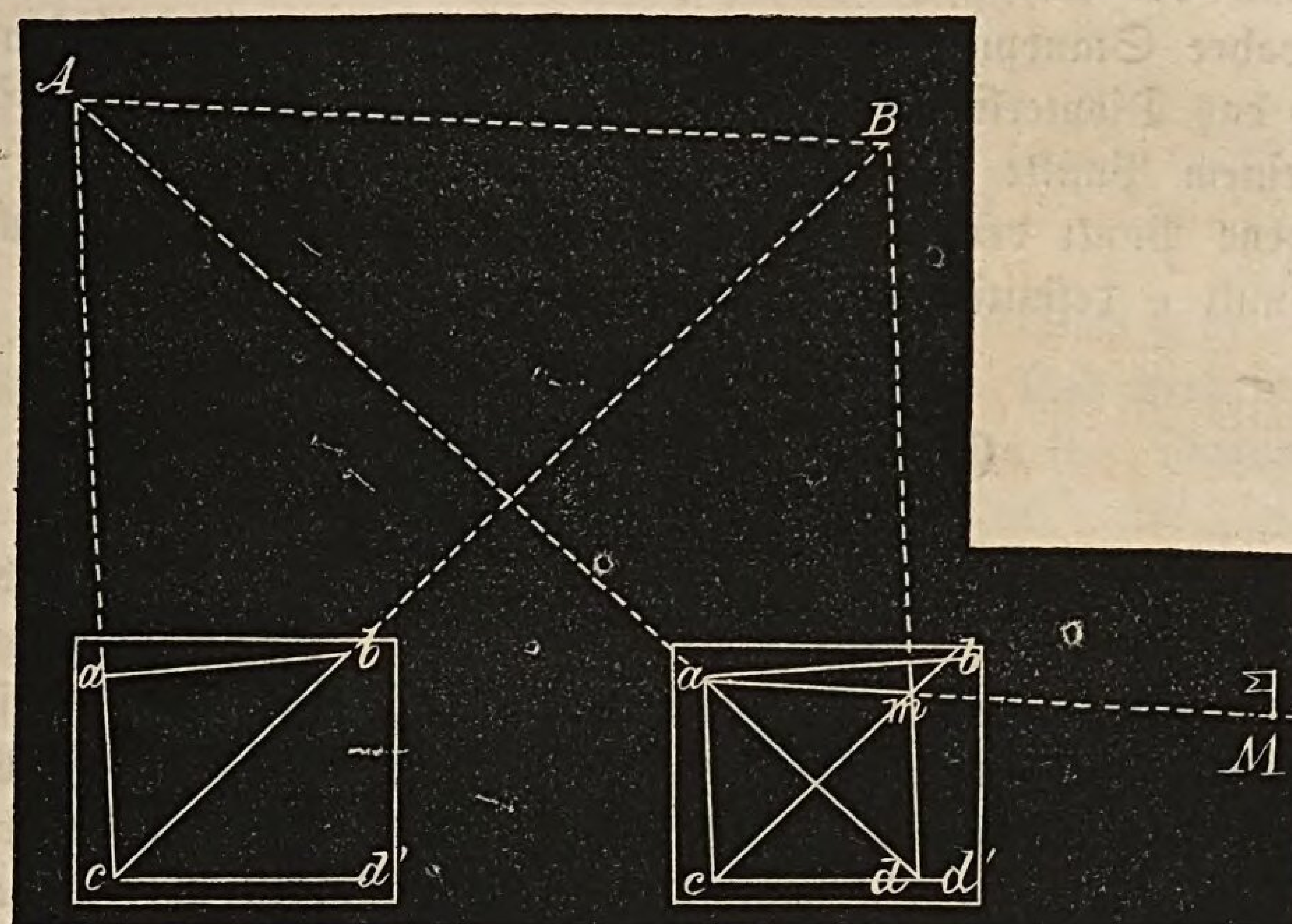
Hier wählt man nun in der Linie ab' nach dem Augenmaße einen Punkt x, stellt diesen über B, orientirt den Meßtisch mit xa nach BA und visirt von x nach C und D, durchschneidet jedesmal die nach demselben Punkte von a gezogenen Rayons und erhält auf diese Art das Viereck acdx, welches nach dem Vorhergehenden mit ABCD ähnlich ist.

Nun erst trage man auf der Linie cd die gemessene Länge der CD im verjüngten Maßstabe auf, diese sei z. B. cd''; von d'' ziehe man eine Parallele d'' b mit dx und durchschneide sie durch die verlängerte Linie cx, so erhält man als den dritten Punkt des Viereckes, von b aus ziehe man ba' parallel

mit ax; wo diese von ca geschnitten wird, ist der vierte Punkt, somit a′cd″b das mit ABCD ähnliche Viereck, bei welchem die cd″ die verlangte Länge hat.

Zieht man a′d″, so ist diese Linie mit ad parallel; und stellt man b über B, so kann der Meßtisch mit jeder der Linie bc, bd″, ba′ orientirt werden.

§. 118. Aufgabe. Den Meßtisch zu orientiren, wenn auf demselben die Punkte a und b, Fig. 131, gegeben sind, jedoch



keiner der entsprechenden durch Signale bezeichneten Punkte A oder B und auch kein Punkt, der durch A, B bestimmten Linie als Standpunkt gewählt werden kann.

Auflösung. Man wähle vorläufig einen Punkt C von der Art, daß man von diesem A und B sehen kann, stelle daselbst den Meßtisch, nachdem ab mit AB nach dem Augenmaße parallel gelegt worden ist, horizontal und fest. Ist dies geschehen, so legt man das Diopterlineal an a, und visirt von diesem Punkte nach A, ebenso von b nach B, so werden sich die gezogenen Rayons in einem Punkte c schneiden. Von diesem Punkte visirt man einen andern Punkt D, der so gewählt werden muß, daß A, B, C sichtbar sind, und daß sich c*D* entweder mit Ac oder Bc nahe rechtwinklig durchschneidet, und zieht den Rayon cd′; endlich bestimmt man mittelst der Lothgabel definitiv den Punkt C, welcher mit c in einer vertikalen Linie liegt.

Nun läßt man in C eine Fahnenstange aufstellen, läßt den Meßtisch nach D tragen und stellt ihn daselbst so auf, daß ein willkürlich gewählter Punkt der Linie cd′ z. B. d′ genau über D zu stehen kommt, orientirt den Meßtisch mittelst cd′ nach CD, und stellt denselben horizontal; nach diesen wird von a wieder nach A visirt, und die Visur cd′ im Punkte d geschnitten, von diesem aber, ohne auf ab Rücksicht zu nehmen, B anvisirt und dann die von c nach demselben Punkte gezogene Visur cb in einem Punkte m geschnitten. Verbindet man a mit m, so folgt aus der Konstruktion, daß am mit AB parallel ist.

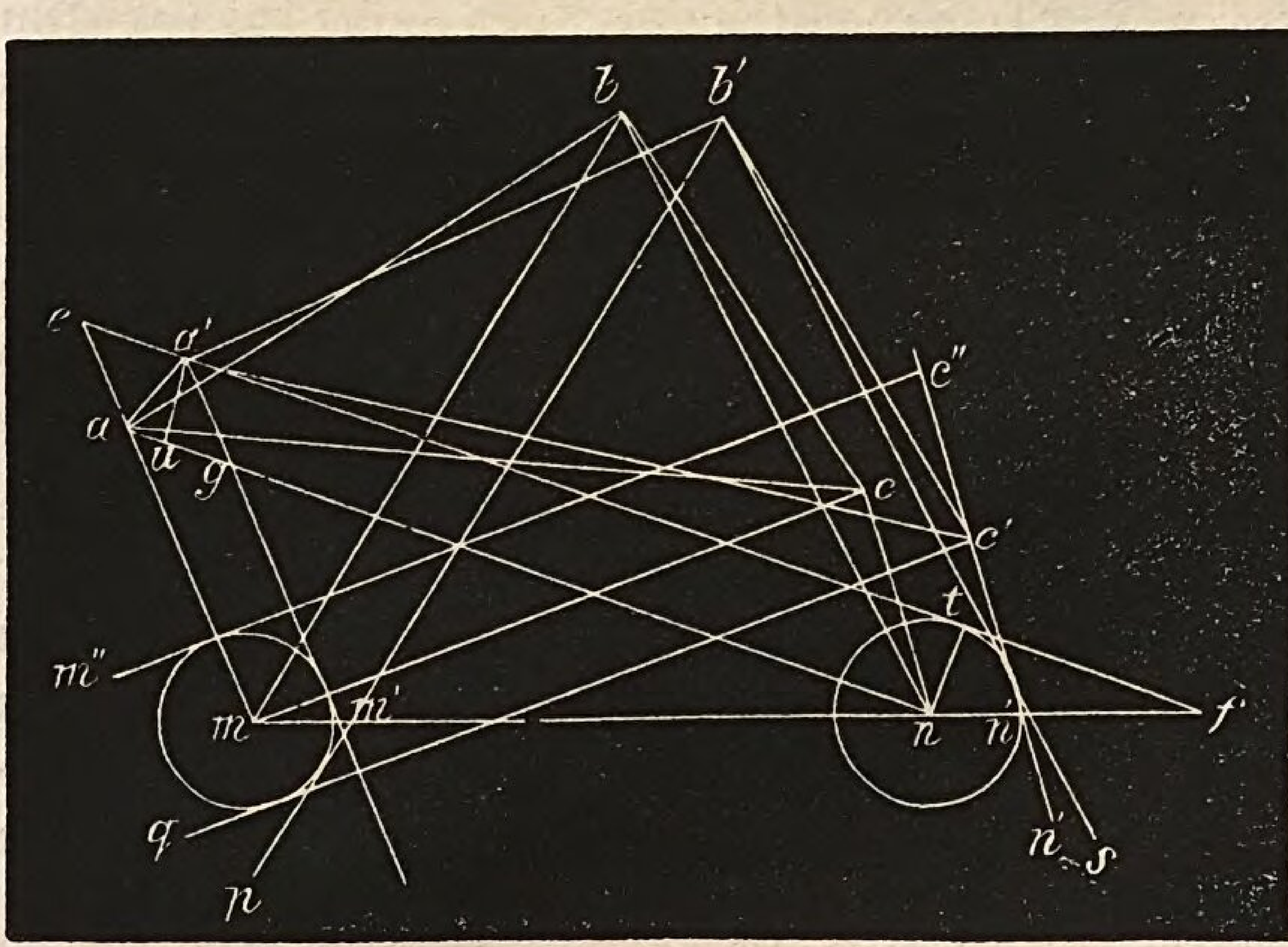
Um aber zufolge der Aufgabe ab mit AB parallel zu stellen, legt man das Diopterlineal an am, und läßt in der Visirebene so weit als möglich einen Stab M aufstellen, bestimmt noch den mit a in einer Vertikalen liegenden Punkt auf dem Boden und dreht das Tischblatt so, daß a auf seinem Orte bleibt, die ab aber in die Linie aM kommt, zu welchem Zwecke das Diopterlineal an die ab gelegt wird, so ist die Aufgabe gelöst.

Da nun der Meßtisch orientirt, also ab mit AB parallel ist, so ist leicht der wahre Standpunkt durch das Rückwärtsabschneiden bestimmt, man legt nämlich das Diopterlineal an a, sodann an b, zieht jedesmal die Rayons, die sich in einem Punkte schneiden, projicirt diesen auf den Boden, so ist der letzte gefundene Punkt der Standpunkt, auch unterliegt es keiner Schwierigkeit, noch den Punkt c definitiv zu bestimmen.

Gebrauch der Anschlagnadel.

§. 119. Sehr häufig kommt der Fall vor, daß aus demselben Punkte des Tischblattes mehrere Rayons zu ziehen sind. Zur Beschleunigung der Arbeit wird dann in diesem Punkte eine feine Nähnadel (sogenannte Anschlagnadel) vertikal eingesteckt und das Diopterlineal jedesmal an jene angelegt; damit aber durch eine Anschlagnadel die Genauigkeit der Vermessung nicht bedeutend leide (§. 80), müssen nur die feinsten stählernen Nadeln hierzu gewählt und das Diopterlineal, sowohl beim Rayonniren als Schneiden an derselben Seite der Anschlagnadel angelegt werden; und damit die Nadel während dem Visiren nicht verbogen oder gar abgebrochen werde, muß man bei jeder noch so kleinen drehenden Bewegung des Diopterlineals, dieses entweder von sich oder zu sich schieben, ohne es aber von der Anschlagnadel zu rücken.

Wählt man eine noch so dünne Anschlagnadel, so ist dennoch ein kleiner Fehler in der Vermessung unvermeidlich, hat man z. B. Fig. 132 von der Standlinie mn ohne Anschlagnadel durch das Vorwärtsvisiren die Punkte a, b, c bestimmt und dadurch das Dreieck abc erhalten, so werden bei der Anwendung der durch die Kreise angezeigten Anschlagnadel, die nun gezogenen Visuren a'm', b'p, c'q mit am, bm, cm, so auch a'f, b's, c'n' mit an, bn, cn als parallel betrachtet werden können, das mit Hülfe der Anschlagnadel bestimmte Dreieck a'b'c' aber, wird mit abc weder eine parallele Lage haben, noch kongruent sein.



Setzen wir den Halbmesser der Nadel = r, die Länge der Standlinie mn = m'n' = d, die Winkel amn = α, anm = β, so folgt aus dem Dreiecke amn, am = $\frac{d \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$, aus dem Dreiecke a'm'f, am' = $\frac{(d + n'f) \sin. \beta'}{\sin. (a + \beta)}$ daher wenn a'm' — am = x gesetzt, wird x = $\frac{n'f \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$, aber n'f = nf — nn', und weil a'f eine Tangente zu dem Kreise, somit bei t ein rechter Winkel ist, so ist nf = $\frac{r}{\sin. \beta}$, nn' = r, daher

$$x = \frac{r\,(1 - \sin. \beta)}{\sin. (\alpha + \beta)} \; .\;.\;.\;.\; 1).$$

Aus diesem Ausdrucke sehen wir, daß der Unterschied a'm — am = x von der Länge der Standlinie (mn) unabhängig ist und Null werden kann, wenn $\beta = 90^0$ wird, ferner, daß der Fehler bei demselben r sein Maximum erreicht, wenn $\beta = 0$ und $\alpha = 0$, oder $\beta = 0$ und $\alpha = 180^0$ wird, in jedem Falle also desto größer ausfällt, je näher der Punkt an der Standlinie liegt.

Ferner ist aa' der in der Bestimmung der Lage des Punktes a begangene Fehler. Der Figur zu Folge ist der Winkel eag = $\alpha + \beta$, und eaga' ein Parallelogram in welchem, wie leicht nachgewiesen werden kann, alle Seiten gleich sind, daher a'ag = $\frac{\alpha + \beta}{2}$; wird noch a'u senkrecht auf an gezogen, so ist a'u = r, somit aa' = y gesetzt

$$y = \frac{r}{\left(\sin. \frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \; .\;.\;.\;.\; 2).$$

Auch dieser Fehler ist von der Länge der Standlinie unabhängig und sein kleinster Werth = r, wenn $\alpha + \beta = 180^0$ wird; dagegen fällt der Fehler desto größer aus, je mehr sich die Summe $\alpha + \beta$ 180^0 oder der Null nähert, also je spitzer beide Winkel werden.

Daher wird sowohl x als y ein Minimum, wenn α und β rechte Winkel sind, d. h. wenn sich die Visuren erst in einer unendlich großen Distanz schneiden; der erste Fehler wird Null, der zweite beträgt die halbe Dicke der Nadel.

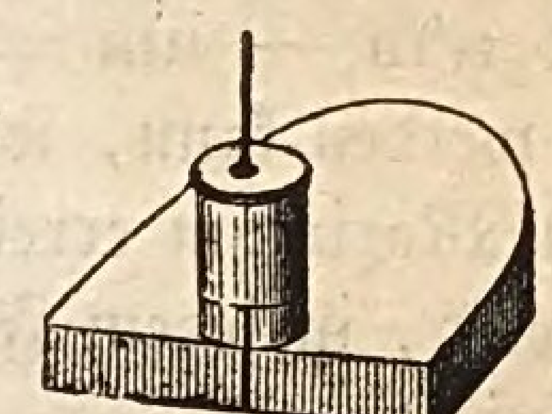
Läßt man r = 0·0075 Zoll, $\alpha = 20^0$, $\beta = 10^0$ bedeuten, so ist x = 0·014 und y = 0·029 Zoll, somit bei dem verjüngten Maßstabe, wo der Zoll 40 Klafter vorstellt, x = 0·56, y = 1·16 Klafter; wird der Werth von r beibehalten, $\alpha = \beta = 60^0$ angenommen, so ist x = 0·0012 und y = 0·0087 Zoll, daher bei dem obigen Maßstabe x = 0·048, y = 0·358 Klafter.

Durch das Anlegen des Diopterlineals an die rechte Seite der Anschlagnadel hat man z. B. c' erhalten, hätte man aber in dem Standpunkte m das Diopter einmal links, also bei n" in dem Standpunkte n aber immer rechts angelegt, so hätte man als Durchschnittspunkt c" erhalten, somit einen bedeutenden Fehler in der Bestimmung des Dreieckes begangen.

Soll daher der Meßtisch orientirt, oder überhaupt ein Punkt scharf bestimmt werden, so darf man keine Anschlagnadel gebrauchen.

Da dieselbe in dem Scheitel der zu konstruirenden Winkel so fest eingestochen werden muß, daß sie, ohne mit den Fingern gehalten zu werden, durch die kleine Reibung des Lineals nicht umfällt, so gibt man den zu diesem Zwecke gewählten Nadeln am Ohr einen kleinen Knopf aus Siegellack, man erhitzt nämlich das Ohr, bis es roth glüht, und bringt ein kleines Stückchen Siegellack daran, welches man, so lange es noch weich ist, rundet; oder, was besser ist, man biegt die Nadel, so lange sie noch roth glüht, am Ohre bis auf etwa 4 Linien spiralförmig und verklebt diese Windungen mit Siegellack.

Da aber durch das Erhitzen die Nadel an ihrer Härte verliert, so ist es besser sie in kleine $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll lange und etwa 3 Linien dicke Stücke Holz zu fassen, aus welchem die Nadel nur 2 bis 3 Linien heraus steht.



Manche Geometer bedienen sich bei der Anschlagnadel der in der Fig. 133 in natürlicher Größe dargestellten Vorrichtung, welche aus Messing, unten aber mit Elfenbein belegt ist; auch in diesem Falle wird die Anschlagnadel nicht gehalten, sondern diese Fassung durch das Drehen des Diopterlineals selbst nach Erforderniß gewendet.

Anmerkung. Routinirte Geometer führen das Diopterlineal mit der einen Hand, während sie in der andern den zur Zeichnung der Visuren erforderlichen Bleistift halten, und da man heut zu Tage fast nur Perspektivlineale zum Visiren anwendet, so ist der Arm P, wie er bei dem Perspektivlineale von Kraft gezeichnet ist, wo man mit der einen Hand das Diopter schieben und das Fernrohr heben oder senken kann, sehr praktisch.

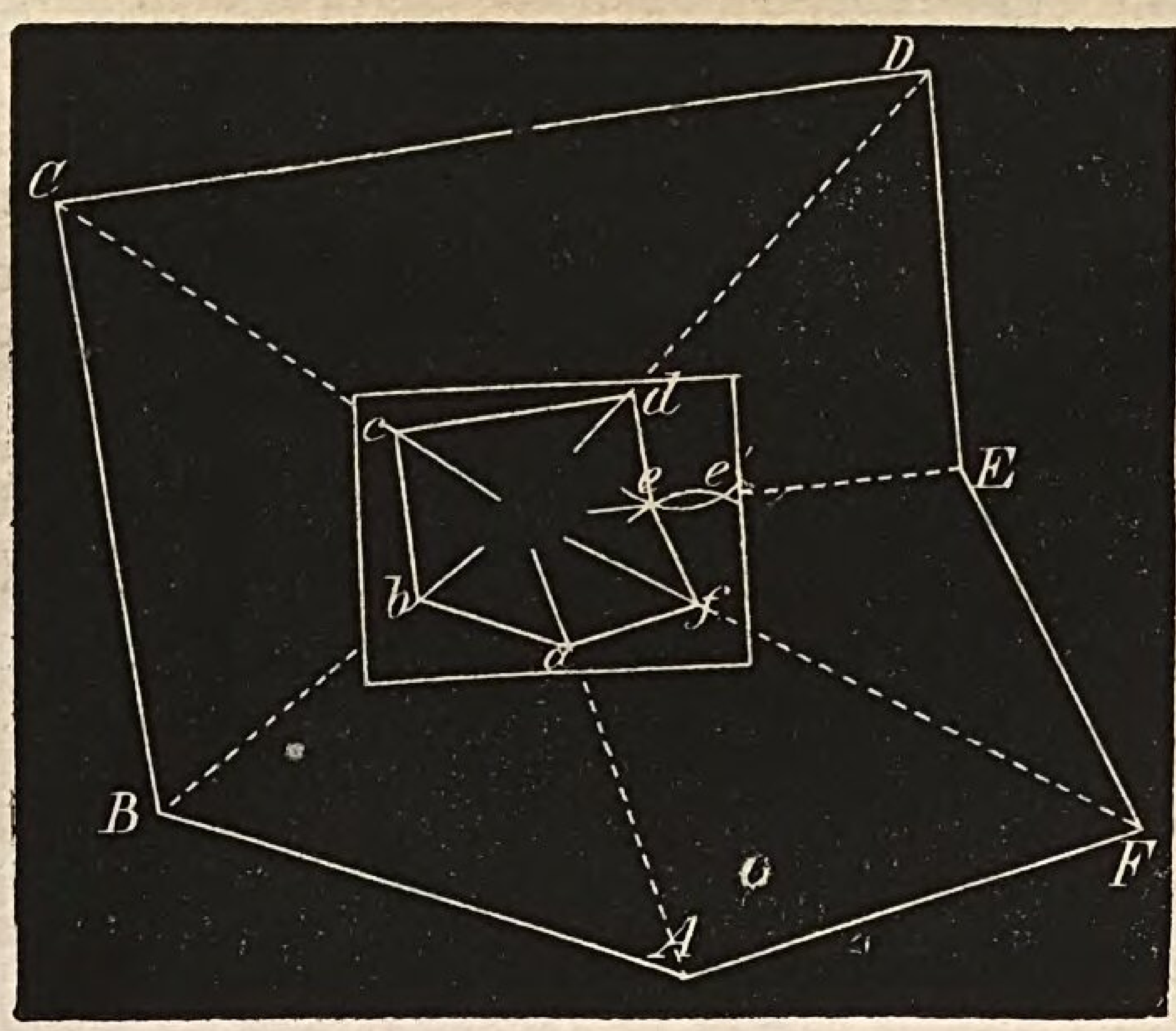
Anfänger jedoch werden besser thun, mit der einen Hand das Okulardiopter, mit der andern das Lineal etwa einen Zoll oberhalb der Anschlagnadel zu halten.

Einzelne Polygone mittelst des Meßtisches aufzunehmen.

§. 120. Die horizontale Projektion der auf der Erdoberfläche gegebenen Polygone im verjüngten Maßstabe mit Hilfe des Meßtisches zu konstruiren, nennt man in der praktischen Geometrie aufnehmen und die konstruirten Polygone selbst die Aufnahme.

Aufgabe. Ein Polygon aus einem innerhalb desselben angenommenen Standpunkte aufzunehmen.

Auflösung. Es sei ABC . . . F, Fig. 134, das aufzunehmende Polygon, so wird vorerst von demselben eine möglichst genaue Skizze entworfen, wobei man die Winkel nach dem Augenmaße zeichnet, die Länge der Seiten durch Abschreiten bestimmt, und sodann nach einem für das Brouillon gewählten verjüngten Maßstabe auf den entsprechenden Schenkel aufträgt.



Es ist jedoch besser, bei allen Aufnahmen den anfänglichen Entwurf mit der künftigen Aufnahme im gleichen Maßstabe

zu verfassen, weil man dann sehr leicht beurtheilen kann, wo ein oder der andere Punkt auf dem Tischblatte anzunehmen sei, damit das ganze Polygon auf ein Tischblatt falle, und ob dies überhaupt möglich wird.

Unter einem mit der Anfertigung der Skizze wird in jedem Scheitel des Polygons ein nummerirter Pflock eingeschlagen (das Polygon ausgepflockt) und bei der Handskizze in dem Scheitel des Winkels die betreffende Nummer geschrieben; zur leichtern Uebersicht müssen die Zahlen der Pflöcke nach einer bestimmten Richtung aufeinander folgen.

Nach dieser Vorbereitung wird bei dieser Auflösung innerhalb des Polygons ein wo möglich von allen Ecken gleich weit entfernter Punkt als Standpunkt so angenommen, daß von diesem alle übrigen Ecken sichtbar sind, und daselbst ein nicht nummerirter Pflock geschlagen; ein mit Rücksicht auf das Brouillon zweckmäßig angenommener Punkt des Tischblattes vertikal über den Standpunkt, der Tisch selbst aber horizontal gestellt, endlich in dem gewählten Punkte die Anschlagnadel eingesetzt.

Nun geht ein Handlanger mit einer Fahnenstange zu dem ersten Pflocke, stellt dieselbe neben dem Pflocke auf, der Geometer visirt diese an, zieht den Rayon und schreibt neben denselben die Nummer des anvisirten Pflockes. Ist das geschehen, so geht der Handlanger auf ein verabredetes Zeichen zum nächsten Pflocke und dieselbe Operation wird wiederholt.

Nachdem alle Pflöcke anvisirt, die gehörigen Rayons gezogen und bezeichnet sind, werden die Entfernungen der Ecken vom Standpunkte mit der Kette gemessen, die gefundenen Längen auf die entsprechenden Visuren in einem angenommenen verjüngten Maßstabe aufgetragen, die so erhaltenen Punkte verbunden, und die Aufnahme ist beendet.

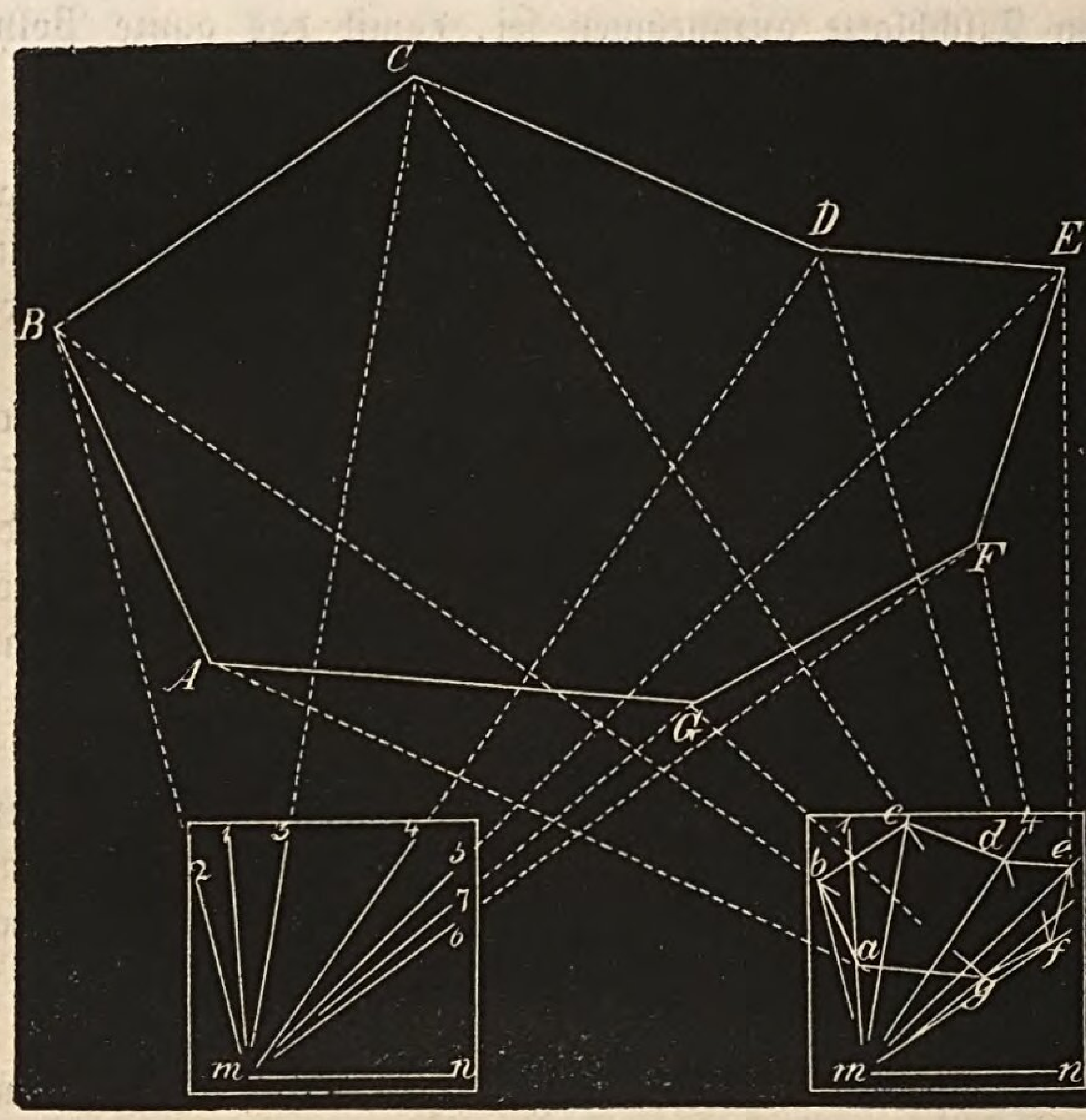
Zusatz. Sollte man die eine oder die andere Visur, z. B. die nach E nicht ziehen können, so kann man die Seite DE und EF nebst den übrigen Stücken messen, und nachdem die Punkte d und f auf dem Tischblatte bestimmt worden sind, von d mit dem verjüngten Maße DE einen Bogen beschreiben, diesen von f aus mit der Seite EF durchschneiden. Nur muß man wissen, ob der Winkel DEF konvex oder konkav ist, denn diese Kreise schneiden sich in zwei Punkten e und e′, es muß also irgend ein Kennzeichen vorhanden sein, welcher der wahre Durchschnitt ist.

§. 121. Ein Polygon von zwei Standpunkten, also aus einer gemessenen Standlinie aufzunehmen.

Auflösung. Zuerst wird von dem aufzunehmenden Polygon, wie bei der vorigen Auflösung eine Handskizze entworfen und dasselbe ausgepflockt; hierauf wird eine Standlinie entweder innerhalb oder außerhalb des Polygons angenommen, durch Pflöcke bezeichnet, wobei von den Standpunkten alle Ecken als sichtbar vorausgesetzt werden, endlich die Standlinie gemessen und im verjüngten Maße auf das Tischblatt nach der Angabe des Brouillons aufgetragen.

Stellt uns Fig. 135 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) mn die aufgetragene Standlinie vor, und benennen wir die Standpunkte mit M, N, so wird m über M gestellt, der Tisch mittelst mn nach N orientirt, und sodann horizontal und fest gestellt; in m eine Anschlagnadel eingestochen und von da aus nach allen Ecken des Polygons die Rayons gezogen und mit fortlaufenden, mit den Pflöcken korrespondirenden Nummern bezeichnet.

Fig. 135.



Von diesem Standpunkte geht man nach N, läßt aber vorher in M eine Fahne stellen, in N aber stellt man n über diesen Standpunkt, orientirt den Tisch mittelst mn nach M, gibt in n die Anschlagnadel und visirt wieder vom ersten Pflocke angefangen alle Ecken an, durchschneidet und piquirt die entsprechenden Rayons, und schreibt zu den definitiv bestimmten Punkten die entsprechenden Zahlen der Pflöcke. Verbindet man endlich diese Punkte, wobei das Brouillon zur Hand sein muß, so hat man das verlangte Polygon.

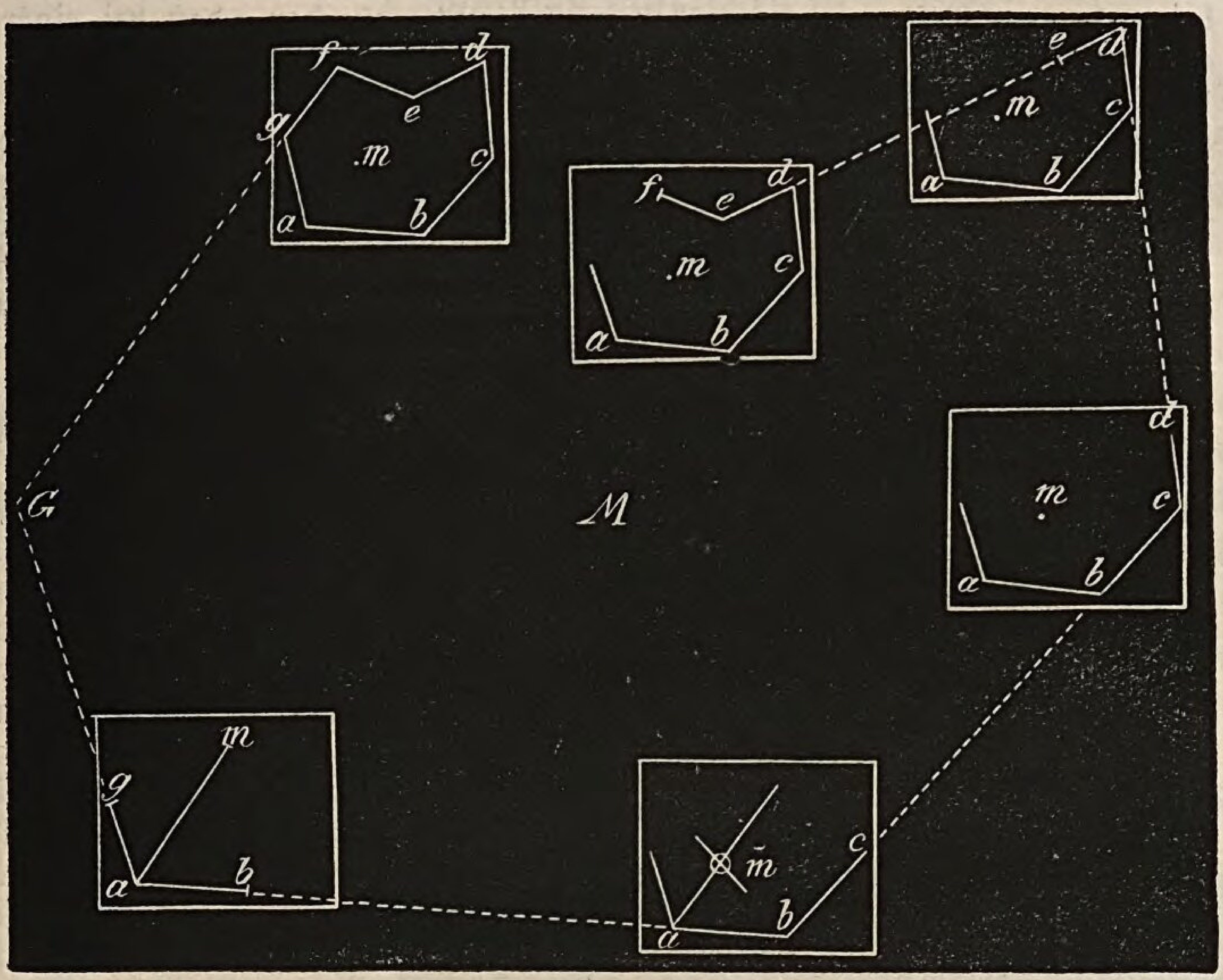
Hinsichtlich der Wahl der Standlinie ist zu bemerken: diese muß so gewählt sein, daß die Durchschnittslinien, welche einen Punkt auf dem Tischblatte bestimmen, sich unter keinem spitzigeren Winkel als 30° und keinen stumpfern als 150° schneiden; auch ist es vortheilhafter, die Standlinie außerhalb als innerhalb des Polygons anzunehmen, weil im ersten Falle, wenn die Standlinie in ziemlicher Entfernung von dem Polygone ist, von den übrigen bedeutenden Vortheilen abgesehen, alle Rayons nahe dieselbe Richtung erhalten, somit alle aus einem zweiten Standpunkte gute Schnitte erhalten können.

Haben einige Punkte untaugliche Schnitte erhalten, so müssen diese durch Messung der Seiten, oder besser der Entfernungen von einem der Standorte, oder durch Schnitte von einem dritten Standpunkte bestimmt werden.

§. 122. Aufgabe. Ein Polygon nach dem Umfange aufnehmen (Stationiren).

Auflösung. Die Art der Meßoperation ist in der Fig. 136 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) dargestellt, wobei die auf der Erdfläche liegenden Punkte mit den großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, zu verstehen sind.

Fig. 136.



Nachdem nämlich das ganze Polygon ausgepflockt ist, wird das Brouillon auf das Tischblatt gelegt und untersucht, welche Lage desselben die vortheilhafteste ist, nach Ausmittlung derselben die Richtung einer Seite, z. B. der ab durch kurze, am Rande des Tisches gezogenen Striche, und der Ort eines dieser Punkte z. B. a bemerkt. Nun stellt man den Meßtisch über A auf, orientirt denselben provisorisch mittelst der ab nach AB, stellt sodann a über A genau vertikal, das Tischblatt horizontal und fest und orientirt den Meßtisch definitiv nach den eben genannten Punkten. Von a visirt man nach B und G, zieht die Rayons, läßt die Länge der Seiten AB und AG messen, trägt diese Längen in dem angenommenen Maße auf die entsprechenden Visuren und erhält somit die Punkte g, a und b auf das Tischblatt. Hierauf stellt man den Meßtisch in B auf, b über B, orientirt denselben mittelst ba nach der in A gestellten Fahnenstange, und visirt wieder von b auf die Fahne in C, zieht den Rayon, trägt auf denselben das Maß der gemessenen Seite BC, und bestimmt auf diese Art den Punkt c.

So verfährt man bei jedem folgenden Standpunkte, bis man auf F kommt, wird hier der Meßtisch aufgestellt, nach E orientirt, so muß, wenn fehlerfrei gearbeitet worden ist, die von f nach G gezogene Visur durch den bereits bestimmten Punkt g gehen, auch die gemessene Seite FG im verjüngten Maßstabe der Linie fg gleich sein, somit das Polygon sich schließen.

Zusatz 1. Bei der Aufnahme eines Polygons nach dem Umfange ist auf die centrische Aufstellung des Meßtisches die größte Aufmerksamkeit zu richten, und dann um so mehr, wenn die Seiten des Polygons ungleich sind, denn wie bei der Untersuchung des Fehlers wegen der excentrischen Aufstellung gezeigt wurde, leidet durch diese die Orientirung des Meßtisches bedeutend, wodurch am Ende der Operation das Polygon nicht geschlossen ist.

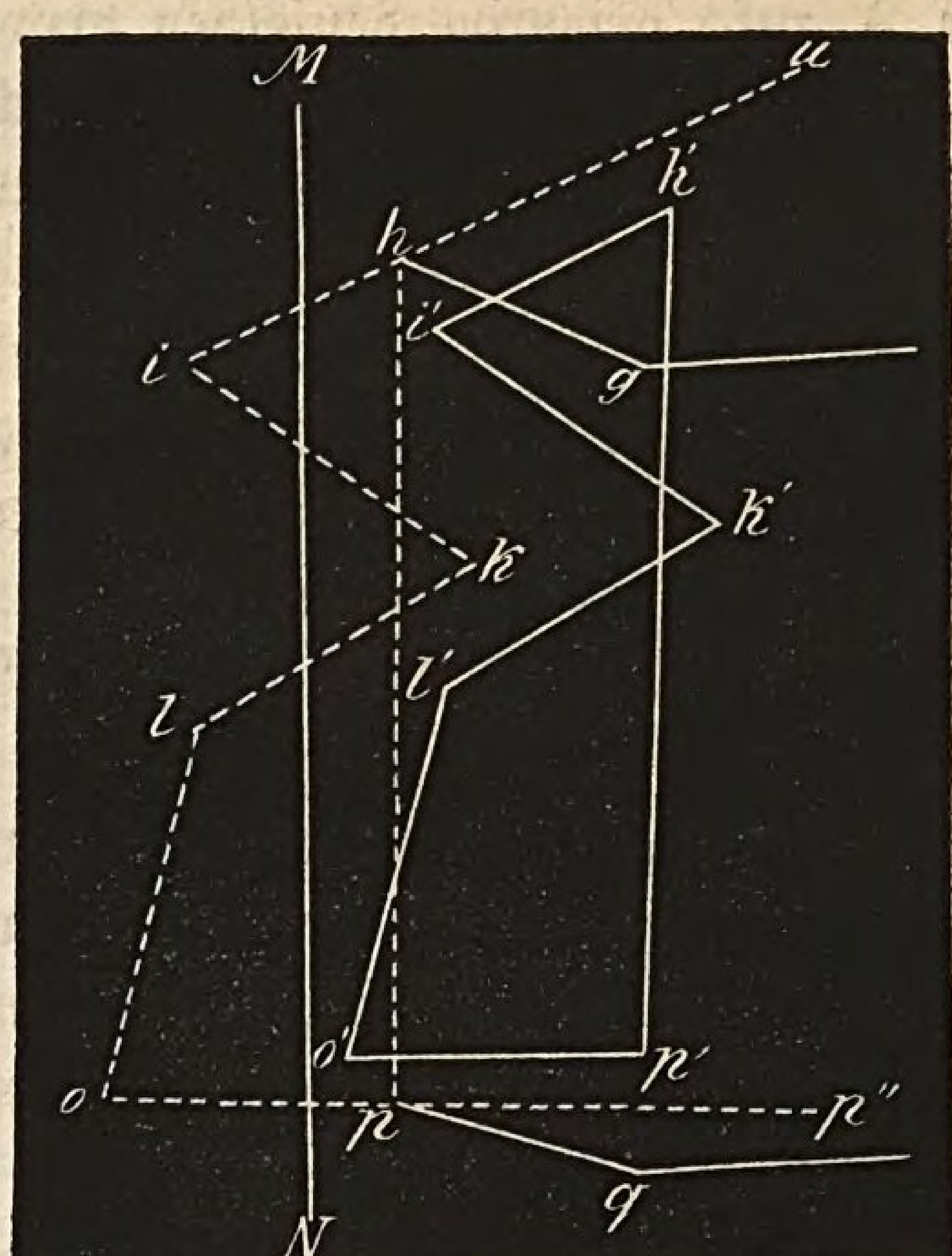
Die Praktiker behaupten, die Aufnahme nach dem Umfange sei sehr ungenau, ohne den Grund angeben zu können, ich habe dieselbe in den eben verflossenen Jahren bei mehreren Messungen anwenden müssen und gefunden, daß bei einer genau centrischen Aufstellung des Tisches und einer aufmerksamen Messung der Seiten der Fehler im Ganzen sehr gering ausfällt.

Zusatz 2. Da man ungeachtet aller Vorsicht die kleinen unvermeidlichen Fehler nicht beseitigen kann, welche, wenn sie sich anhäufen, auf die Genauigkeit der Aufnahme doch merklich einwirken, so nehme man deshalb die eine Hälfte des Polygons von dem ersten Standpunkte nach rechts, die andere nach links auf, hierdurch werden die unvermeidlichen Fehler nach beiden Seiten gleich vertheilt, somit einen bedeutend kleinern Einfluß auf das Resultat ausüben.

Zusatz 3. Bei dem Auspflocken des Polygons ist es nicht nöthig, jede kleinste Krümmung zu berücksichtigen, man gewinnt an Genauigkeit und erspart an Arbeit, wenn man das aufzunehmende Polygon durch ein zweites von möglichst langen Seiten und wenigern Winkeln wie das aufzunehmende einschließt, sodann die Ecken des letztern mittelst Ordynaten und Abszissen, diese letztern auf den Seiten des äußern Polygons genommen, bestimmt, nur dürfen die Seiten der letzteren nicht unnöthig von dem gegebenen Polygone zu weit entfernt liegen, damit man die Ordynaten nach dem Augenmaße mit hinreichender Genauigkeit errichten kann. Ordynaten von 5 bis 6 Klafter Länge dürften das Maximum sein; auch kann man eine Ordynate wieder als Abszissenlinie benützen.

Zusatz 4. Kann man innerhalb des Polygons einen Punkt M, Fig. 136 (siehe die Zeichnung auf pag. 171), finden, der von mehreren Ecken sichtbar ist, so stelle man in diesem zur Vermeidung einer Irrung ein Zeichen, visire ihn von mehreren Standpunkten an, und nachdem der entsprechende Punkt m auf dem Tischblatte bestimmt ist, so dient dieser entweder zur Kontrolle des bereits ausgeführten Theiles der Messung, oder wenn eine Seite nicht direkt meßbar sein sollte, so kann man ihre Länge von m seitwärts abschneiden.

Zusatz 5. Es ist leicht möglich, daß man bei der Aufnahme nach dem Umfange auf eine Stelle kommt, wo einige Seiten des Polygons über das Tischbrett fallen; in diesem Falle ist nicht nöthig, ein anderes Tischbrett zu nehmen; man kann sich leicht mit demselben Blatte auf folgende Art helfen. Stellt uns MN, Fig. 137, den Rand des Tisches vor, fallen also die Punkte i, l, o über denselben, und ist der Tisch zuletzt in h aufgestellt, nach g orientirt worden, so ziehe man die Visur nach dem nächsten Punkte i und verlängere sie rückwärts gegen u so weit als möglich.



Nun beurtheilt man aus dem Brouillon, wie weit man mit dem Punkte h zurückrücken müsse, um noch die folgenden Punkte auf das Tischblatt zu erhalten; in dieser Distanz vom Rande nimmt man einen Punkt h' an, zieht durch diesen eine mit hu parallele Linie h'i', trägt auf diese die gemessene Seite HJ und setzt auf die oben erklärte Art die ganze Operation fort bis zu dem Punkte p' der gleich ursprünglich auf das Tischblatt gefallen wäre.

Nun zieht man durch h eine mit p' h' parallele Linie hp, trägt auf dieser von h aus hp = h'p' auf, so erhält man p, durch diesen zieht man eine mit p'o' parallele Linie pp'', stellt den Meßtisch p vertikal über P, orientirt ihn mittelst der pp'' nach O, rayonnirt den Punkt Q, und kann jetzt wieder die Vermessung fortsetzen.

Am Ende der Aufnahme wird der Theil h'i'k'l'n'o'p' auf ein anderes Papier übertragen und p'h' an ph angesetzt.

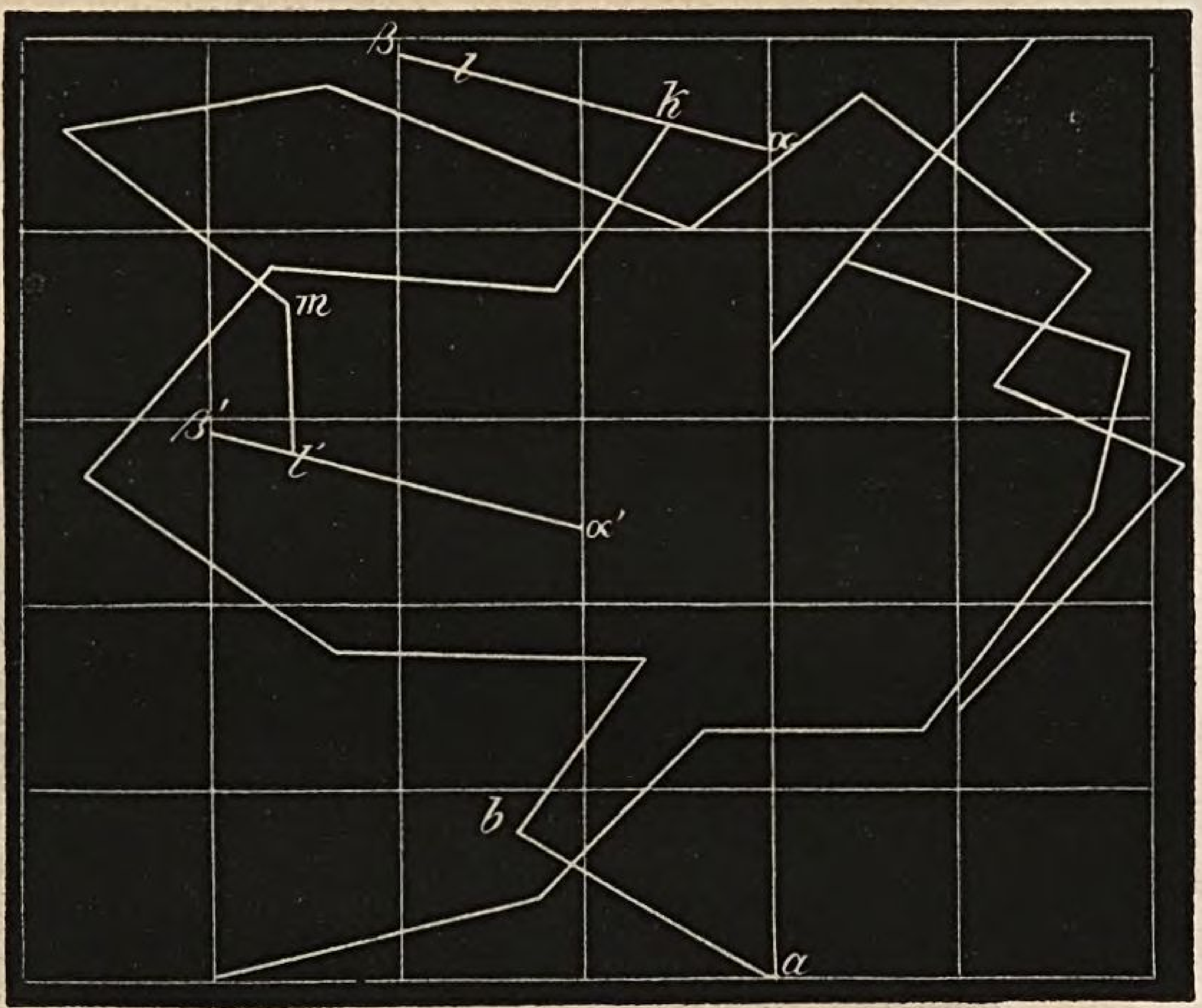
Aufnahme eines Polygons nach dem Umfange, wenn das Tischblatt mit Quadraten überzogen ist.

§. 123. Durch das Uebertragen der Punkte nach dem vorhergehenden Zusatze ist man im Stande, ein Polygon von großem Umfange, und wenn es der Zweck der Messung, eine große Genauigkeit zu erreichen erfordert, in einem bedeutend großen Maßstabe, z. B. 10 Klafter 1 Zoll, aufzunehmen.

In diesem Falle wird auf das Tischblatt ein Netz von Quadraten gezeichnet, jedes ungefähr von der Größe eines Quadratzolles und diese Linien mit Tusch rein ausgezogen. Das betreffende Brouillon kann in einem bedeutend kleineren Maßstabe angefertigt sein, wird aber ebenfalls mit Quadraten überzogen, wo jede Seite das Maß eines Zolles der Aufnahme vorstellt; und da man mit Vortheil die Vermessung von einer Ecke der Quadrate beginnt, so muß im Brouillon ein Eck des Polygons in eine Ecke der Quadrate fallen.

Ist also die Feldskizze darnach angefertigt, und das Polygon zweckmäßig ausgepflockt, so wird der Geometer aus jenem ersehen, von welcher Ecke anzufangen sei, und welche Lage die erste Seite auf dem Tischblatte haben müsse.

Nehmen wir an, in Fig. 138 sei a der erste Standpunkt, und ab die Richtung der ersten Seite, so wird man von a aus die Messung auf die im vorhergehenden Paragraphe angegebene Art bis zu der Ecke l fortsetzen, hier aber, da die Ecke m bereits über das Tischblatt fallen würde, die Seite lk so weit verlängern, bis sie zwei Seiten des Netzes schneidet.



Mittelst diesen Durchschnittspunkten α, β wird man die Seite lk sehr bequem nach Erforderniß, z. B. nach α'β' übertragen, so daß lk mit α'β' parallel bleibt, auf dieser α'l' = αl auftragen, den Punkt l' über den letzten Standpunkt l stellen und den Meßtisch mittelst l'α' nach lk orientiren, den nächsten Punkt m anvisiren, das Maß lm auftragen und so weiter fortfahren.

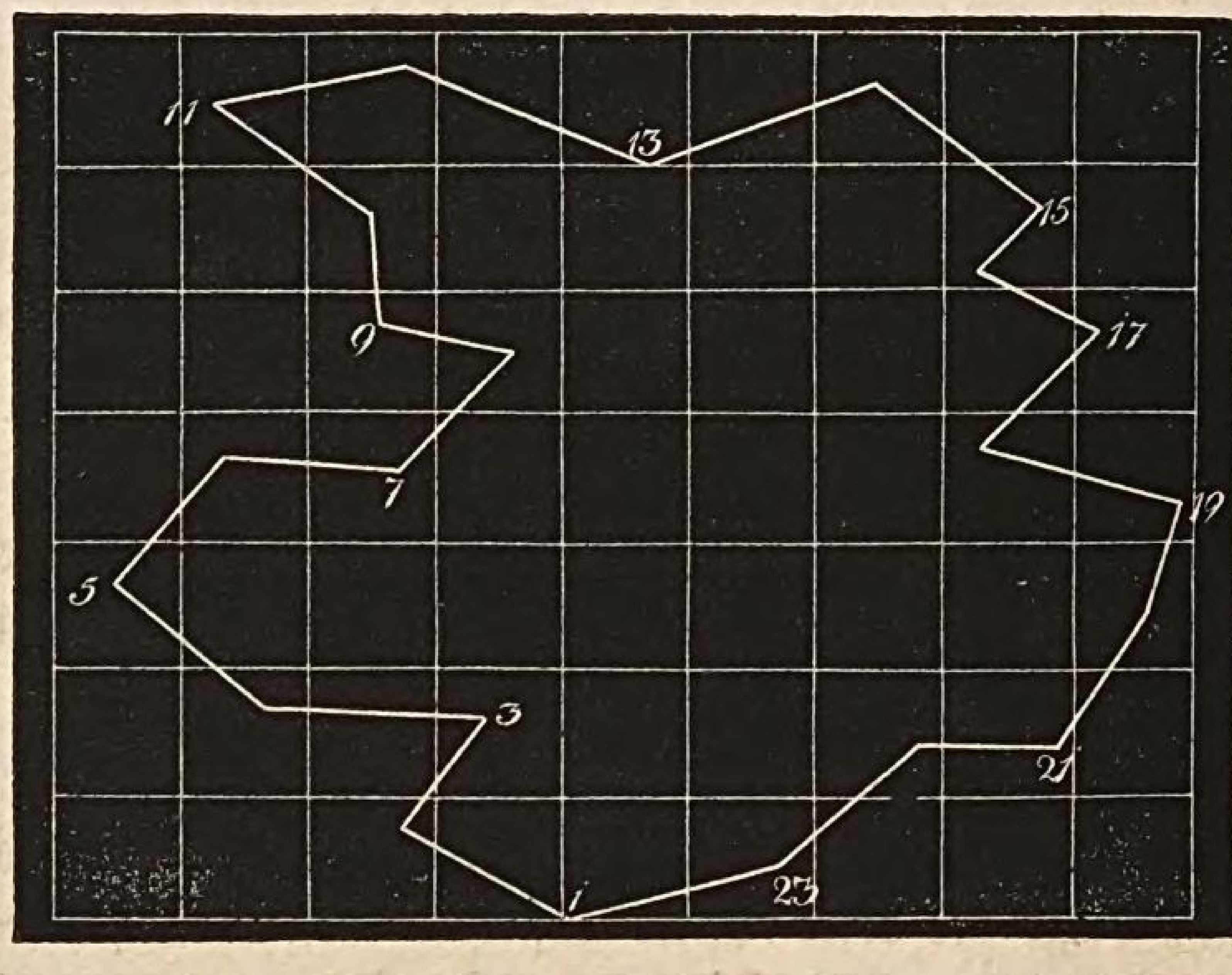
Werden auf diese Art, so oft es nöthig wird, die Punkte übertragen, und die Aufnahme bis wieder zu dem ersten Standpunkte fortgesetzt, so muß dieser, wenn richtig gearbeitet worden ist, abermals in eine Ecke fallen.

Zur Berechnung der Fläche muß jedoch aus den einzelnen Stücken das ganze Polygon zusammengesetzt werden.

Zu diesem Zwecke werden auf einem Bogen Zeichenpapier mit Blei Quadrate gezogen, die entweder mit der Aufnahme von gleicher Größe sind, oder häufiger nur in einem, jedoch bekannten Verhältnisse stehen, die einzelnen Punkte

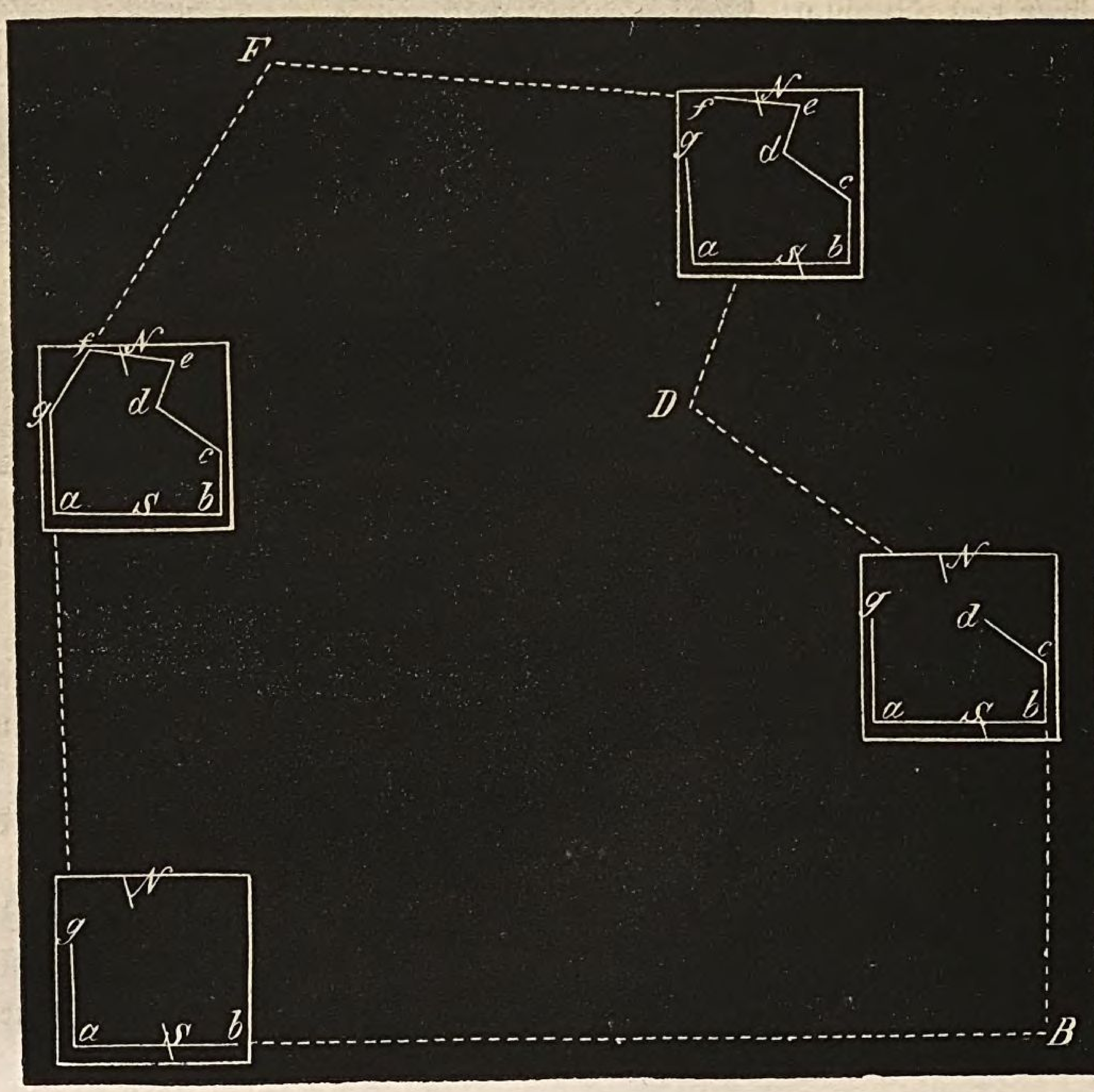
mittelst Abszissen und Ordynaten von der Aufnahme abgenommen und in dem Verhältnisse der Seiten der Quadrate auf die Kopie übertragen.

Das aus den einzelnen Stücken der Fig. 138 (siehe die Zeichnung auf pag. 173) zusammengesetzte Polygon ist in der Fig. 139 dargestellt.



Ein Polygon mit Hülfe der Orientirungs-Boussole nach dem Umfange aufzunehmen.

§. 124. Auflösung. Nachdem die gewöhnlichen Vorarbeiten, als: das Auspflocken, Anfertigung des Brouillons, Bestimmung der Lage des Polygons auf dem Tischblatte, gemacht worden sind, wird der Meßtisch über den ersten Standpunkt A, Fig. 140, so aufgestellt, daß a über A kommt, der Tisch mit-



telst ab (deren Richtung bei der Ausmittlung der Lage des Polygons auf dem Tischblatte bestimmt worden ist) nach AB orientirt und horizontal gestellt.

Von a aus visirt man auf das Signal in G, zieht den Rayon, trägt die gemessenen Seiten AB, AG auf die entsprechenden Visuren und erhält die Punkte a, b, g auf das Tischblatt. Nun wird, so lange Tisch noch in A orientirt steht, die Orientirungs-Boussole ungefähr in die Mitte des Blattes gelegt, die Nadel genau nach Norden und Süden zum Einspielen gebracht, ferner, wenn diese zur Ruhe gekommen ist, das Diopterlineal vorsichtig an das Gehäuse angelegt und seine Richtung bemerkt, diese sei NS.

Von A begibt man sich sogleich nach C, stellt daselbst einen Punkt des Tischblattes über C, von dem man vermuthet, daß daselbst c fallen könnte, legt das Diopterlineal an NS und das Gehäuse der Boussole an dasselbe, wendet bei gelöster Mittelschraube das Tischblatt so, daß die Magnetnadel nahe einspielt, und bringt dieselbe, nachdem das Tischblatt horizontal und fest ist, mittelst der Wendeschraube zum genauen Einspielen.

Da nun der Meßtisch orientirt ist, also ab mit AB eine parallele Lage hat, so wird, wenn man von b nach B visirt, der Winkel abc = ABC sein, wird ferner die gemessene Linie BC im verjüngten Maßstabe von b aus auf dem zuletzt gezogenen Rayon aufgetragen, so erhält man definitiv c. Sollte dieser Punkt bedeutend von C abweichen, so wird man den Pflock C ändern und ihn genau unter c einschlagen. Von c visirt man nach D, trägt die Länge der Seite DC auf diesen Rayon, so ist der Punkt d bestimmt; hierauf geht man mit dem Instrumente nach E und wiederholt daselbst die vorige Operation; hier erhält man e und f auf das Tischblatt und könnte somit durch Verbindung der Punkte f mit g die Aufnahme beendigen, es ist aber zur eigenen Beruhigung nothwendig, entweder noch den Standpunkt in G zu nehmen, und die Gleichheit des Winkels fga mit FGA prüfen, oder die Seite FG messen und diese Länge mit jener, wie sie auf dem Tischblatte erhalten worden ist, vergleichen.

Zusatz 1. Da die örtlichen oder äußeren Umstände unsichtbar auf die Magnetnadel einwirken, so muß man zur Vorsicht die Richtigkeit derselben, etwa nach jedem fünften oder zehnten Standpunkte prüfen. Man stellt nämlich den Meßtisch auf die zuletzt bestimmte Ecke und orientirt denselben zurück ohne der Orientirungsboussole, stellt diese erst nach dem an die Kante des durch NS gelegten Diopterlineals und sieht nach, ob sie genau einspielt. Sollte dies nicht Statt finden, und die Abweichung durch die kleinen unvermeidlichen Fehler nicht entstanden sein, dann ist der fernere Gebrauch der Magnetnadel zu unterlassen.

Daß man bei der Anwendung der Boussole alle Gegenstände aus Eisen von der Magnetnadel entfernt halten müsse, darf nicht erst erinnert werden.

Zusatz 2. Diese Art, ein Polygon zu vermessen, nennt man, weil gewöhnlich jeder zweite Standpunkt übergangen wird, das Aufnehmen mittelst Springständen.

Ein nach dem Umfange aufgenommenes Polygon zum Schlusse zu bringen.

§. 125. Ist ein Polygon auf irgend eine der eben erklärten Arten nach dem Umfange mit noch so großer Aufmerksamkeit aufgenommen worden, so ist es dennoch fast eine Unmöglichkeit, daß sich die kleinen unvermeidlichen Fehler wechselweise tilgen, sondern am Ende bleibt noch, wie die Erfahrung zeigt, ein Ueberschuß der in der ganzen Messung begangenen positiven und negativen Fehler übrig,

dessen Existenz sich dadurch offenbart, daß die Endpunkte des Umfanges nicht über einander fallen, daß also das Polygon nicht geschlossen ist, und dieser Abstand der Punkte wird desto größer sein, mit je mehr ungünstigen Umständen die Messung verbunden war.

Die Praktiker zählen eine Vermessung immer noch zu den guten, wenn bei günstigen Umständen die Entfernung der erwähnten Schlußpunkte nur $\frac{1}{800}$ bis $\frac{1}{600}$ bei ungünstigen Umständen (vielen kurzen Standlinien, wenn über Gräben, Schluchten ꝛc. gemessen wurde) nur $\frac{1}{400}$ bis $\frac{1}{200}$ des ganzen Umfanges betrage.

Da man durch eine Wiederholung derselben Meßoperation wahrscheinlicher Weise auch dasselbe Resultat erhalten würde, so entsteht die Frage: Wenn bei einer Aufnahme der Fehler die obige Gränze nicht überschreitet, auf welche Art ist der Einfluß der kleinen Fehler weg- und das Polygon zum Schließen zu bringen?

Prof. Winkler, der einzige, welcher meines Wissens diesem Umstande eine Aufmerksamkeit gewidmet hat, gibt in seinem Lehrbuche der praktischen Geometrie folgendes, von ihm durch mehrere Versuche als praktisch bewährtes Mittel an.

Man nehme jedes Polygon von dem ersten Standpunkte angefangen nach der einen Seite nur zur Hälfte auf, die Aufnahme der zweiten Hälfte fange man wieder von dem ersten Standpunkte an. Durch dieses Verfahren kann man annehmen, daß sich die kleinen Fehler in beiden Theilen ziemlich gleichförmig anhäufen.

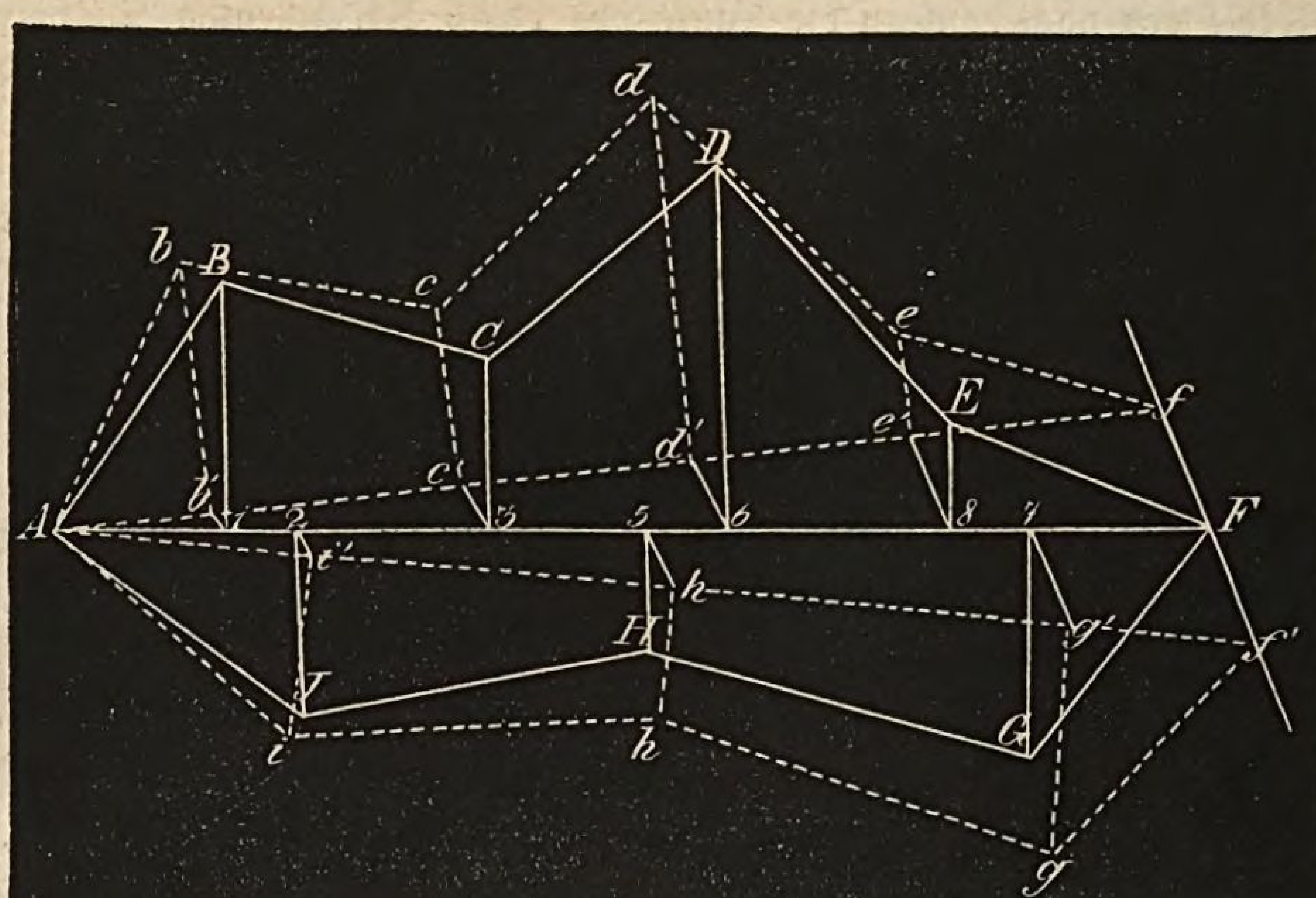
Kommt man das zweite Mal zu demselben Punkte, welcher als der letzte in der ersten Hälfte bereits auf dem Tische bestimmt ist, und wird hiedurch das Polygon nicht geschlossen, so können hinsichtlich der Schlußlinien folgende, in den Fig. 141, 142, 143 ersichtlich gemachte Fälle vorkommen; wird nämlich durch die punktirten Seiten die stattgehabte Aufnahme dargestellt, so kann es geschehen

1. daß sich die beiden Schlußlinien ef und gf′, Fig. 141, gar nicht erreichen;

2. daß sich die Schlußlinien ef und gf′, Fig. 142, schneiden;

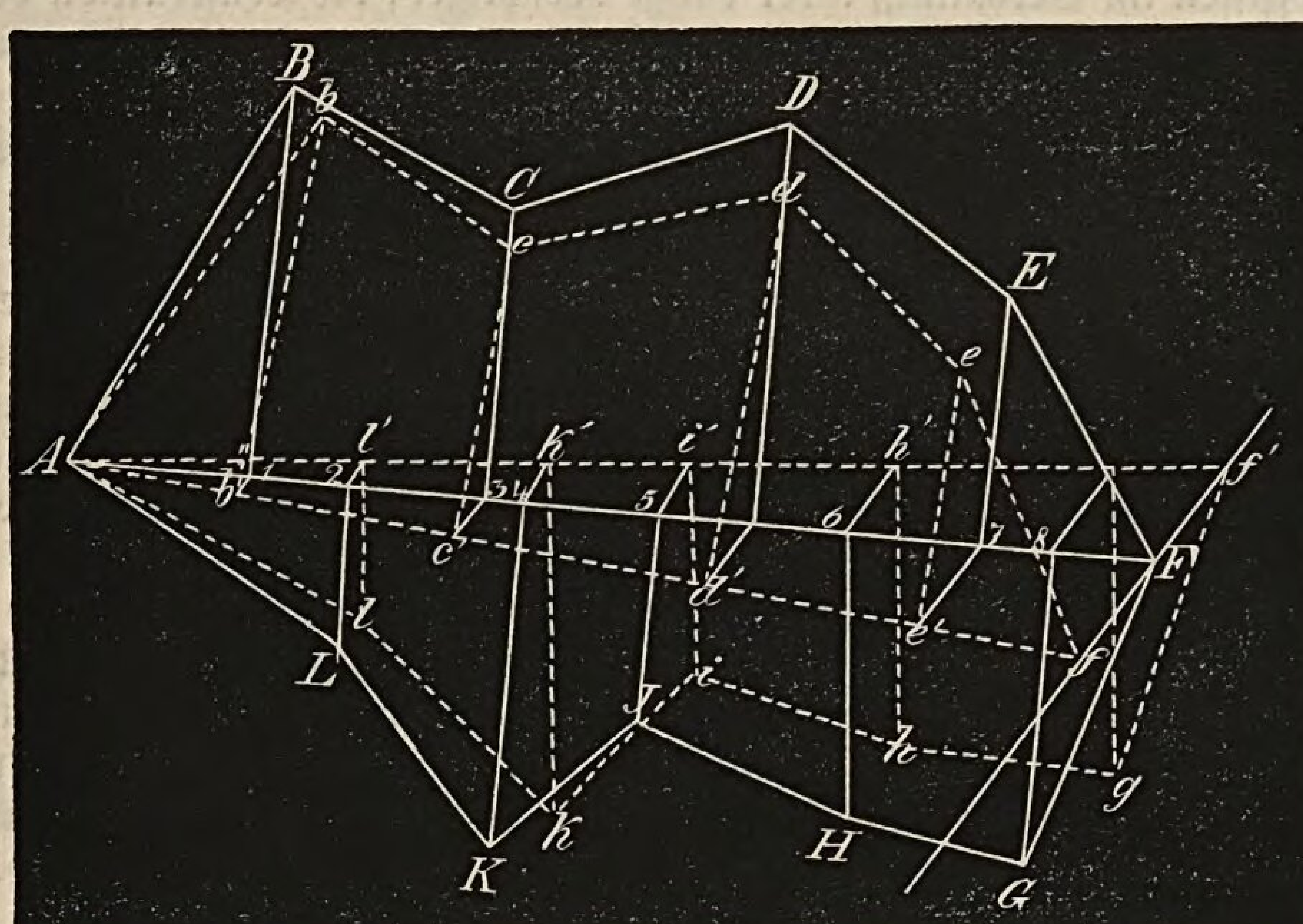
3. daß die Endpunkte der Schlußlinien mit dem Punkte A, von welchem die Aufnahme begonnen wurde, in einer geraden Linie liegen, z. B. e, e′ und A in der Fig. 143.

Ad 1. Um hier mit einer Wahrscheinlichkeit die Fig. 141 zum Schließen



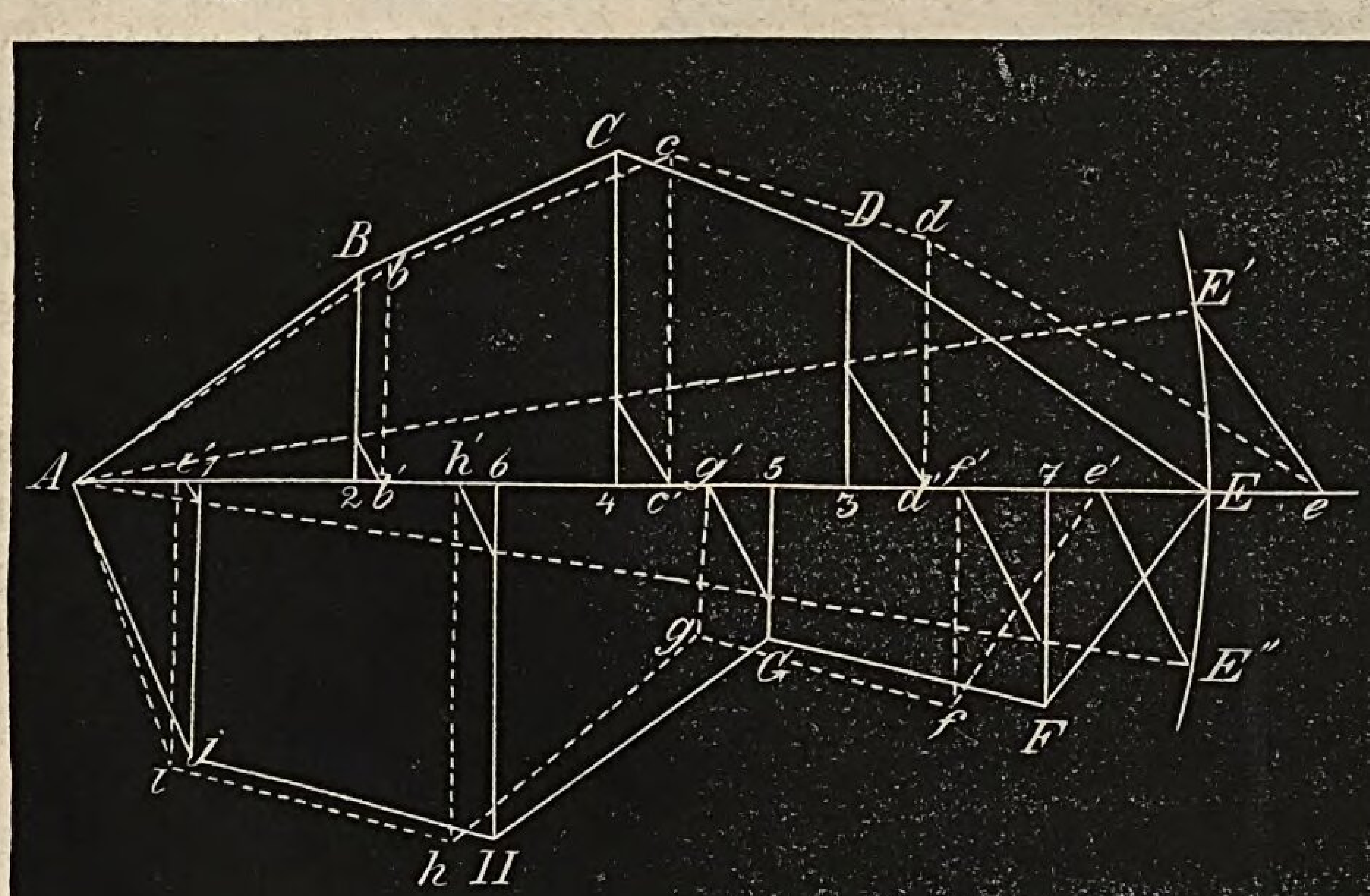
zu bringen, verbinde man f mit f', halbire diese Linie in F und ziehe von A nach f, F und f' gerade Linien, fälle von den Eckpunkten b, c, d, e auf Af von g, h, i auf die Af' die Ordynaten bb', cc', hh' ꝛc., so werden dadurch die Abszissen Ab', Ac', Ak' ꝛc. bestimmt; von jedem der Punkte e', g', h', d' ziehe man eine mit ff' parallele Linie, bis diese die AF schneidet, in den so erhaltenen Punkten 1, 2, 3 . . . errichte man auf AF senkrechte Linien, mache jede einzelne der entsprechenden Ordynate gleich, also B1 = bb', C3 = cc', D6 = dd', oder G7 = gg', H5 = hh', so erhält man die Punkte B, C, D, E, F, G und durch ihre Verbindung ein Polygon, welches in Hinsicht auf den Flächeninhalt dem zu vermessenden praktisch gleich ist.

Ad 2. Das Verfahren ist dem vorigen ziemlich gleich; nachdem von A, Fig. 142, nach f und f', so auch zu dem Halbirungspunkte F der Linie ff' gerade



Linien gezogen, von den einzelnen Ecken b, c, d ꝛc. auf die Af und von g, h, i, k auf die Af' die Ordynaten gefällt worden sind, werden von den Endpunkten der Abszissen mit ff' parallele, die AF schneidende Linien gezogen, und weiter wie ad 1 verfahren.

Ad 3. Da Fig. 143 die Punkte e, e' und A in einer geraden Linie liegen,



so ziehe man, um dasselbe Verfahren anwenden zu können, vorerst von A aus unter beliebigen Winkeln die Linien AE und AE", halbire die Entfernung ee' in E und mache AE' = AE" = AE; hierauf fälle man von den Endpunkten b, c, d, f, g auf die AE Senkrechte, so erhält man die Punkte b', c', d', h', g', f', von den ersteren zieht man mit eE' Parallele, welche die AE', von den letztern mit e'E" parallele Linien, welche die AE" schneiden, und trägt die Entfernung von A der zuletzt bestimmten Punkte auf die AE über, wodurch man die Punkte 1, 2, 3 . . . . . erhält; in diesen errichtet man wieder Senkrechte und macht die Länge der entsprechenden Ordynate gleich, z. B. G5 = gg', D3 = dd' ꝛc., so erhält man ein geschlossenes Polygon ABC . . . ., welches praktisch dem gesuchten als gleich betrachtet werden kann.

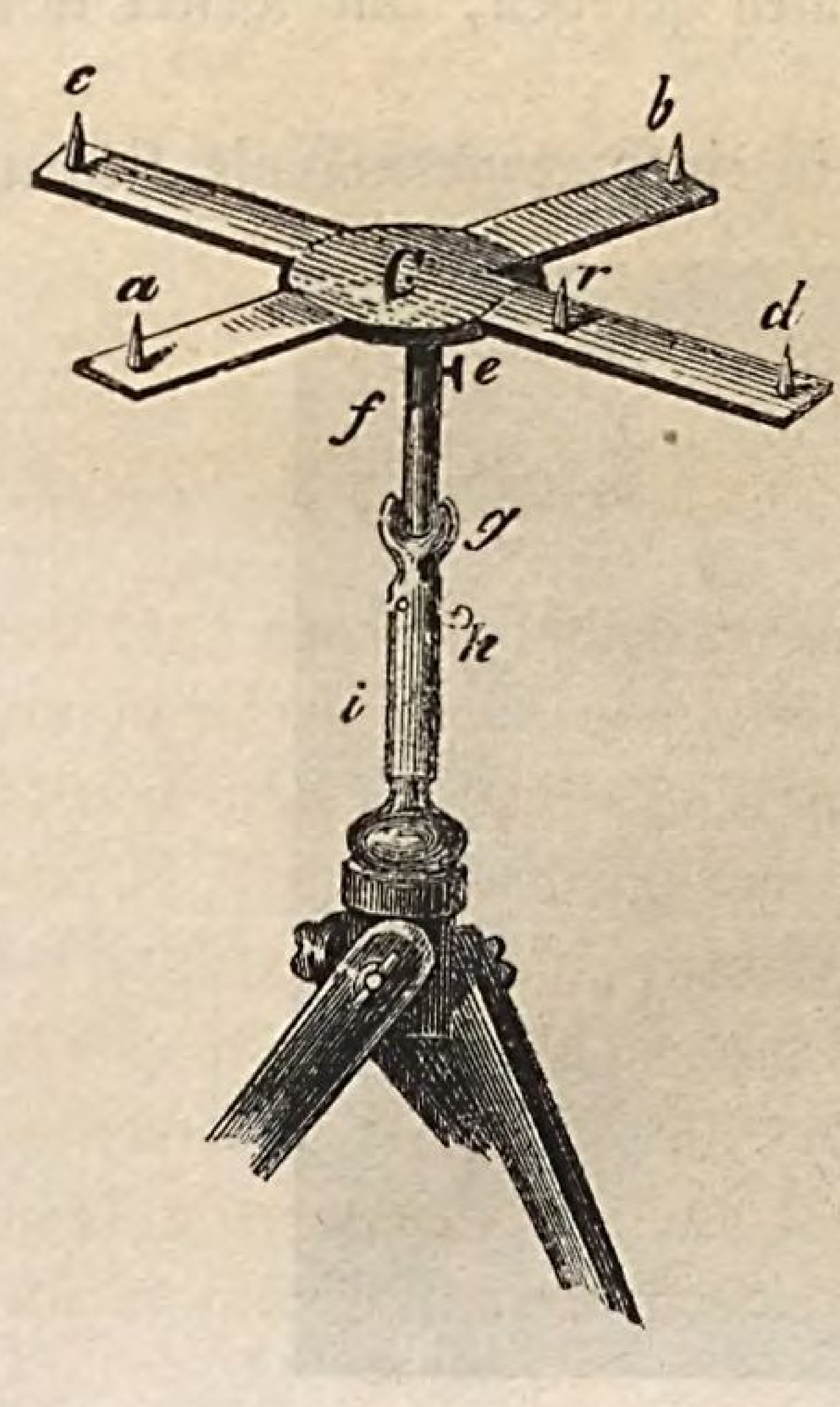
Zusatz 1. Wie man sieht, werden die Ordynaten, ihrer Größe nach belassen, und nur die Abszissen im Verhältniß ihrer Länge berichtiget; die Konstruktion des definitiven Polygons muß jedoch mit großem Fleiße vorgenommen werden, damit nicht neue Fehler entstehen.

Zusatz 2. Aus dem Umstande, daß in dem aufgenommenen Polygone die Schlußpunkte wenig, vielleicht ganz unbedeutend abstehen, kann man nur dann mit voller Beruhigung auf die richtige Vermessung schließen, wenn man überzeugt ist, daß in den entweder streng oder nahe parallelen Seiten des Polygons, wenn solche vorkommen, nicht etwa ein gleicher Fehler begangen worden ist. Denn wie aus dem §. 166 bekannt ist, ist das Polygon nicht bestimmt, wenn die beiden unbekannten Seiten parallel sind; hat man also die Länge beider entweder um eine Kettenlänge zu groß angesagt, oder um eine Zahl mehr aufgetragen, so wird das Polygon mehr oder weniger gut schließen und doch bedeutend gefehlt sein.

Zusatz 3. Sollte man bei einem Polygon nicht alle Seiten messen und alle Winkel graphisch bestimmen können, so müßte man die Aufnahme, falls doch die erforderlichen Stücke bestimmt werden konnten, nach der in dem §. 66 erklärten Konstruktion ausführen. Eine solche Vermessung aber, besonders wenn die Aufnahme mit ungünstigen Umständen verbunden war, ist immer nur als eine Annäherung an die Wahrheit zu betrachten.

Das Winkelkreuz.

§. 126. Dieses einfache Instrument ist zwar nur zur Konstruktion einiger Winkel tauglich, doch für den Geometer von großer Brauchbarkeit. Es besteht, wie die Fig. 144 zeigt, aus zwei hölzernen oder messingenen 16 bis 20 Zoll langen Leisten, welche unter rechten Winkeln fest verbunden sind; a, b, c, d sind gleiche zwei Zoll hohe Spitzen, und durch diese die zwei auf einander senkrecht stehende Visuren ab und cd bestimmt.



Die Verbindung des Winkelkreuzes mit einem leichten Zapfenstativ ist folgende: an der untern Ebene des Winkelkreuzes ist ein hohler messingener Cylinder der Art befestigt, daß seine Achse in dem Durchschnitte beider Visirlinien, nämlich in C senkrecht auf die Leisten steht; der Cylinder wird auf dem runden Zapfen f aufgesetzt und sammt dem Winkelkreuze durch die Klemmschraube e festgehalten, f ist mit der Nuß g aus einem Stücke, kann

bei gelockerter Schraube h nach dem Augenmaße vertikal gestellt und durch dieselbe Schraube in dieser Lage erhalten werden; die Hülse i sitzt auf dem Konus des Zapfenstativs.

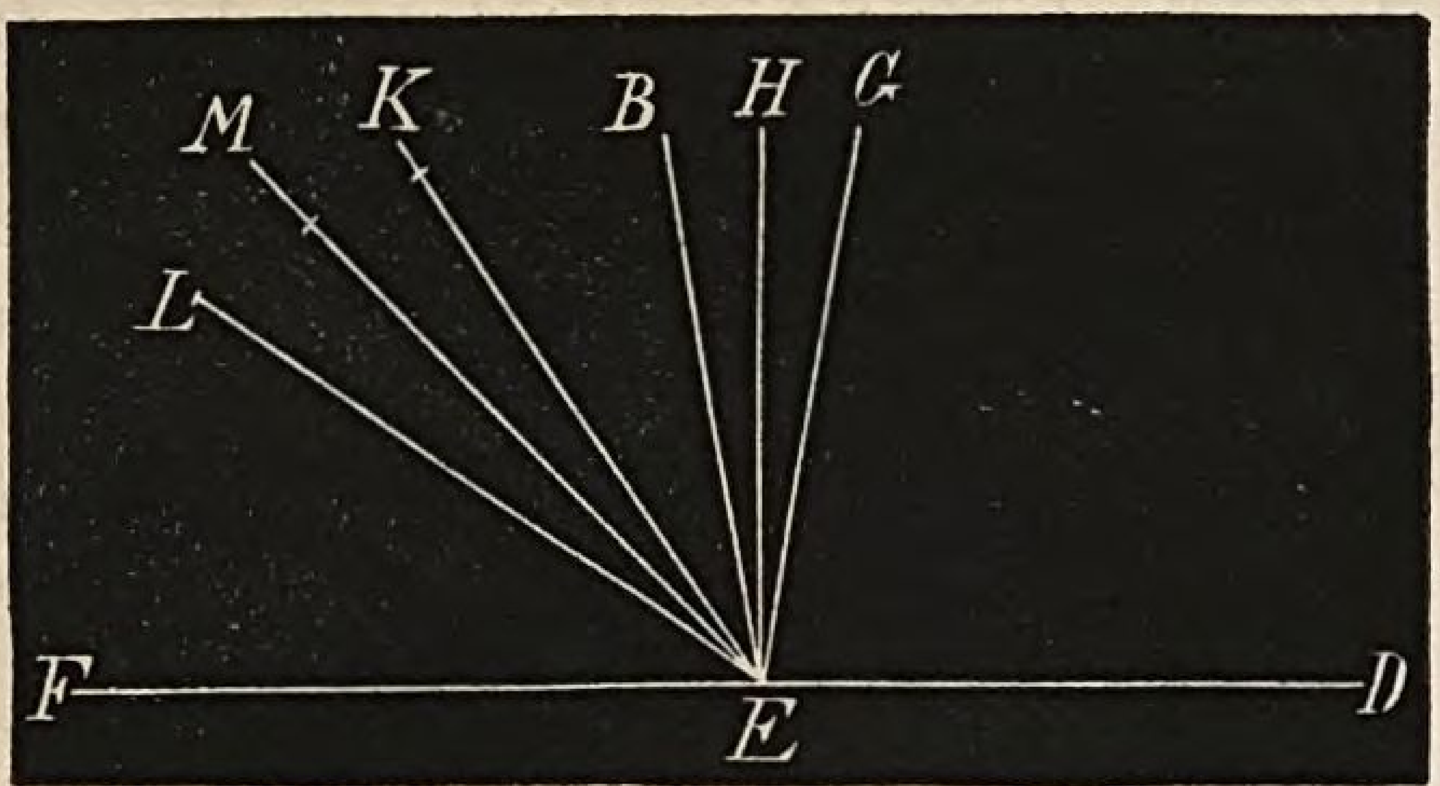
Es ist zweckmäßig, die Spitzen von C gleich weit zu stellen, ist dieß geschehen und ab auf cd senkrecht, so ist auch der Winkel cad = adb = 90, cab = bad = 45 Grade; ist ferner Ca = n Zoll und läßt man in der Linie cd oder ab einen Stift r in der Entfernung Cr = n tang. 15^0 einsetzen, so ist bar = 15, daher car = 60, und rad = 30 Grade.

Rektifikation des Winkelkreuzes.

§. 127. Dieses Instrument sollte wohl einer Rektifikation nicht bedürfen, da es dem Mechaniker ein Leichtes ist, zwei senkrecht auf einander stehende Linien zu ziehen und die Spitzen in gleichen Abständen vom Scheitel der rechten Winkel senkrecht auf die Leisten einzuschrauben.

Wenn die Stifte alle gleich lang sind, so kann man sich eine Ueberzeugung von der Richtigkeit der Winkel leicht dadurch verschaffen, daß man mit ihren Spitzen feine Punkte in ein Zeichenbrett sticht, sodann mittelst eines Stangenzirkels die Gleichheit der Abstände ad, db, bc, ca untersucht; sind diese gleich, so sind die rechten Winkel, also auch die mit 45 Graden, richtig. Wird noch die Länge ad auf einem Maßstabe abgelesen, so läßt sich daraus die aC, mithin auch die Cr, berechnen, und nachdem auf diesem Wege nämlich durch Rechnung Cr ausgemittelt ist, wird dieselbe Linie vom Reißbrette abgenommen, auf einem Maßstabe abgelesen und mit der berechneten verglichen.

Schärfer aber auch umständlicher kann man die Richtigkeit der Winkel auf folgende Art prüfen: man stellt in einem ebenen Boden zwei Absteckstäbe F, D, Fig. 145, beiläufig in einer Distanz von 60 Klafter vertikal auf und bestimmt in dieser Linie einen Punkt E, der von den Absteckstäben nahe gleich weit entfernt ist, bringt das Kreuz in die horizontale Lage, klemmt die Stativfüße so auch die Nuß, stellt den Durchschnitt der Leisten über E, visirt von d über c nach F und klemmt in dieser Lage das Instrument auch mit der Schraube e. Nun visirt man von c über d nach D, stimmt die Visur nicht überein, so



muß man das Winkelkreuz etwas verstellen, bis man es dahin gebracht hat, daß die Linie cd mit FD scharf übereinstimmt. Ist dieß geschehen, so visirt man von a über b und läßt in dieser Visur einen Stab B nahe 30 Klafter weit vertikal stellen, lüftet die Schraube e, dreht das Winkelkreuz und visirt ab nach F, klemmt wieder das Instrument und sieht nach ob die Visur cd den Stab B betrifft.

Sollte dieß nicht eintreffen, so wird in der letzten Visur ein Stab G, GE = EB gestellt, der Abstand GB durch einen dritten Stab H halbirt, die beiden nebenstehenden weggenommen, so ist wie leicht nachgewiesen werden kann, FEH = HED, somit jeder ein rechter Winkel und dadurch ersichtlich, um wieviel

die Stellung der Stifte c und d zu ändern ist, damit beide Visuren auf einander senkrecht stehen. Diese neue Visirebene macht man vor der Hand, ohne die Stifte c, d herausgenommen zu haben, durch zwei Stecknadeln ersichtlich, die aber etwas länger als die Stifte sein müssen.

Nun untersucht man ob der Winkel cab seine richtige Größe hat. Man stellt a über E, visirt ab nach H, sodann von a über c und läßt in dieser Visur, ebenfalls bei 30 Klafter weit, einen Absteckstab K vertikal aufstellen, bringt die Visirlinie ab in die Ebene EK, wobei a genau über E gestellt sein muß, und sieht nach, ob die Visur über ac nach F trifft, sollte dieß nicht stattfinden, so visirt man ac nach F und läßt in der ab einen Stab L mit K von E gleich weit entfernt stellen, halbirt den Abstand LK in M, so ist wieder FEM = MEH = 45 Grade; und die Stecknadel in c dahin zu stellen, daß die Visur ab das Signal M, die ac F trifft, wodurch definitiv der Punkt bestimmt wird, in welcher der Stift c einzusetzen ist.

Bringt man nun ab in die Ebene EK, so soll die Visur von a über d das Signal H treffen, wo nicht, so wird die Nadel d in die Visur gesteckt, und dadurch der Ort des Stiftes d definitiv erhalten; auch sind dann die drei Punkte a, c, d von C gleich weit.

Um noch den Winkel cdb zu prüfen, verfährt man auf dieselbe Art; sollte eine Nachhilfe nöthig werden, so müßte der Stift b seinen Ort ändern.

Ist diese Korrektion ausgeführt, so sind alle durch die Spitzen a, b, c, d bestimmten Winkel richtig.

Der Winkel von 60 Graden wird dadurch geprüft, daß man in einem ebenen Boden an einer bei 40 Klafter langen Standlinie, die aber nicht gemessen zu werden braucht, mit Hilfe des Winkelkreuzes die anliegenden Winkel von 60^0 nach Angabe des Instrumentes konstruirt, wobei jedesmal a über den Endepunkt der Basis gestellt sein muß, den Durchschnitt der Schenkel bestimmt, in diesen das Instrument gehörig aufstellt und nachsieht, ob auch dieser Winkel den beiden andern gleich ist; sollte sich ein Fehler ergeben, so ist der Stift r der Art zu verstellen, daß die geänderte Visur auf die Hälfte des Fehlers trifft.

Nachdem der Winkel cad = 90, car = 60 Grade betragen, so ist der Winkel rad = 30^0, somit das Instrument rektifizirt.

(Daß wir die Rektifikation des Winkelkreuzes so umständlich gegeben haben, geschah nur aus der persönlichen Ueberzeugung seiner großen Brauchbarkeit, und da die Visur über die Spitzen nach den Versuchen Stampfer's wenigstens bis auf 20 Sekunden sicher ist, so steht dieses Werkzeug gut konstruirt an Genauigkeit wenigen nach, es lohnt sich somit der Mühe, die Rektifikation desselben ein Mal streng durchzuführen.)

Gebrauch des Winkelkreuzes.

§. 128. Dieses Instrument leistet bei der Bestimmung unzugänglicher Distanzen, desgleichen bei der Aufnahme einzelner Parzellen (Grundstücke) sehr gute Dienste, da jene Winkel (90^0, 60^0, 30^0), deren Konstruktion mit der Kette im ersten Abschnitte gelehrt worden ist, mit diesem Instrumente sehr leicht und genau erhalten werden.

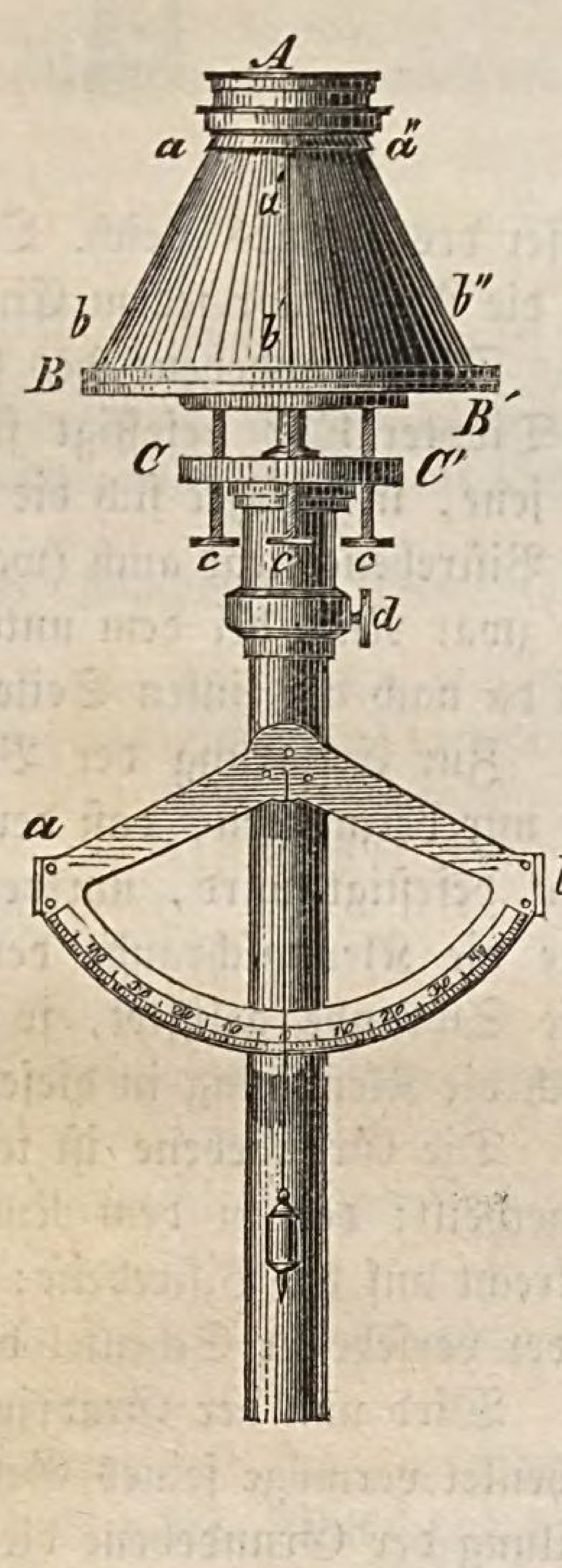
Mit dem Winkelkreuze eine Ordynate zu errichten, ist bereits bei dessen Rektifikation vorgekommen, soll dagegen von einem Punkte H, Fig. 143 (siehe

die Zeichnung pag. 179), auf die Linie FD eine Ordynate gefällt werden, so wird das Instrument in der Linie beiläufig in einem Punkte gestellt, von dem man vermuthet, daß es der Fußpunkt sein könnte, die eine Visur z. B. cd nach D gebracht und über ab visirt, so sieht man sogleich ob und um wie viel die Stellung des Instrumentes geändert werden müsse, damit die letztgenannte Visirlinie auf H trifft; ist dieß der Fall, so liegt der Fußpunkt der Ordynate vertikal unter dem Scheitel des rechten Winkels.

Der Winkelkegel.

§. 129. Ein zweites zu demselben Zwecke konstruirtes Instrument ist in der Fig. 146 dargestellt, ich will es analog mit dem Winkelkreuze den Winkelkegel nennen.

Dieses in der Werkstätte eines Stuttgarter Mechanikers fabrizirte Instrument besteht aus einem messingenen hohlen abgestutzten Kegel, dessen Höhe 4, der untere Durchmesser nahe 6, der obere 2 Zoll beträgt. In der Mantelfläche sind vier gleichweit abstehende und 0·013 Zoll weite Visirlinien ab, a′b′, a″b″ ausgeschnitten, durch welche zwei senkrecht auf einander stehende Visirebenen bestimmt sind. Die Basis des Kegels bildet eine starke Messingplatte BB′, in welcher eine Nuß beweglich, diese aber mittelst eines kurzen Cylinders mit der Platte CC′ fest verbunden ist.



Die gegen einander stehenden 4 Schrauben c,c,c dienen die Visirlinien vertikal zu stellen, die richtige Stellung wird an einer bei A befestigten Dosenlibelle beurtheilt; d ist die Klemmschraube, durch welche das Instrument, das nahe 4 Wiener Pfund Gewicht hat, beim Gebrauche an einem Stock befestigt ist.

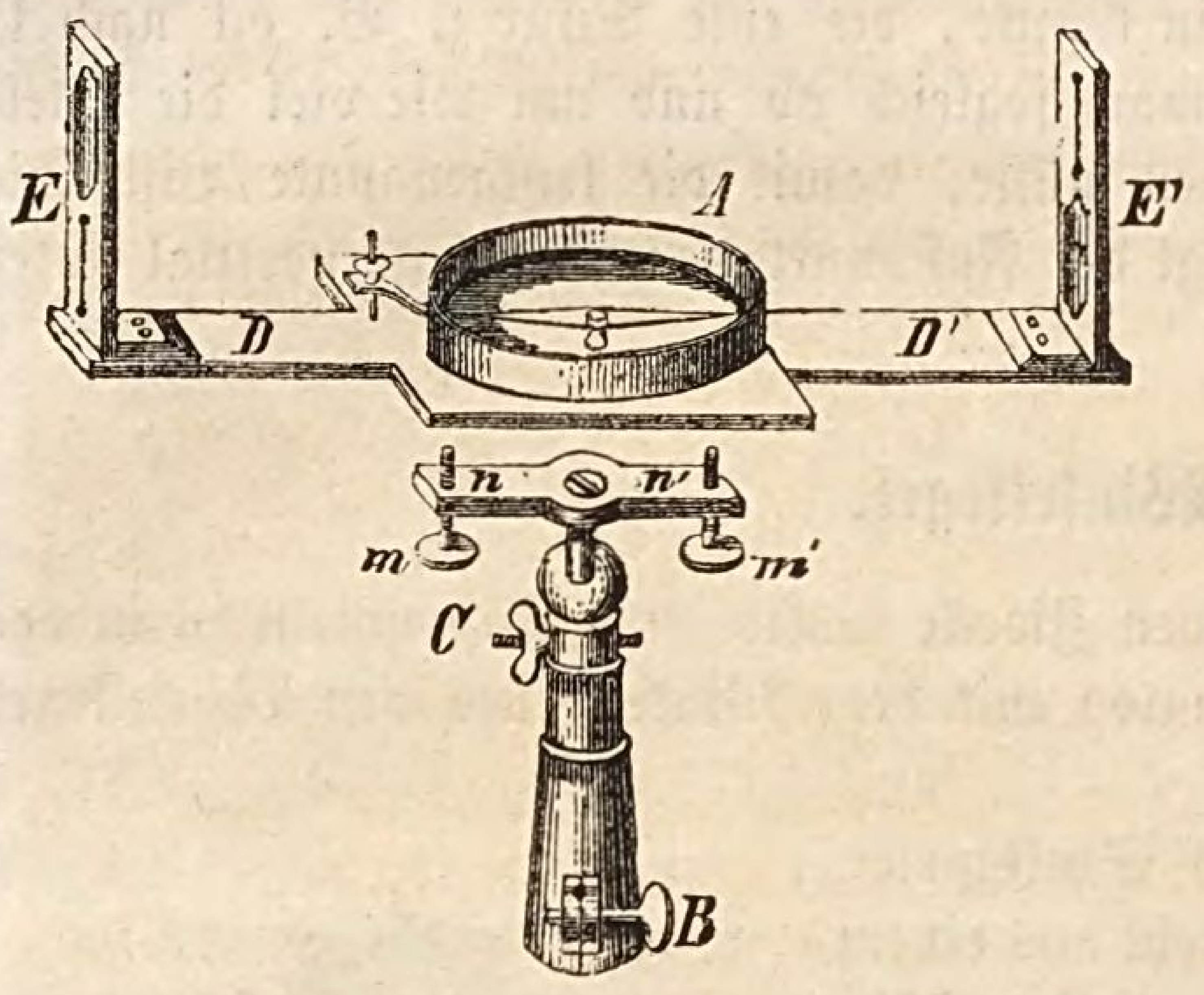
Unterhalb des Winkelkegels ist ein messingener eingetheilter Kreissektor von 4 Zoll Halbmesser um einen an seiner Rückseite befindlichen Stift in der vertikalen Ebene beweglich, die Eintheilung ist von der Mitte aus nach beiden Seiten von 15 zu 15 Minuten bis 50 Grade.

Bei a ist eine runde Okularöffnung, bei b das Objektivdiopter, die Neigung der Visirlinie gegen den Horizont wird an dem Kreissektor durch einen in der vertikalen Richtung gespannten Faden angezeigt. Die Konstruktion dieses Instrumentes ist in einigen Punkten fehlerhaft, die jeder leicht finden kann.

Das Boussolen-Instrument.

§. 130. Dieses Instrument, den Schiffern unter dem Namen Kompaß bereits im 13. Jahrhunderte bekannt, scheint zu geodätischen Messungen erst im

16. Jahrhunderte angewendet worden zu sein; es besteht, Fig. 147, aus einem hohlen messingenen Cylinder A (das Gehäuse) von 1 Zoll Höhe und 4 bis 6 Zoll Durchmesser, in dem Mittelpunkte der untern Grundebene und senkrecht auf diese steht ein Stift (die Gnomonspitze), auf welchem eine Magnetnadel aufliegt und frei schwebt, weßhalb sie in ihrer Mitte eine Vertiefung (das Hütchen) haben muß. Mit der Nadel in einer Ebene und konzentrisch mit dem Gehäuse ist ein schmaler Ring, dieser von 0 bis 360 und zwar von 30 zu 30 Minuten abgetheilt; die Länge der Magnetnadel ist dem innern Durchmesser des Ringes gleich. Oben ist der Cylinder durch eine Glasplatte geschlossen, um die Nadel vor jedem Einflusse des Luftzuges zu schützen.



Die Grundebene des Cylinders hat zwei Verlängerungen DD', an welche die Diopter EE' befestigt sind; die durch sie bestimmte Visirebene steht senkrecht auf jene, in welcher sich die Nadel bewegt und geht durch die Gnomonspitze; in der Visirebene liegt auch (was aber nicht nöthig ist) der Nullpunkt der Eintheilung und zwar Null bei dem untern Objektivfaden, die Numerirung der Grade geht von da nach der linken Seite bis 360.

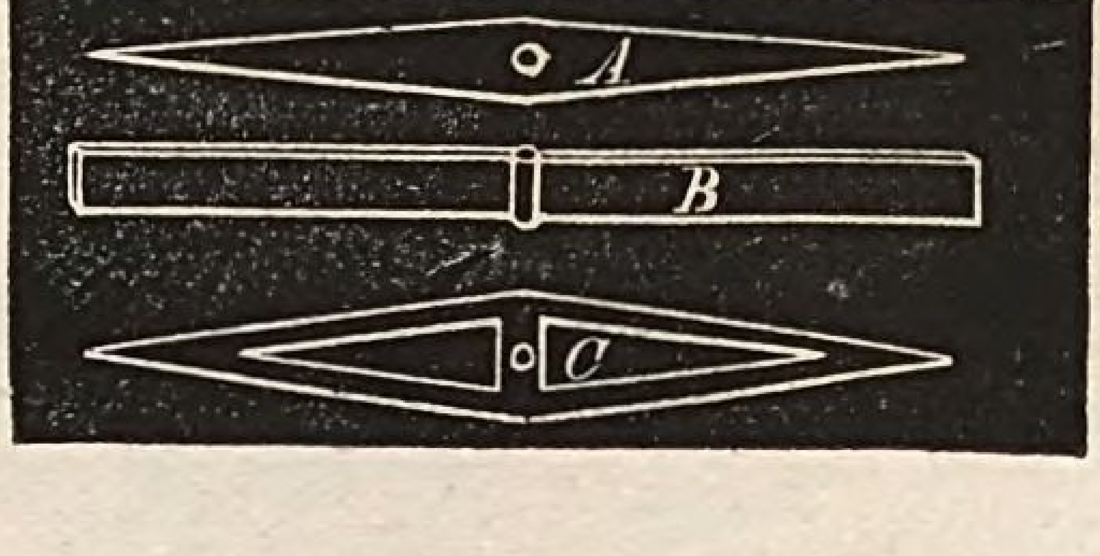
Zur Erklärung der Verbindung der Boussolenplatte mit der Hülse haben wir nur beizufügen, daß der Arm nn', an welchen jene mittelst der Schrauben mm' befestigt wird, um den Zapfen der Nuß beweglich ist, somit die Boussole, ohne die Klemmschraube der Nuß C nachzulassen, gedreht werden kann; wird diese Schraube gelüftet, so kann die Ebene des Ringes horizontal gestellt und durch die Klemmung in dieser Lage gehalten werden.

Die Grundebene ist ferner im Innern des Gehäuses von Grad zu Grad eingetheilt; der zu dem Nullpunkte dieser Eintheilung gezogene Halbmesser steht senkrecht auf die Visirebene; um die Gnomonspitze ist ein messingener mit einem Index versehener Schenkel beweglich.

Wird nun der Gradring in eine vertikale Ebene umgelegt, so können, weil der Schenkel vermöge seines Gewichtes immer die vertikale Lage annimmt, an der Eintheilung der Grundebene die Höhen- oder Tiefenwinkel abgelesen werden.

Anmerkung. Der wichtigste Theil einer Boussole ist offenbar die Magnetnadel; je mehr diese das Bestreben hat, in dem magnetischen Meridian zu verharren, je stärker also ihre Richtkraft ist, desto vorzüglicher ist sie.

Eine gute Magnetnadel zu verfertigen betrifft zwar den Mechaniker und gehört in so fern nicht in ein Lehrbuch der praktischen Geometrie, es dürfte aber nicht am unrechten Orte sein, die wesentlichsten Punkte anzugeben, durch welche die Empfindlichkeit der Magnetnadel modifizirt wird, diese sind:



1. Was die Form der Nadeln betrifft, so sind die in der Fig. 148 mit A und B bezeichneten die

gebräuchlichsten; Coulomb und nach ihm Kapitän Kater aber fanden, daß die sub C dargestellte den beiden ersteren vorzuziehen ist; denn sind alle drei Nadeln aus demselben Metall (Stahl), haben alle drei eine gleiche Länge, Dicke und Gewicht, und wird allen dreien ein gleicher Grad von Härte ertheilt, so verhält sich die Richtkraft der Nadeln A, B, C wie 1 : 1·062 : 1·140.

2. In zwei Nadeln von derselben Form, einerlei Metall und homologen Dimensionen verhalten sich die Richtkräfte wie die dritten Potenzen dieser Dimensionen. Ist z. B. eine Nadel von der Form A $\frac{1}{2}$ Linie dick und 3 Zoll lang, eine andere von derselben Form aber 1 Linie dick und 6 Zoll lang, so verhalten sich ihre Richtkräfte wie 1 : 8.

3. Wird blos die Länge einer Nadel geändert, und bleiben die andern Umstände und Dimensionen dieselben, so muß, so lange die Länge kürzer als das 40- bis 50fache der Breite der Nadel ist, die Länge in einem quadratischen Verhältnisse wachsen, damit die Richtkraft in einem einfachen zunimmt; ist die Länge größer als das 40- bis 50fache der Breite, so nimmt die Richtkraft in demselben Verhältnisse mit der Länge zu.

4. Nachdem die magnetische Kraft im Innern der Körper gegen die auf der Oberfläche fast verschwindet, so soll man den Nadeln große Oberflächen geben, ohne ihr Gewicht zu vermehren, aus diesem Grunde ist die Richtkraft der Magnetnadel C erklärlich.

5. Die durch die Zunahme des Gewichtes verursachte Reibung ist bei sehr scharfen Gnomenspitzen und harten wohl polirten Hütchen nahe $\sqrt[2]{p^2}$ proportional, wo p das Gewicht der Nadel bedeutet; bei mehr angestumpften Spitzen nimmt die Reibung im geraden Verhältnisse mit dem Gewichte zu.

6. Nach Kater's Versuchen folgt, daß die Nadel die stärkste Richtkraft erhalte, wenn sie bei der Rothglüh-Hitze gehärtet, und sodann von der Mitte aus bis etwa zu einem Zoll von beiden Enden so weit erhitzt wird, daß die entstandene blaue Farbe wieder verschwindet. So gehärtete Nadeln lassen sich schwerer magnetisiren, behalten aber die erhaltene Richtkraft fast unverändert bei.

7. Die Gnomonspitze, so auch das Hütchen, soll mehr einen stumpfen als einen spitzen Kegel bilden.

Die hierüber angestellten Versuche sind in dem 18. Bande der allgemeinen Encyklopädie von Ersch und Gruber, ferner in Gehler's physikalischem Wörterbuche enthalten.

Rektifikation des Boussolen-Instrumentes.

§. 131. Ein Boussolen-Instrument ist rektifizirt, wenn

1. die Gnomonspitze mit der Drehungsachse des Gehäuses in einer vertikalen Linie liegt;

2. die Visirebene durch die Gnomonspitze geht und senkrecht auf dem Limbus steht;

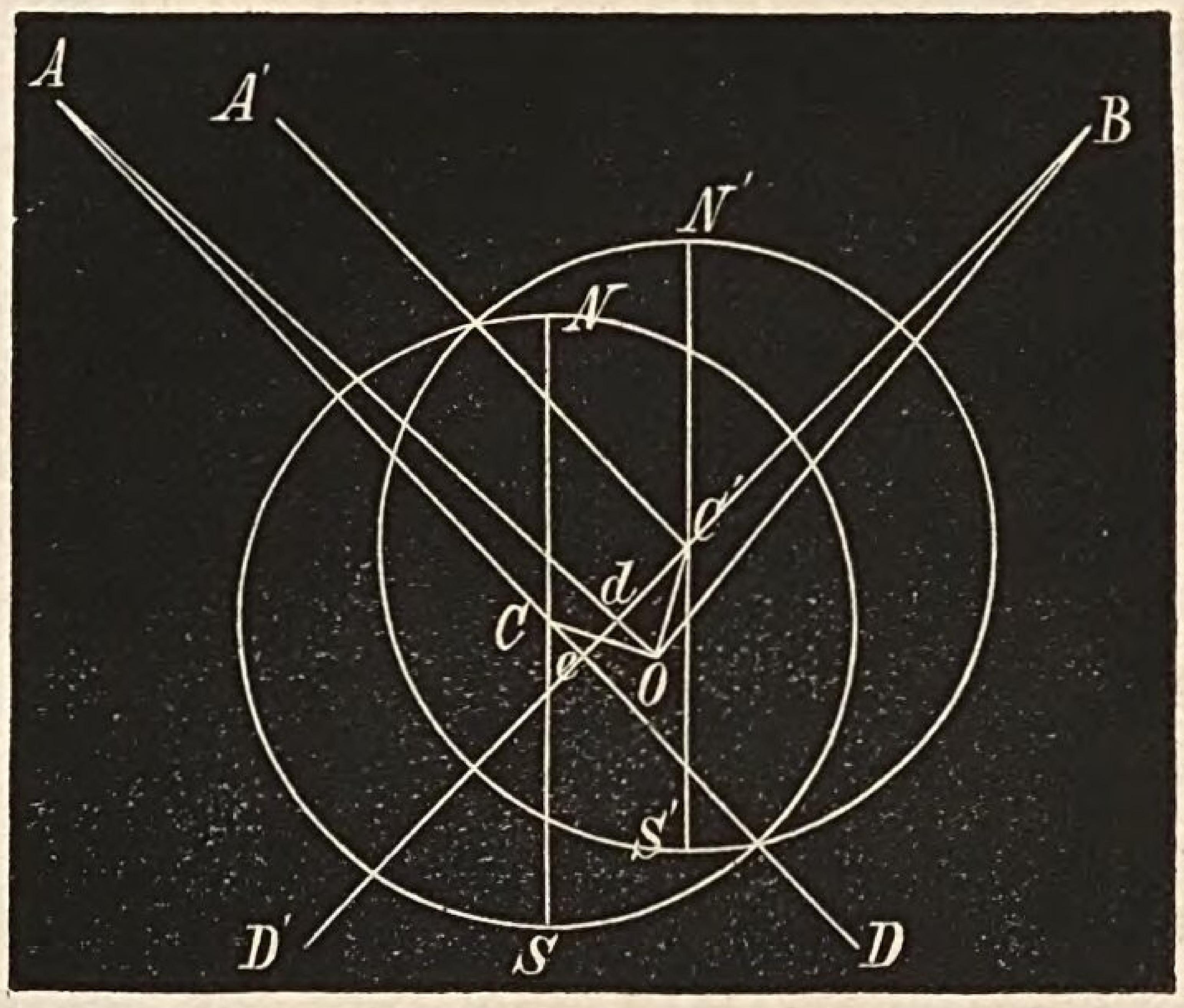
3. endlich wird gewöhnlich noch verlangt, daß zwei Seiten der Grundplatte unter sich und mit der Visirebene parallel sind.

Wir wollen aber gleich im Voraus bemerken, daß wenn eine oder die andere dieser Voraussetzungen nicht übereintreffen sollte, der Geometer kein Mittel hat, den Fehler zu beseitigen, während es dem Mechaniker ein Leichtes ist, ein solches Instrument fehlerfrei herzustellen; da aber der erstere doch wissen soll, in wie fern sein Werkzeug brauchbar ist, so wollen wir die Art und Weise anführen, eine Boussole hinsichtlich der obigen drei Punkte zu prüfen.

Ad 1. Der Umstand, daß bei diesem Instrumente die Diopter an den Limbus (das Gehäuse) befestigt sind, somit bei der Messung eines Winkels der Limbus bewegt wird, die Alhidade (die Magnetnadel) dagegen ruhig bleibt, und es denkbar ist, daß der Mittelpunkt des Limbus nicht in der Drehungsachse des Gehäuses liegt, veranlaßt uns hier eine Untersuchung anzustellen, die wir bei

der Theorie der Instrumente aus dem Grunde nicht aufgenommen haben, weil sie blos bei dem Boussolen-Instrumente vorkommt.

Nehmen wir an Fig. 149 sei O die Drehungsachse des Gehäuses sammt den Diopteru, C dagegen die Mitte des Gradringes und zugleich der Drehungspunkt der Magnetnadel NS, AOB der zu messende Winkel, AD die Visirebene auf das Signal A eingestellt, so ist ACO = γ ein constanter Winkel.



Wird die Visirebene auf das Signal B gerichtet, so wird, weil die Drehung um den Punkt O geschieht, der Drehungspunkt der Magnetnadel von C nach C' kommen, der Winkel BC'O wieder gleich γ sein, und die Richtung der Magnetnadel N'S' mit NS parallel bleiben. Nun kann man sich offenbar vorstellen, der Punkt C sei statt durch die drehende Bewegung um O dadurch nach C' gekommen, daß man den Kreis NS in der Linie NS entsprechend hinauf und sodann parallel mit sich selbst so weit geschoben hat bis C auf C', somit NS auf N'S' gefallen ist. Bei dieser Bewegung hat die Magnetnadel und die Visirebene keine drehende Bewegung erlitten, somit zeigt N' mit N auf dieselben Grade und die Visirebene A'C' hat mit jener AC eine parallele Lage. Dreht man nun die Visirebene nach B, so bekommt man auf dem Gradringe das Maß des Winkels A'C'B = β, während der gesuchte Winkel AOB = α ist.

Weil Ae mit A'C' parallel ist, so ist AeB = A'C'B = β und wegen den gleichen Winkeln Ade mit BdO ist $A + \beta = B + \alpha$, daher $B - A = \beta - \alpha$; wird ferner C'O = e, AO = a, BO = b und $\beta - \alpha = x$ gesetzt, so bekommt man aus dem Dreiecke ACO, $A = \frac{e \sin. \gamma}{a}$, aus C'OB, $B = \frac{e \sin. \gamma}{b \sin. 1''}$, daher ist der in Sekunden ausgedrückte Fehler

$$x'' = \frac{e \sin. \gamma}{\sin. 1''} \left\{ \frac{a - b}{ab} \right\} \ldots . 1).$$

Es sei a = 100, b = 40 Klafter, c = 0·2 Zoll, $\gamma = 90^0$, so ist x = 8·6, also unbedeutend.

Will man ein solches Instrument in dieser Hinsicht untersuchen, so kann man auf folgende Art verfahren: Man schraubt das Gehäuse ab, stellt die Grundplatte in einer ebenen Gegend mittelst einer Meßtischlibelle horizontal und durch die Klemmschraube C fest; hierauf läßt man in einer Entfernung, ungefähr 100 Klafter, eine Figurirfahne, und etwa 20 Klafter vom Instrumente entfernt einen dünnen Absteckstab genau vertikal und letzteren in die durch die Gnomonspitze und die Figurirfahne bestimmte Ebene stellen. Nun visire man

über die Spitze nach beiden Stäben, drehe die Grundplatte und gebe Acht, ob während der Drehung die Spitze in der Ebene bleibt oder nicht, im letzteren Falle ist die Boussole von dem in der Rede stehenden Fehler nicht frei.

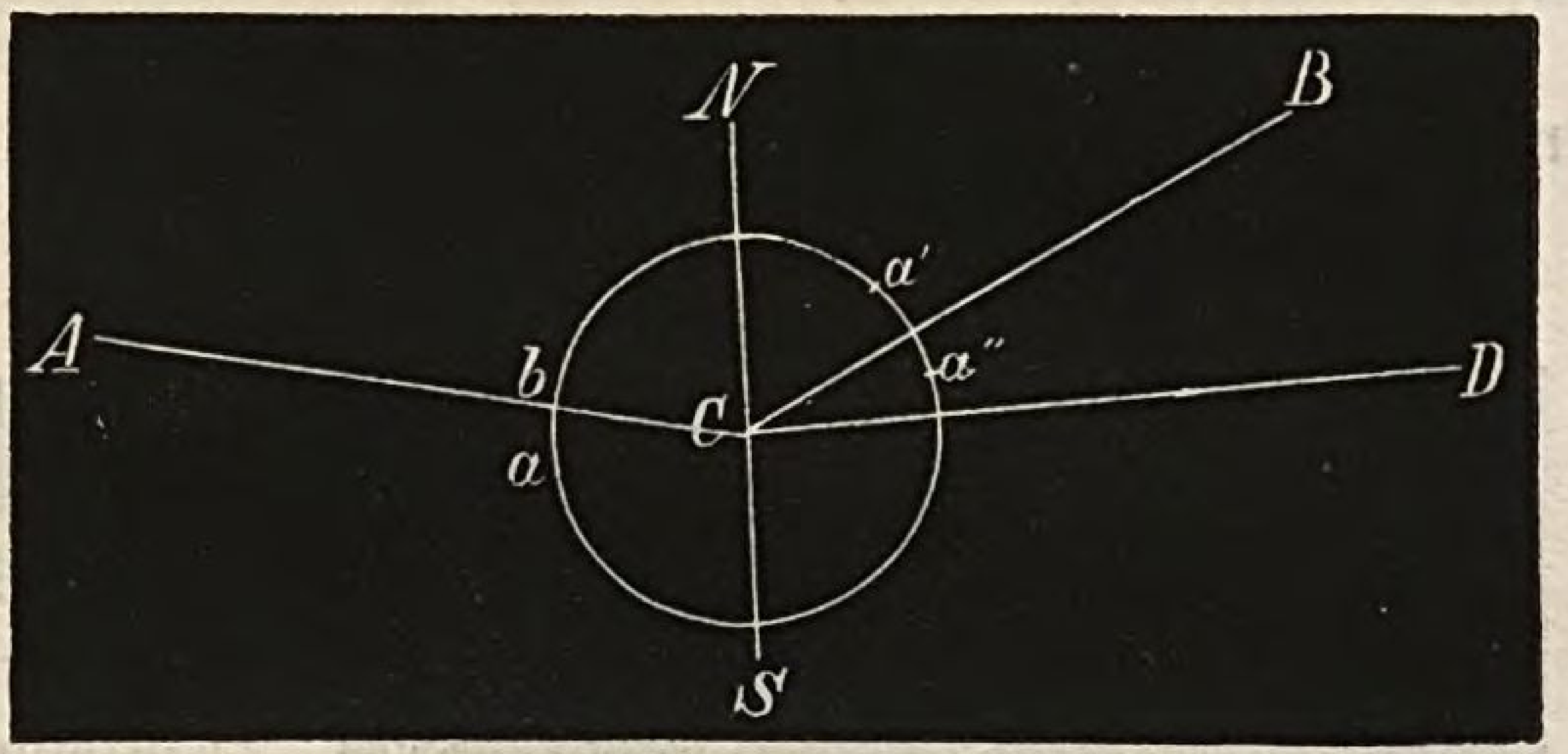
Ad 2. Ist der erste Anstand behoben, die Boussolen-Platte nach der vorigen Rektifikation horizontal und die Gnomonspitze mit den beiden Stäben in einer Ebene, so stelle man das Okulardiopter auf und visire durch den untersten Theil der Okularspalte auf die Stäbe, erscheinen diese in der Visur, so hat es die richtige Stellung, wo nicht, so müßte es berechtigt werden.

Die weitere Rektifikation ist genau der bei dem Diopterlineal §. 102 angegebenen gleich.

Ad 3. Will man untersuchen, ob zwei Seiten der Platte unter sich und mit der Visirebene parallel sind, so schraube man jene von der Hülse ab, lege sie auf eine Ebene, ziehe neben den betreffenden Seiten dünne Bleilinien, und untersuche den Abstand derselben an mehreren Stellen mittelst eines guten Zirkels.

Zusatz. Bei vielen Boussolen findet man zum Visiren ein Fernrohr angebracht, dieses aber außerhalb des eingetheilten Kreises; daß hiedurch ein bedeutender Fehler im Messen der Winkel entsteht, ist im §. 88 nachgewiesen worden, und das zweite daselbst gewählte Beispiel, wo der Abstand der Visirebene von dem Mittelpunkte des Limbus 4 Zoll angenommen worden ist, gehört bei so konstruirten Instrumenten nicht zu den Seltenheiten.

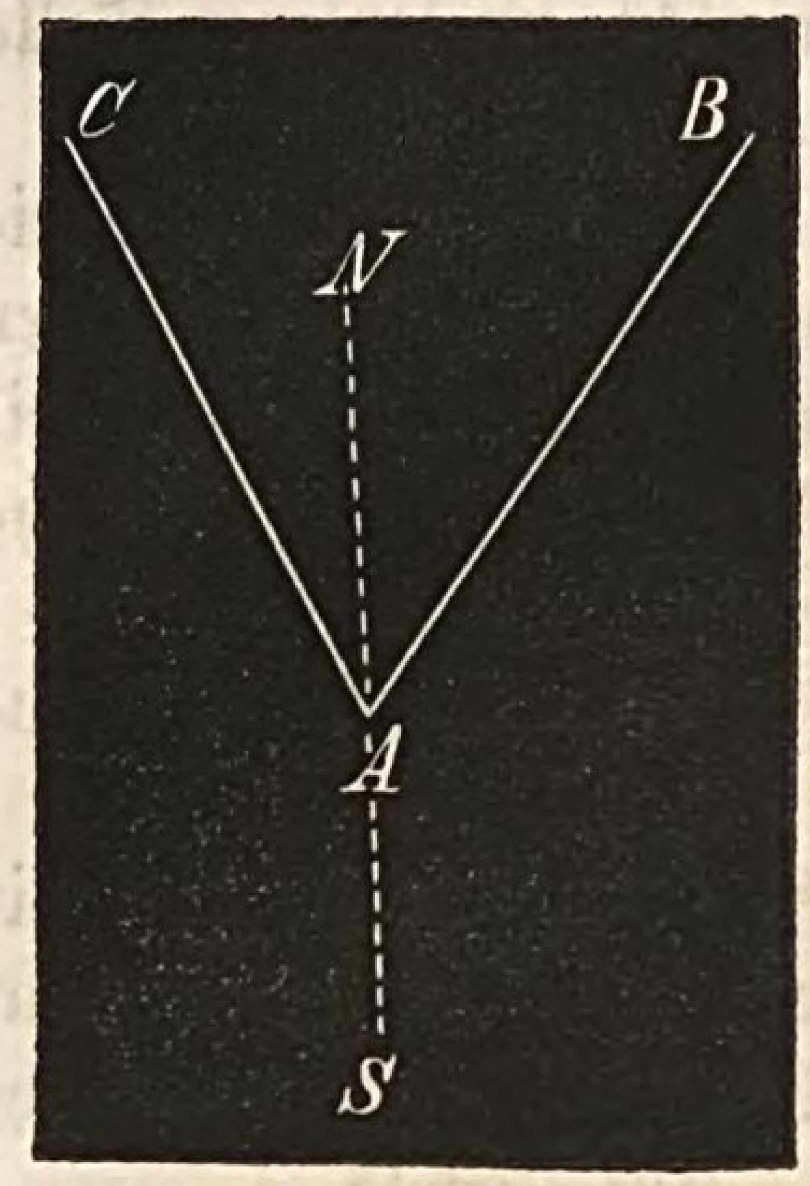
Es ist nicht nöthig, daß der Nullpunkt der Eintheilung in der Visirebene liegt; der Grund dieser Behauptung ist bereits im §. 88 angeführt, läßt sich aber leicht in jedem speziellen Falle aus der Figur folgern. Ist z. B. Fig. 150 CA die Visur nach A, der Nullpunkt in a, ab = n^0, NS die Richtung der Magnetnadel, so wird man den Winkel ACN = α um n zu groß erhalten, und dafür $\alpha' = \alpha + n$ ablesen, wird hierauf das Signal B anvisirt, so kommt der Nullpunkt nach a', und der Winkel NCB = β wird um n zu klein gefunden, daher ist das abgesehene Maß $\beta' = \beta - n$, der Winkel ACB = $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ aber doch richtig bestimmt.



Und wäre der Winkel BCD zu messen, so würde bei der Visur nach B die Magnetnadel $\beta' = \beta - n$, bei der Visur nach D, wo dann der Nullpunkt in a'' liegt, $\gamma' = \gamma - n$ zeigen, der Winkel BCD ist aber gleich $\gamma - \beta$ und gleich dem Unterschiede $\gamma' - \beta'$, somit der Winkel BCD ebenfalls fehlerfrei.

Gebrauch des Boussolen-Instrumentes.

§. 132. Soll mit diesem ein Winkel CAB, Fig. 151 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) gemessen werden, so wird dasselbe in A centrisch und der Limbus so gestellt, daß sich die Magnetnadel genau in der Ebene des Gradringes bewegt; nun wird die Visirebene auf das links liegende Signal C einvisirt, und nachdem die Nadel NS zur Ruhe gekommen ist, ihr Stand m^0



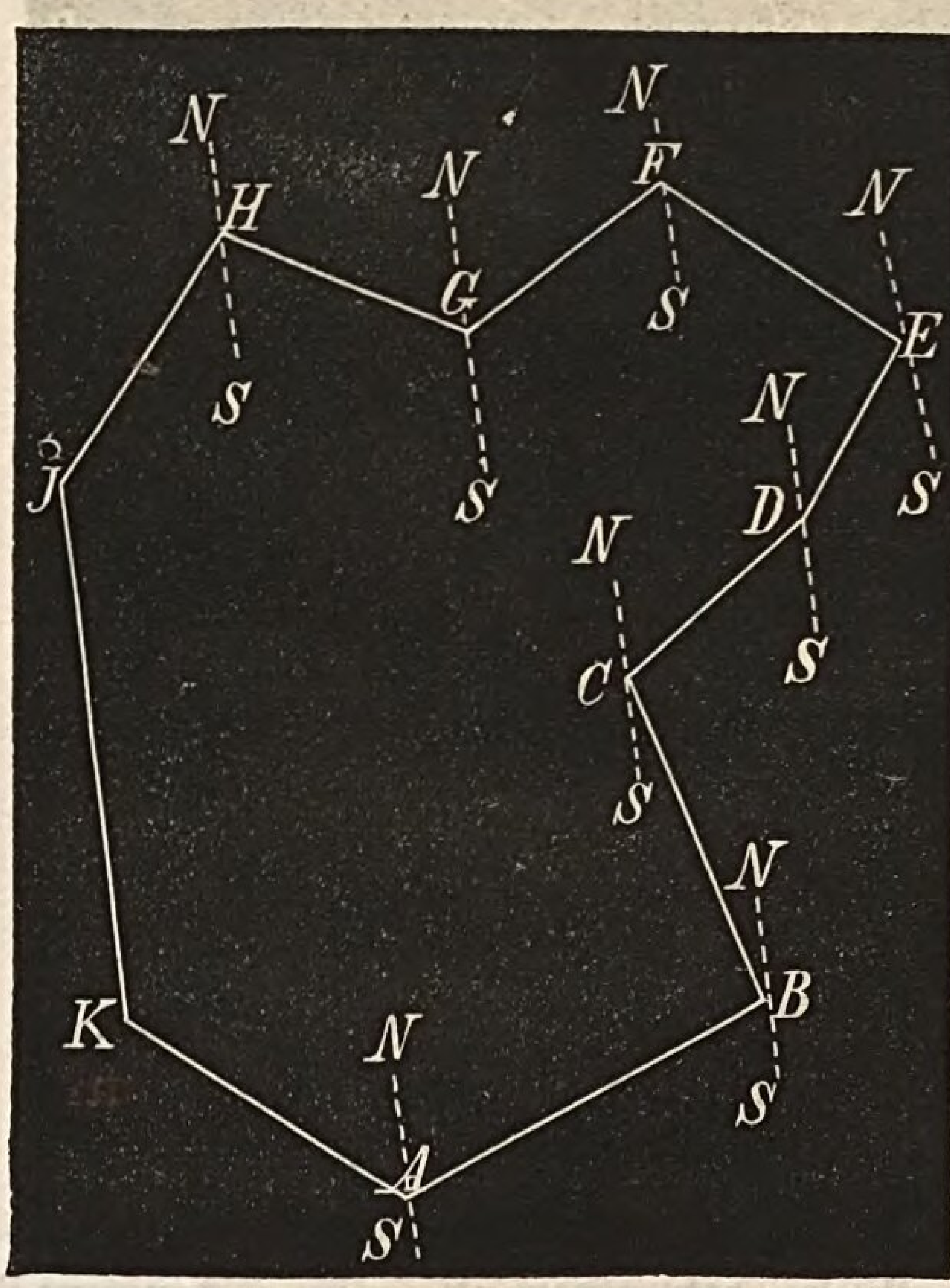
abgelesen, wodurch man den Winkel CAN = 360 — m⁰ erhält. Hierauf drehe man die Visirebene auf das zweite Signal B, lasse die Nadel zur Ruhe kommen, und lese ihren Stand ab, dieser sei für den Winkel NAB = n^0, so ist das Maß des Winkels CAB = 360 + n — m Grade.

Es ist sehr zu empfehlen, die Anzahl Grade und Minuten sowohl an der Nord- als Südspitze abzulesen, und in dem geführten Manuale besonders, also jede in eine eigene Rubrik einzutragen; denn dadurch wird einer Irrung leichter vorgebeugt, der Fehler wegen der Excentricität der Gnomonspitze beseitigt, und endlich der Winkel auch aus dem Grunde genauer bestimmt, weil es nicht wahrscheinlich ist, daß man beiderseits zu viel oder zu wenig abliest.

Die Richtkraft der Magnetnadel kann man in jedem Standpunkte sehr leicht dadurch prüfen, daß man das Instrument horizontal stellt, die Visirebene so weit dreht, bis die Nadel auf einen gewählten Strich scharf einspielt, und in der so bestimmten Visirebene entweder einen fixen Punkt aufsucht oder einen Stab stellen läßt. Dreht man nun die Boussole ein wenig und bringt nebstdem die Magnetnadel aus ihrer Ruhe, nachdem sie aber zu oszilliren aufgehört hat, denselben Strich des Gradbogens zu der Spitze, so soll die Visirebene auch auf denselben Punkt treffen.

§. 133. Mittelst dieses Instrumentes kann auch ein Polygon mit Springständen vermessen werden.

Hat man z. B. das Instrument zuerst in A, Fig. 152, aufgestellt, und K anvisirt, so gibt der Stand der Magnetnadel den Winkel KAN = a_1; nun wird das Signal B anvisirt, dadurch der Winkel NAB = a_2 und durch die Summe beider der Winkel KAB = $a_1 + a_2$ bestimmt. Vom Standpunkte A geht man nach C und bestimmt daselbst die Winkel NCD = c_1 und NCB = c_2; weil aber die Richtung der Magnetnadel in allen Standpunkten eines Polygons als Parallel vorausgesetzt werden kann, so ist der Winkel ABS = a_2; CBN = 180 — c_2 und ABC = 180 — (ABS + CBN) = $c_2 - a_2$, somit durch die gemessenen Winkel ausgedrückt. Von C geht man nach E und bekommt daselbst die Winkel NEF = e_1; NED = e_2; mit c_1 und e_2 läßt sich wieder der Winkel CDE berechnen, und auf diese Art die ganze Messung ausführen.



Wie man aus diesem Beispiele sieht, ist bei dieser Art Winkel zu messen eine gute Handskizze unerläßlich, und das Eintragen der gemessenen Winkel auch in dieselbe gleich an Ort und Stelle sehr zu empfehlen.

§. 134. **Sind bei einem Polygone mittelst der Kette die Seiten und mittelst der Boussole die Winkel gemessen, so kann dasselbe mit Hilfe des Instrumentes auch konstruirt werden.**

Zu diesem Zwecke schraubt man die Boussolenplatte von der Hülse ab, legt jene auf einen aufgespannten Bogen Papier und dreht das Reißbret so, daß die Magnetnadel genau auf denselben Punkt einspielt, den sie bei der ersten Visur, z. B. von A nach K, Fig. 152, gehabt hat. In dieser Lage muß das Reißbret während der ganzen Konstruktion unverändert erhalten werden.

Nun zieht man an einer mit der Visirebene parallelen Kante des Gehäuses eine gerade Linie AK, steckt in einem ihrer Punkte A eine feine Anschlagnadel, dreht um diese die Platte so weit, bis die Magnetnadel auf jenen Grad einspielt, den sie bei der Visur nach B gehabt hat, und zieht neben derselben Kante von der Anschlagnadel aus eine zweite Linie AB, so ist der konstruirte Winkel dem gemessenen gleich. Trägt man auf die Schenkel von A aus die gemessenen Längen auf, so hat man auf dem Papiere die Punkte K, A und B bestimmt.

Im Punkte B wird wieder die Anschlagnadel eingesetzt, dieselbe Kante der Boussole an B angelegt und so gedreht, daß die Magnetnadel denselben Stand hat, wie bei der Visur von C nach B, sodann neben der Kante eine Bleilinie gezogen; wird auf dieser die Länge der Seite BC aufgetragen, so ist der Punkt C bestimmt; auf diese Art wird das ganze Polygon gezeichnet. Entsteht ein Zweifel, ob der zu konstruirende Winkel hohl oder erhaben sei, so muß dieser durch die Handskizze behoben werden.

Das Astrolabium.

Beschreibung des einfachen Astrolabiums.

§. 135. Dieses, das älteste unter den Winkelinstrumenten, deren wir uns gegenwärtig bedienen, ist ein Geschenk der Astronomie, und zwar von jener Zeit her, als die praktische Geometrie noch nichts Besseres gehabt hat *).

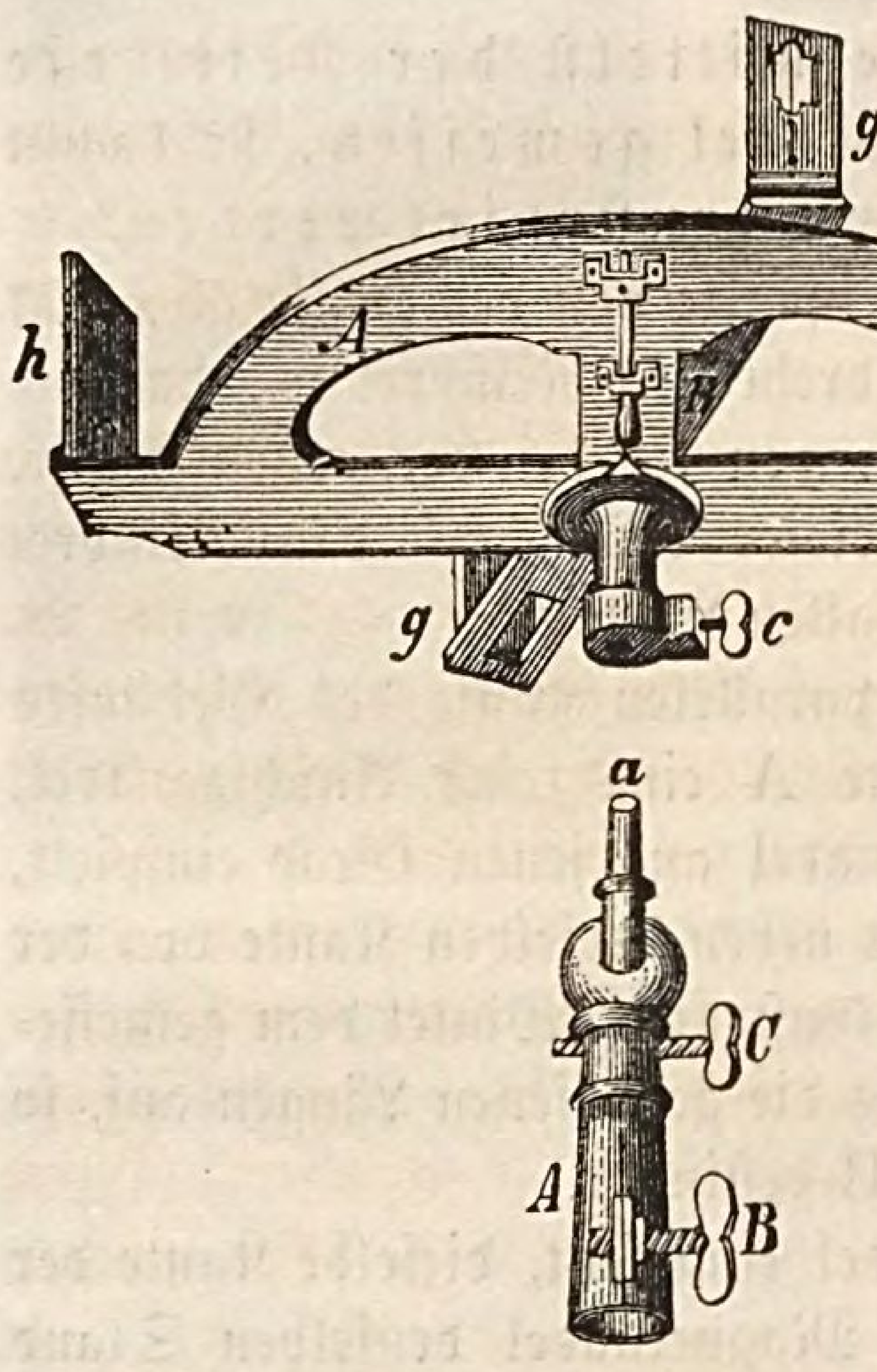
*) Das Wort Astrolabium ist aus *αστρον*, *ȣ* Stern, und *λαμβάνω* nehmen zusammengesetzt, bedeutet also ein Instrument zum astronomischen Gebrauche; allein mit diesem Worte scheint ehemals auch die auf die Konstellation der Gestirne basirte Astrologie benannt, und so das Mittel mit dem Zwecke verwechselt worden zu sein. In diesem letzteren Sinne ist das Buch des Johann Angeli geschrieben: Astrolabium planum in tabulis ascendens, continens qualibet hora atque minuto, aequationes domorum coeli, horam nati in utero matris cum quodam tractatu nativitatum utili ac ornato, nec non heras inaequales pro quolibet climate mundi. Augsburg. 1448.

Die erste Nachricht von der Existenz des Astrolabiums als Winkelinstrument findet man in Ptolomaei Almagest, lib. V. cap. 1. de constructione instrumenti quod astrolabium vocatur.

Die Eintheilung der Peripherie in 360 Grade, jeden Grad in 60 Minuten 2c. war (Whewell's Geschichte der induktiven Wissenschaften) schon zur Zeit des Hipparch's üblich.

Außer dem Ptolomäus haben noch mehrere alte Schriftsteller über das

Die einfachste Konstruktion des Astrolabiums ist aus der Fig. 153 ersichtlich.



Der Limbus A ist gewöhnlich ein halber Kreis aus Messing, zur Verminderung seines Gewichtes ist dieser durchbrochen, die Peripherie von 20 zu 20 Minuten eingetheilt, aber von 5 zu 5 Graden nach beiden Seiten nummerirt, der Halbmesser der eingetheilten Peripherie 6 bis 10 Zoll. Mit der Ebene des Limbus parallel ist die Alhidade B beweglich, trägt an ihren Enden die Diopter g, g′, welche senkrecht auf die Ebene des Limbus stehen, und zum Vor- und Rückwärtsvisiren eingerichtet sind. An beiden Enden der Alhidade sind wegen der doppelten Nummerirung zwei neben einander liegende nachtragende Nonien, mittelst welchen der gemessene Winkel bis auf zwei Minuten abgelesen werden kann.

Astrolabium schätzbare Werke geliefert, von denen wir hier einige anführen wollen, diese sind:

Beda venerabilis (geb. 672, gest. 735) libellus de astrolabio. 1. tom.

Appianus Peter (genannt **Benewitz**) in seiner Cosmographia et Geographia. Landshut. 1524.

Köbelius Jakob: Astrolabii declaratio, ejusdem usus mire jucundus non modo Astrologis, Medicis, Geographis ceterisque literarum cultoribus multum utilis ac necessarius; verum etiam etc. etc. Mainz 1535.

Stöffler Johann: De compositione aut fabrica et usu astrolabii. Mainz.

Regiomontanus Johann: Scripta de Torqueto, Astrolabio armillari, regula magna Ptolomaica etc. Nürnberg 1544.

Münster Sebastian: Organum uranicum. Basil. 1536.

Das in diesen Werken beschriebene Astrolabium hat noch kein Stativ, dieses erhielt es erst im Anfange des 17. Jahrhunderts.

Da zu jener Zeit die praktische Mechanik noch weniger als gegenwärtig im Stande war, den Anforderungen der Astronomie und dies besonders hinsichtlich der Eintheilung des Limbus zu genügen, so verfiel **Tycho de Brahe** auf die Idee, die Transversaltheilung auch auf die Peripherie der astronomischen Kreise anzuwenden (§. 58, Anmerkung). Diese Einrichtung, die in der damaligen Zeit viel Beifall gefunden zu haben scheint, hat man auch auf das Astrolabium angewendet, doch solche Instrumente, wo an der Peripherie des Limbus statt der Grad- eine Transversaltheilung angebracht ist, sind jetzt selten.

Wie eine solche Theilung zu konstruiren, und wie an derselben die Größe eines Winkels abzulesen ist, hierüber kann man nachsehen: Unterricht zur praktischen Geometrie von Tobias **Mayer**. Göttingen 1802. 1. Theil §. 80.

In dem 18. Jahrhundert hat man den Limbus doppelt, und zwar den Quadranten in 90 und 96 Theile getheilt, und weil die letztere Theilung durch eine rein geometrische Konstruktion ausführbar ist, somit damals genauer als die gewöhnliche Eintheilung hergestellt werden konnte, die Richtigkeit der einen durch die andere geprüft.

Auf dem Limbus selbst sind auch zwei Diopter h, h' aufgesetzt, und zwar so, daß die durch sie bestimmte Visirebene durch den Anfangspunkt der Theilung und durch den Mittelpunkt des Limbus geht.

Diese Visirebene wird vor dem Anfange der Messung auf ein Objekt eingestellt, und dient zur Kontrolle, daß das Instrument während dem Gebrauche keine Verrückung erlitten hat.

Die Verbindung des Instrumentes mit dem Zapfenstativ ist bereits im §. 70 erklärt worden.

Der Limbus dieses Astrolabiums kann auch in die vertikale Ebene und sodann die durch die Diopter h, h' bestimmte Visirebene horizontal gelegt werden. Zu diesem Zwecke hat die Fassung der Nuß einen Ausschnitt, der so tief ist, daß, wenn die Klemmschraube C nachgelassen ist, die Achse des Kegels a horizontal gestellt werden kann, und da die Ebene des Limbus auf die Achse senkrecht steht, so ist jene Ebene vertikal. Um noch die Visirebene horizontal zu machen, ist an der untern Ebene des Limbus ein messingenes Loth m angebracht; wird nun diese Ebene um die Achse des Kegels a so gedreht, daß die Spitze des Lothes auf den ihr angewiesenen Punkt einspielt, so ist die durch h, h' bestimmte Ebene horizontal, und wird in dieser Lage durch die Klemmschraube e gehalten. Durch diese Einrichtung kann das Astrolab auch zur Messung der Höhen- oder Tiefenwinkel gebraucht werden.

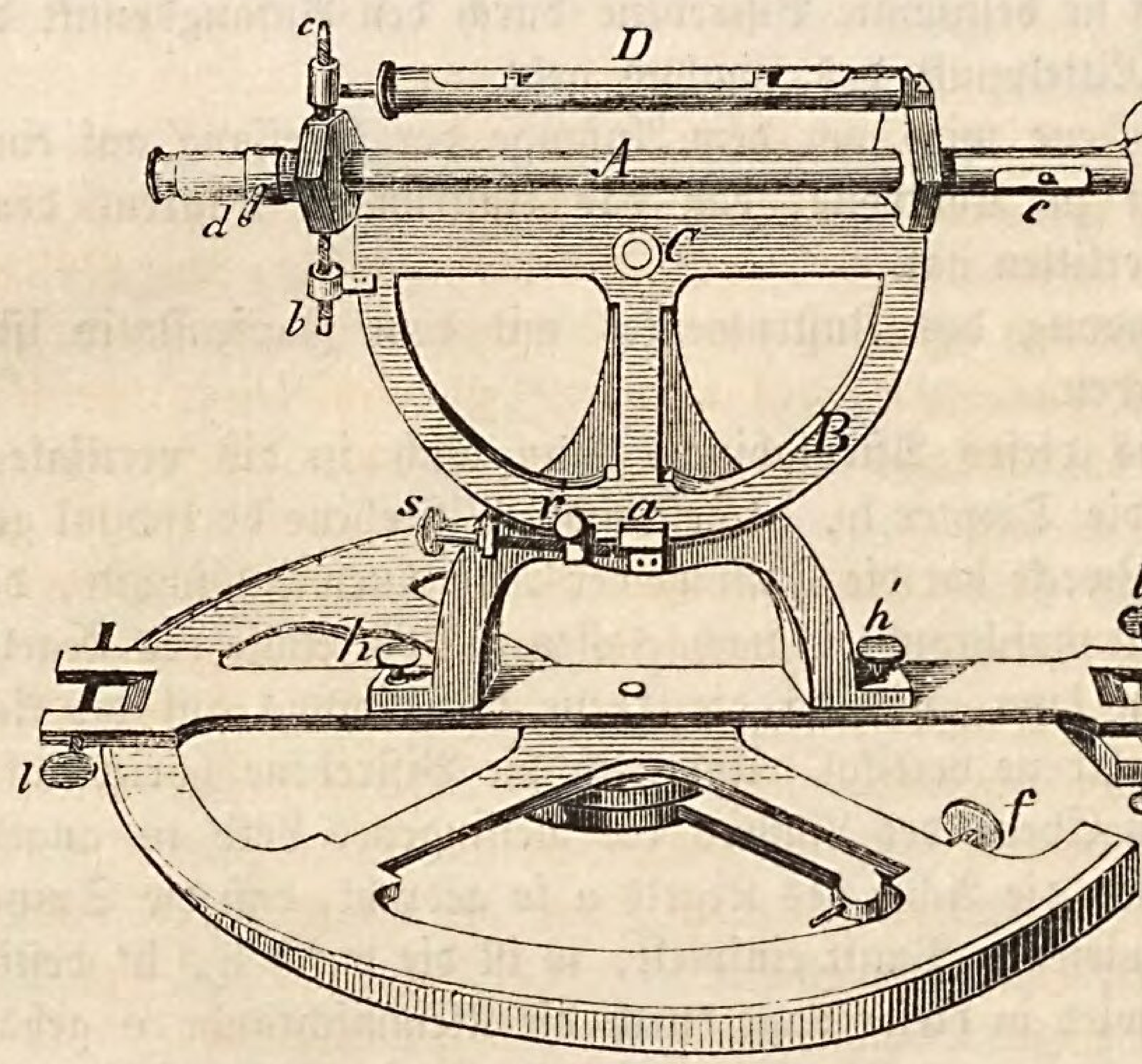
Dieses Instrument trägt alle Gebrechen an sich, die wir im §. 90 besprochen haben; man kann nur, falls die Diopter auf dem Limbus nicht senkrecht ständen, diese auf dieselbe Art, wie es bei dem Diopterlineale §. 102 erklärt worden ist, berichtigen, und da die Eintheilung des Limbus aus freier Hand ausgeführt ist, die Gleichheit der Intervalle untersuchen. Man stellt nämlich den Nullpunkt des Nonius mit dem Anfange der Eintheilung in eine gerade Linie, so müssen bei diesem Instrumente 10 Intervalle des Nonius 9 Intervallen des Limbus gleich sein.

Führt man die Einstellung des Nullpunktes durch alle Striche des Halbkreises durch und benützt dabei eine Loupe, so wird man jeden fehlerhaften Strich entdecken.

Beschreibung des Astrolabiums von Voigtländer.

§. 136. An dem in der Fig. 154 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) dargestellten Instrumente sind die im §. 90 erwähnten Uebelstände der Diopter durch ein nicht achromatisches astronomisches Fernrohr A von 18 Zoll Länge beseitigt, dieses ist um den Punkt C beweglich, auch ist mit dem Fernrohre der vertikal stehende von 20 zu 20 Minuten eingetheilte Gradbogen B verbunden, an dem die Höhenwinkel mittels des nachtragenden Nonius a bis auf zwei Minuten abgelesen werden können. Oberhalb des Fernrohres ist eine Libelle D mit diesem verbunden, und dient dazu, den Limbus, und wenn es nöthig ist, die optische Achse horizontal zu stellen, wo sodann der Nullpunkt der Eintheilung an dem vertikalen Gradbogen mit dem Nullpunkte der zwei neben einander liegenden Nonien a übereinstimmen soll.

Fig. 154.



Die beiläufige Richtung auf das zu pointirende Objekt in der vertikalen Ebene erhält das Fernrohr mit der Hand bei gelockerter Klemmschraube r, nachdem sodann diese wieder angezogen ist, wird die scharfe Einstellung durch die Mikrometerschraube s bewirkt. Mittelst der Rektifikationsschraube b kann dem Fernrohre eine kleine Neigung gegen den Horizont ertheilt werden; c ist die Rektifikationsschraube der Libelle; das Fadenkreuz läßt sich mittelst des Schräubchens d in der horizontalen Richtung verstellen und sodann sammt dem Ringe etwas drehen, wodurch der eine Faden vertikal, der andere horizontal gestellt wird, das Fadenkreuz ist längs der optischen Achse nicht verschiebbar, dagegen das Objektivglas mittelst des Stiftes e beweglich. Das Fernrohr ist sammt dem Gradbogen an die Alhidade durch die zwei Schrauben hh befestigt.

Der Halbmesser des Limbus ist 9, selten 12 Zoll, nur ein halber Kreis, von 20 zu 20 Minuten eingetheilt, und doppelt in der entgegengesetzten Richtung von 5 zu 5 Graden nummerirt; mittelst der an den Enden der Alhidade angebrachten Nonien, wovon immer zwei neben einander liegen, kann der Winkel bis auf zwei Minuten abgelesen werden.

Die Alhidade hat ihre Klemmschraube bei k, l ist ihre Mikrometerschraube, eine kleine Bewegung kann der Limbus sammt der Alhidade durch die Schraube f erhalten.

Zu diesem Instrumente gehört ein Zapfenstativ, die Verbindung beider ist im §. 70 Fig. 66 näher erklärt worden.

Rektifikation des Astrolabiums von Voigtländer.

§. 137. Die Aufeinanderfolge der Rektifikationen ist folgende:

a) der Limbus wird horizontal gestellt;

b) das optische Bild in die Ebene des Fadenkreuzes und

c) die optische Achse in die horizontale Lage gebracht;

d) die Bewegung des Fernrohres in der vertikalen Ebene untersucht;

e) der eine Faden vertikal gestellt.

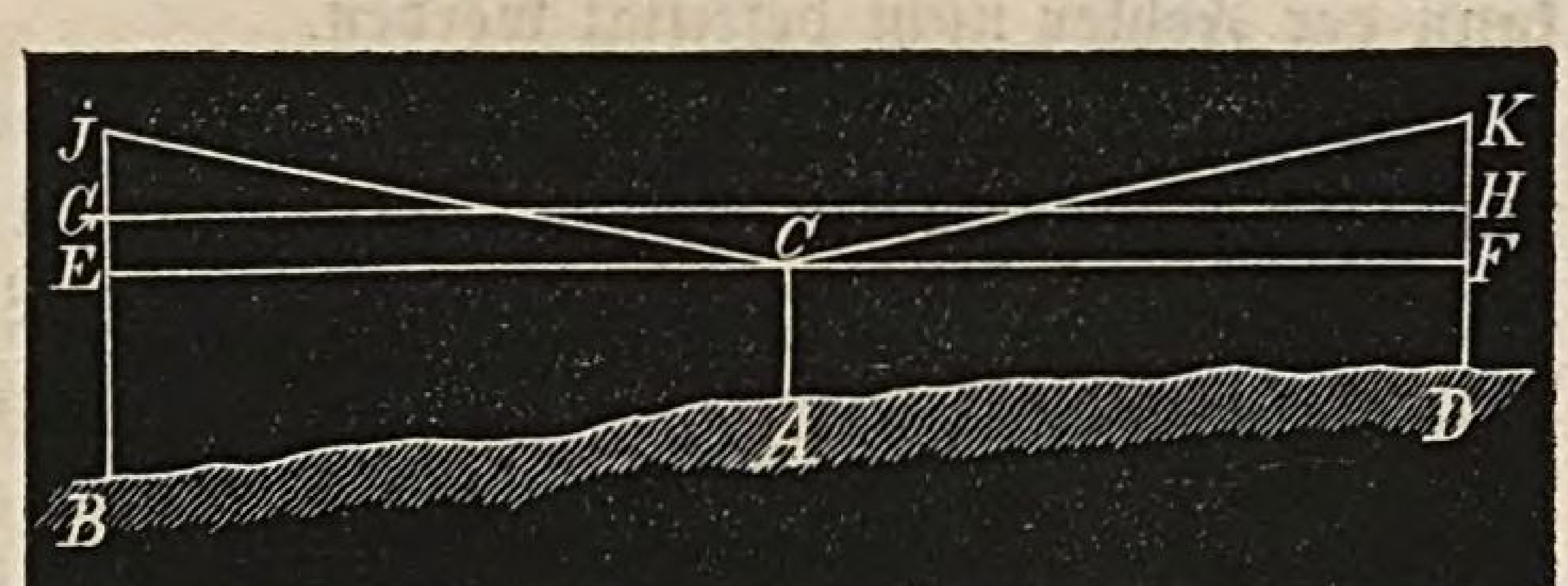
Ad a. Um den Limbus mittelst der Libelle D horizontal zu stellen, bringe man die Alhidade in die Richtung zweier Stellschrauben, den Nullpunkt des vertikalen Gradbogens mit dem Nullpunkte des Nonius in eine gerade Linie, und die Libelle mittelst der gewählten Stellschrauben zum Einspielen; hierauf drehe man die Alhidade um 180 Grade, und sehe nach, ob die Blase wieder einspielt oder nicht. Geschieht das letztere, so muß die Blase zur Hälfte des Weges, um welchen sie ausgewichen ist, mittelst der zwei Stellschrauben des Limbus, die andere Hälfte mittelst der Rektifikationsschraube c zurückgeführt werden.

Diese Operation wird so oft wiederholt, bis die Blase in beiden Stellungen der Alhidade genau einspielt. Nun wird die letztere in die Richtung der zwei andern Stellschrauben und die Blase mittelst derselben zum Einspielen gebracht, dann ist der Limbus horizontal gestellt, und die Blase soll bei einer Bewegung der Alhidade ihren Ort nicht ändern.

Der Grund dieses Verfahrens ist im §. 84 angegeben.

Ad b. Der Beobachter stellt das Okularglas nach der Eigenthümlichkeit seines Auges so, daß ihm das Fadenkreuz sehr deutlich erscheint, hierauf visirt er das Fernrohr auf ein entferntes Objekt ein, und stellt das Objektivglas so weit, daß das Bild des Objektes deutlich erscheint. Um nun zu prüfen, ob das optische Bild genau in der Ebene des Fadenkreuzes liege, wende man das im §. 107 ad 2 angegebene Mittel an, bleibt das Fadenkreuz und Bild nicht unbeweglich, so muß das Objektivglas ein wenig verstellt werden.

Ad c. Bei dieser Rektifikation wird vorausgesetzt, daß das Instrument in einem freien, ebenen Boden aufgestellt ist, der Limbus horizontal, und der Index des vertikalen Bogens auf Null der Eintheilung steht. Das weitere Verfahren ist nun folgendes: Ist Fig. 155 A der Standpunkt des Instrumentes, so wird in einer Entfernung circa 100 Klafter vom Instrumente, z. B. in D, ein eingetheilter Maßstab vertikal gestellt, das Fernrohr mittelst der Alhidade allein auf den Maßstab eingestellt und nachgesehen, ob die Blase genau einspielt, wo nicht, durch die Stellschrauben zum Einspielen gebracht; zuletzt auf dem Maßstabe der Punkt ausgemittelt, wohin die Visur trifft.



Ist ECF der durch das Okular gelegte Horizont, CK die Visur, also KCF der Winkel, um welchen jene von dem Horizonte ausweicht, K der Punkt des vertikalen Maßstabes, den die Visur trifft, so erhält man die Länge der Linie DK, ihre Länge sei = h.

Nun drehe man die Alhidade um 180 Grade, stelle den Maßstab in diese Visur, z. B. in B aber so, daß AD = AB ist, die Blase auf ihren Ort aber=

mals durch die Stellschrauben, und bemerke jetzt, welchen Punkt die Visur auf dem Maßstabe trifft; dieser sei I und BI = h'.

Da nun die Libelle bei beiden Visuren genau eingespielt hat, so hat das Fernrohr gegen den Horizont gleiche Lage, somit ist FCK = ICE, und da bei E und F rechte Winkel sind, so ist das Dreieck ICE mit FCK kongruent, daher FK = EI, und die Punkte I und K eben so wie E und F in einer horizontalen Linie.

Nun trägt man das Astrolabium auf den Punkt D, stellt daselbst die Okularöffnung über diesen Punkt, das Instrument horizontal, mißt dann die Höhe der Okularöffnung oberhalb D, diese sei DH = l.

Denkt man sich durch H einen mit EF parallelen Horizont HG gelegt, so ist BG = BI — IG = BI — (KF — HF) = BI — (DK — DH) = h' — h + l, also bekannt, trägt man dieses Maß auf den Maßstab in B auf, bemerkt man also auf diesem durch ein Zeichen die Höhe (h' — h + l), so bekommt man beim vertikalen Stande des Maßstabes einen Punkt G, welcher mit H in einer horizontalen Linie liegt.

Nun wird das Fernrohr durch die Schraube b so bewegt, daß der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes auf den bestimmten Punkt des Maßstabes trifft, so ist die optische Achse horizontal; weil aber durch diese Bewegung des Fernrohres die Blase aus der Mitte gebracht wurde, so muß sie durch die Schraube c allein zurückgebracht werden. Eine Wiederholung dieser Rektifikation ist nicht zu unterlassen.

Ad d. Man stellt zum Behufe dieser Untersuchung eine Fahnenstange in einer ziemlich großen Entfernung vertikal auf, die optische Achse auf dieses Signal scharf ein, und bewege das Fernrohr in der vertikalen Richtung, bleibt der Durchschnittspunkt der Fäden nicht in der Mitte des Signals, so versuche man durch Drehung des Schräubchens d, wodurch der Winkel zwischen der Drehungsachse C und der optischen des Rohrs geändert wird, diesen Fehler weg zu bringen, geht dies nicht an, so hat auch die Drehungsachse nicht ihre gehörige Lage, und dann kann der Fehler nicht beseitigt werden.

Ad e. Diese Rektifikation ist von der vorhergehenden abhängig, und kann nur dann vorgenommen werden, wenn die ad d geendet ist. Das hiezu nöthige Verfahren ist bereits beim Perspektivlineale §. 107 sub 6 beschrieben worden, braucht daher nicht wiederholt zu werden. Die vertikale Stellung erhält der Faden durch die Drehung des Ringes sammt der mit d bezeichneten Schraube.

Die Konstruktion dieses Instrumentes ist jedoch der Art, daß einige Fehler nicht erkannt, somit auch nicht beseitigt werden können, diese sind:

1. der Fehler wegen der Excentricität der Alhidade, weil der Limbus kein voller Kreis ist;

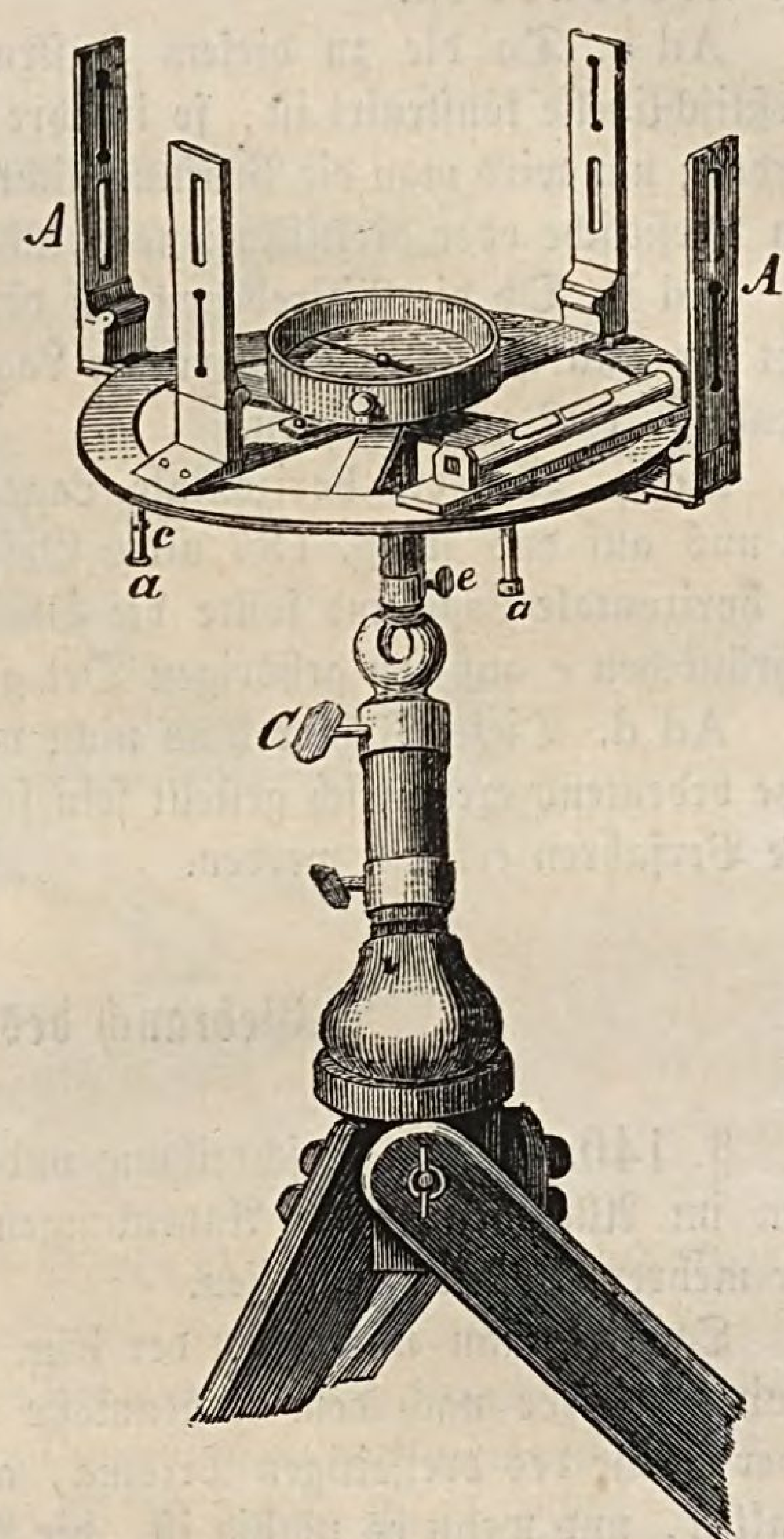
2. der Fehler falls die Visirebene nicht durch den Mittelpunkt des Limbus geht;

3. durch die Einrichtung, daß sich die optische und Drehungsachse nicht schneiden, werden die Höhenwinkel ungenau bestimmt, endlich

4. ist das Instrument für ein Zapfenstativ zu schwer, und eine kleine Senkung insbesondere der Alhidade unvermeidlich.

Beschreibung des Astrolabiums von Kraft.

§. 138. Das Astrolabium aus der Werkstätte des Mechanikers Kraft ist in der Fig. 156 dargestellt.



Der Limbus trägt zwei unbewegliche zum Vor- und Rückwärts-Visiren eingerichtete Diopter AA, ist ein voller von 20 zu 20 Minuten eingetheilter Kreis, die Nummerirung der Grade geht von der untern Okularöffnung angefangen nach entgegengesetzten Richtungen bis 360°. Die Diopter der Alhidade sind jenen am Limbus gleich, in der durch diese bestimmten Visirebene ist der Nullpunkt zweier gegenüber liegenden Nonien, durch welche die Winkel bis auf eine Minute abgelesen werden können; koncentrisch mit dem Limbus ist an die Alhidade eine Boussole befestiget, die Eintheilung des Gradringes von 30 zu 30 Minuten; Durchmesser der Nadel 4 Zoll.

Bei gelockerter Klemmschraube C kann der Limbus horizontal gestellt, derselbe kann aber auch in die vertikale Ebene umgelegt und die durch die Diopter AA bestimmte Visirebene horizontal gestellt werden; die horizontale Lage sowohl des Limbus als der Visirebene wird an einer Libelle beurtheilt.

Unterhalb des Limbus und senkrecht auf diese Ebene sind nämlich zwei messingene Libellenträger aa eingeschraubt, in einem derselben die Mutter für die kleine Schraube c, die Libelle hat an der untern Ebene eine kleine Vertiefung, mit welcher sie bei vertikal gestelltem Limbus auf die Spitze der Schraube c zu liegen kommt. Ist also der Limbus vertikal und bei gelockerter Schraube e so gedreht, daß die Libellenträger nahe horizontal sind, so wird auf diese die Libelle gehörig aufgelegt, und der Limbus soweit gedreht bis die Blase einspielt, dann ist die Visirebene AA horizontal und wird durch das Anziehen der Schraube e erhalten. Die Verbindung des Limbus mit dem Zapfenstativ ist aus der Figur ersichtlich.

Rektifikation dieses Astrolabiums.

§. 139. Dieses Instrument ist rektifizirt, wenn

a) beim Einspielen der Blase der Limbus horizontal ist;

b) die beiden Visirebenen auf dem Limbus senkrecht stehen;

c) in dem Falle als der Limbus in die vertikale Ebene umgelegt wird, beim Einspielen der Blase jene, durch die an den

Limbus befestigten Diopter bestimmte Visirebene horizontal ist;

d) die Gnomonspitze konzentrisch mit dem Drehungspunkte der Alhidade ist.

Ad a. Da die zu diesem Instrumente bestimmte Libelle genau wie eine Meßtischlibelle konstruirt ist, so ist ihre Rektifikation im §. 84 umständlich erklärt worden; nur wird man die Prüfung nicht auf dem Astrolabium, sondern entweder auf dem Meßtische oder Rektifikationsbrettchen vornehmen.

Ad b. Ob die Visirebenen auf dem Limbus senkrecht stehen und wenn dieß nicht der Fall ist, sie in die vertikale Lage zu bringen, ist genau wie beim Diopterlineale §. 102 zu verfahren.

Ad c. Wie die horizontale Lage der Visirebene auszumitteln ist, berufen wir uns auf das im §. 137 ad c Gesagte; hat aber die angegebene Visirebene die horizontale Lage und sollte die Blase nicht einspielen, so wird sie durch das Schräubchen c auf den gehörigen Ort gebracht.

Ad d. Dieser Fehler kann nicht weggebracht, höchstens wenn die Gnomonspitze bedeutend excentrisch gestellt sein sollte, durch das im §. 131 ad 1 angegebene Verfahren erkannt werden.

Gebrauch des Astrolabiums.

§. 140. Bei der Beschreibung und Rektifikation dieser Instrumente sind auch schon im Allgemeinen die Andeutungen gegeben worden, mittelst derselben ein oder mehrere Winkel zu messen.

Operirt man mit einem der Fig. 153 oder 156 dargestellten Instrumente, so wird dasselbe nach dem Augenmaße centrisch gestellt, die Schnur des Lothes in der Mitte des dreiseitigen Prisma, an welches die Stativfüße geklemmt sind, gehalten, und wenn es nöthig ist, die Aufstellung verbessert.

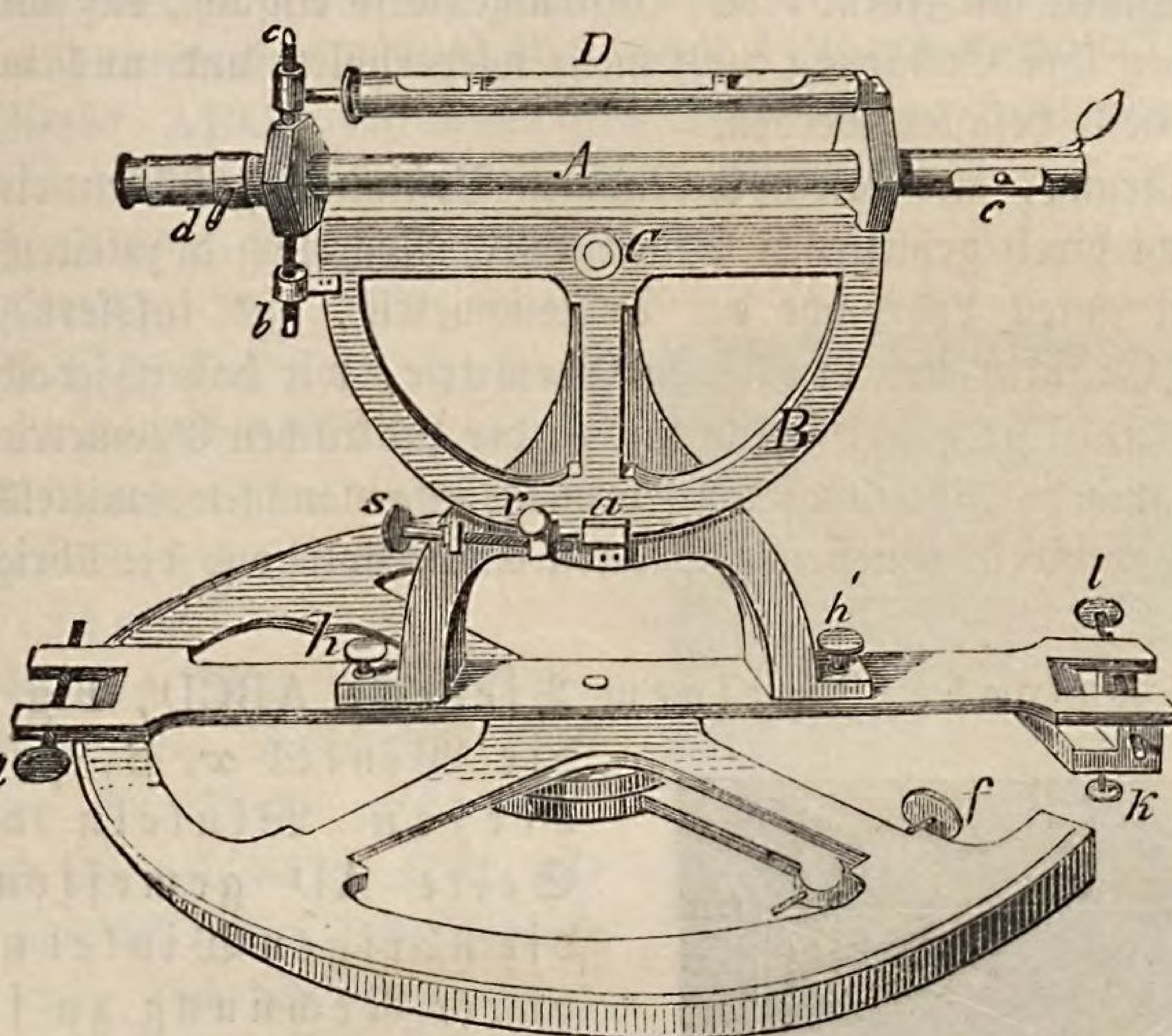
Nun wird die Schraube C soweit gelüftet, daß der Limbus noch durch eine kleine Reibung der Nuß in der ihm ertheilten Lage gehalten wird, die Libelle aufgesetzt und die horizontale Lage des Limbus beurtheilt, spielt die Blase in zwei Lagen der Libelle so ziemlich ein, so wird der Limbus durch die Schraube C geklemmt.

Da man sich nicht verlassen kann, daß jene Visirebene, welche durch die mit dem Limbus verbundenen Diopter bestimmt ist, auch durch den Anfangspunkt der Eintheilung geht, so ist es nicht rathsam, diese auf das eine Signal einzustellen, weil sonst in allen so gemessenen Winkeln ein konstanter Fehler begangen würde; besser ist es, die Klemmschraube e nachzulassen, die erwähnte Visirebene auf irgend ein möglichst weit aber gut sichtbares Objekt einzustellen und sodann den Limbus in dieser Lage wieder durch die Schraube e festzustellen. Während der Messung wird dann die Alhidade auf das erste Signal eingestellt, der Stand des Index abgelesen, hierauf das zweite Signal pointirt, auch diesmal die Anzahl Grade abgelesen, die kleinere Zahl von der größeren abgezogen, so ist der Unterschied das Maß des Winkels.

Zur Ueberzeugung, daß während der Messung der Limbus nicht verstellt

worden ist, kann man nach jedem dritten oder vierten Winkel nachsehen, ob das eingestellte Signal noch von der unbeweglichen Ebene getroffen wird.

Sind aber die Winkel mit dem Astrolabium Fig. 154 zu messen, so wird der



Limbus, nachdem das Instrument centrisch gestellt ist, mittelst der Libelle D horizontal gestellt, wobei vorerst der Nullpunkt des vertikalen Gradbogens mit dem Index des Nonius in eine gerade Linie gebracht werden muß; auch ist beim Horizontalstellen des Limbus die Vorsicht nicht zu unterlassen, die eine der zwei Stellschrauben in demselben Maße nachzulassen, als die andere in die Höhe geschraubt wird, sonst (im günstigsten Falle) verbiegt man die Limbusebene.

Bevor man zur Messung der Winkel selbst schreitet, stellt man den Index der Alhidade auf Null des Limbus, klemmt sie fest und dreht das ganze Instrument, bis irgend ein entferntes Objekt in dem Gesichtsfelde des Fernrohrs erscheint, die genaue Pointirung desselben wird durch die Mikrometerschrauben s und f hergestellt. Läßt man sodann beide Klemmschrauben, nämlich die des vertikalen Gradbogens und der Alhidade nach, so kann man durch die kombinirte Bewegung der Alhidade und des Fernrohrs die optische Achse auf jedes Objekt einstellen, die scharfe Pointirung wieder durch die Schrauben s und l erreichen, den Stand des Index bei geklemmter Alhidade ablesen und das Maß des Winkels auf dieselbe Art wie bei den vorigen Instrumenten erhalten.

Auch hier muß man sich von Zeit zu Zeit überzeugen, ob der Limbus seine anfängliche Lage beibehalten hat, indem man die Alhidade auf Null der Eintheilung stellt und nachsieht, ob die Visur das gehörige Objekt trifft; diese Vorsicht ist nicht zu unterlassen, da das Instrument unzweckmäßig gebaut ist.

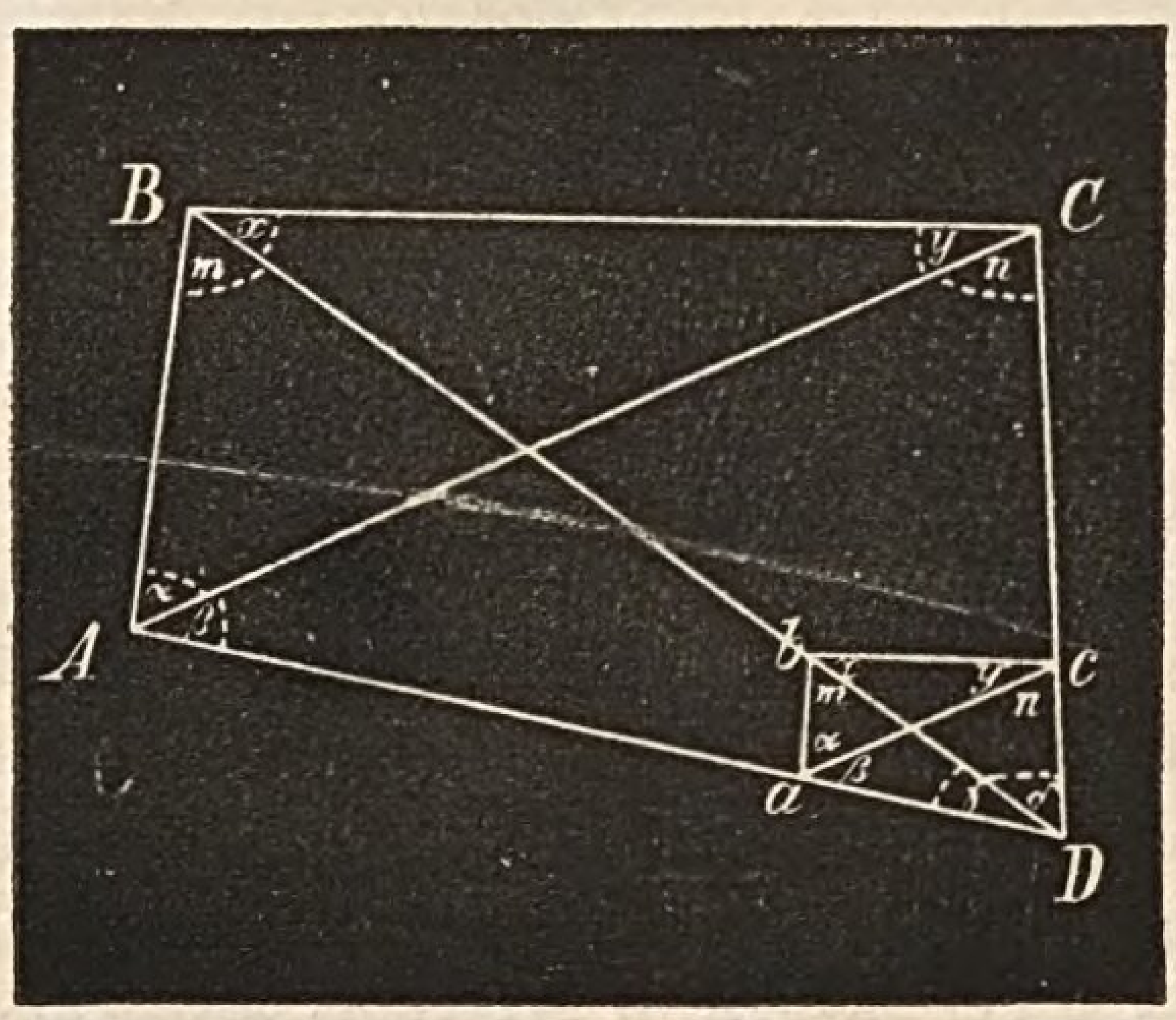
Soll mit einem Astrolabium, dessen Limbus nur aus einer halben Peripherie besteht, ein stumpfer Winkel gemessen werden, so muß man diesen entweder durch einen Stab in zwei andere theilen, oder seinen Nebenwinkel bestimmen, und erhält

im letzten Falle den gegebenen Winkel selbst durch Subtraktion des gemessenen von 180°.

Das Instrument selbst ist um so genauer centrisch aufzustellen, je ungleicher die Schenkel des gemessenen Winkels sind; übrigens ist die Manipulation bei der Messung der Winkel mit jedem dieser Instrumente so einfach, daß wir bei den folgenden Aufgaben ihre Erklärung nicht mehr wiederholen und uns mehr mit dem theoretischen Theile befassen werden.

Die Erklärung, aus den nothwendigen Bestimmungsstücken eines Polygons die übrigen nicht direkt gemessenen Stücke durch Rechnung abzuleiten, findet man zwar in jedem guten Lehrbuche der Trigonometrie, und insofern liegt dieselbe außerhalb der Gränzen der praktischen Geometrie, wir haben jedoch bei den folgenden Aufgaben, da sie hauptsächlich nur in der praktischen Geometrie ihre Anwendung finden, auch die Ableitung der Formeln aufgenommen, mittels welchen aus den erforderlichen direkt gemessenen Stücken eines Polygons die übrigen zu berechnen sind.

§. 141. Aufgabe. In einem Vierecke ABCD, Fig. 157, sind die Winkel α, β, γ, δ und die diesen Winkeln anliegende Seite AD gemessen worden, die übrigen Winkel und Seiten durch Rechnung zu finden.



Auflösung. In dem Dreiecke ADB ist die Seite AD sammt den anliegenden Winkeln bekannt, daher der Winkel ABD, welchen wir mit m bezeichnen wollen, $m = 180 - (\alpha + \beta + \gamma)$; die Seite $AB = \frac{AD \sin. \gamma}{\sin. m}$,

$$BD = \frac{AD \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. m}.$$

Dieselben Stücke sind auch in dem Dreiecke ACD gegeben, daher der Winkel ACD, den wir n nennen wollen, $= 180 - (\beta + \gamma + \delta)$, $DC = \frac{AD \sin. \beta}{\sin. n}$,

$$AC = \frac{AD \sin. (\gamma + \delta)}{\sin. n}.$$

Die Winkel x und y können entweder aus dem Dreiecke ABC oder DBC berechnet werden, zur Kontrolle hat man noch die Gleichung $x + y = \beta + \gamma$, und sind die Winkel x, y gefunden, so unterliegt die Berechnung der Seite BC keiner Schwierigkeit.

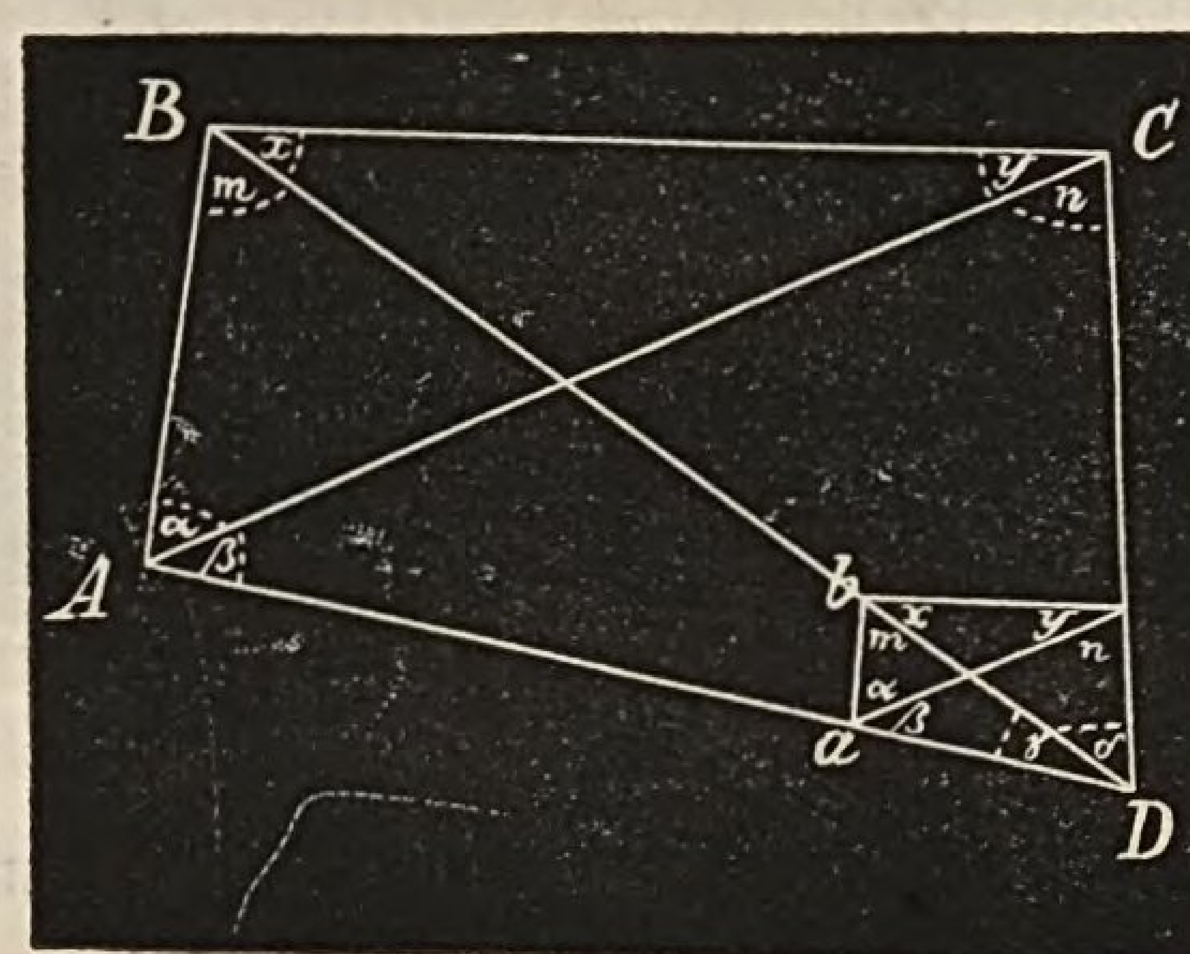
Nimmt man z. B. $\alpha = 36^0 15'$; $\beta = 47^0 48'$; $\gamma = 50^0 13'$; $\delta = 52^0 36'$ und AD = 54·7 Klafter an, so findet man $m = 45^0 44'$; $n = 29^0 33'$, mit diesen die Seite AB = 58·7; BD = 75·97; DC = 82·59; AC = 108·71 Klafter. Aus dem Dreiecke ABC folgt durch Rechnung $\frac{m + x - y}{2} = 42^0 22' 57''$

und da in demselben Dreiecke die Winkel $\frac{m + x + y}{2} = 71^0 52' 30''$ betragen, so ist $x = 68^0 31' 27''$; $y = 29^0 29' 33''$ und zur Kontrolle $x + y = 98^0 1' = \beta + \gamma$.

Dieselben Werthe für x und y hätte man aus dem Dreiecke ACD erhalten, endlich folgt aus einem der Dreiecke BDC oder ABC die Seite BC = 79·50 Klft.

Das Viereck ABCD im verjüngten Maßstabe zu konstruiren, könnte man die Koordynaten der Punkte B und C auf die Abszissenlinie AD berechnen.

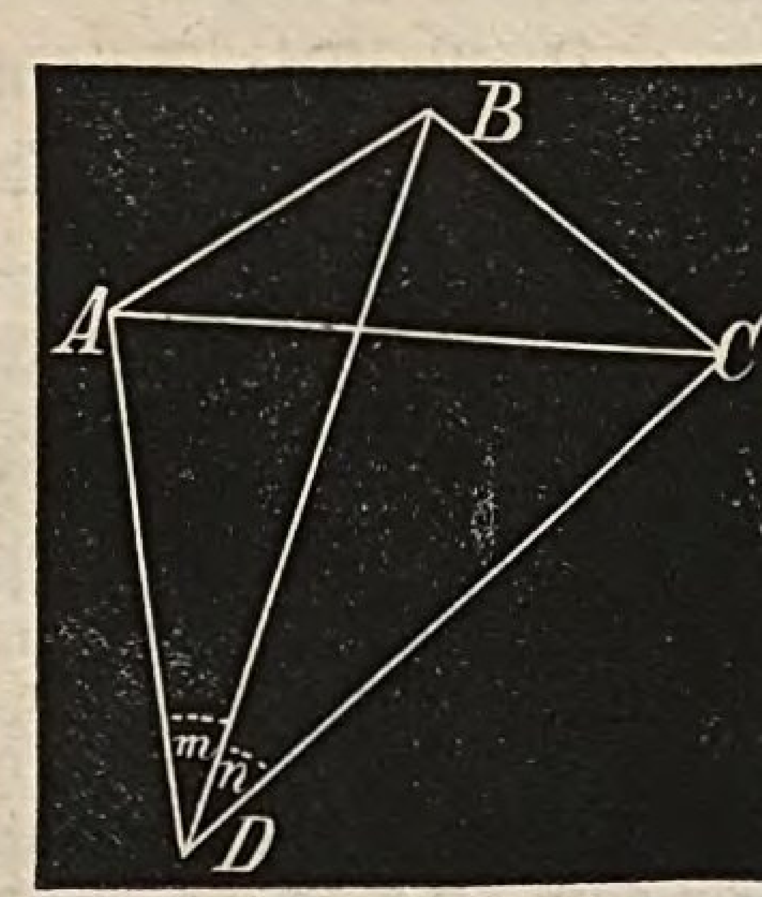
§. **142.** Aufgabe. In einem Vierecke ABCD, Fig. 157, sind die Winkel α, β, γ, δ und die diesen Winkeln gegenüber liegende Seite BC gemessen worden, die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden.



Auflösung. Man denke sich ein Viereck abcD, welches mit ABCD ähnlich ist, daher alle Winkel wechselweise gleich hat, und bei welchen die Seite aD eine Klafter lang ist. Aus dem Vierecke abcD kann man nach der vorigen Aufgabe die Winkel x und y berechnen, und hat sodann in dem Vierecke ABCD alle Winkel und die Seite BC gegeben, kann somit die übrigen Stücke finden.

Um die Auflösung durch ein Beispiel zu erläutern, behalten wir für die Winkel α, β, γ, δ die in dem vorigen Paragraphe angenommenen Werthe bei, so folgt aus dem Dreiecke aDb, weil aD = 1 ist, $bd = \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\sin. m} = 1{\cdot}38893$, aus dem Dreiecke acD, $cd = \frac{\sin. \beta}{\sin. n} = 1{\cdot}50984$; mit diesen zwei Zahlen und dem Winkel δ findet man aus dem Dreiecke bDc; $\frac{x + n + y}{2} = 63^0 42'$, und durch Rechnung $\frac{x - n - y}{2} = 4^0 49' 27''$, somit ist $x = 68^0 31' 27''$ und $y = 29^0 29' 33''$ wie oben.

Ist nun BC = 79·5 Klafter, so können die übrigen Seiten leicht berechnet werden.



§. **143.** Aufgabe. In dem Vierecke ABCD, Fig. 158, sind die Winkel m und n, ferner die Seite AB = a, BC = b sammt dem eingeschlossenen Winkel ABC = α gegeben, die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Setzen wir den Winkel BAD = x, BCD = y und die Diagonale BD = z, so haben wir zur Berechnung der Winkel folgende Gleichungen:

$\alpha + m + n + x + y = 4R$, daraus $\frac{x + y}{2} = 2R - \left(\frac{\alpha + m + n}{2}\right) \ldots\ldots 1).$

Ferner aus dem Dreiecke ABD, $z = \frac{a \sin. x}{\sin. m}$, aus BCD, $z = \frac{b \sin. y}{\sin. n}$, daher

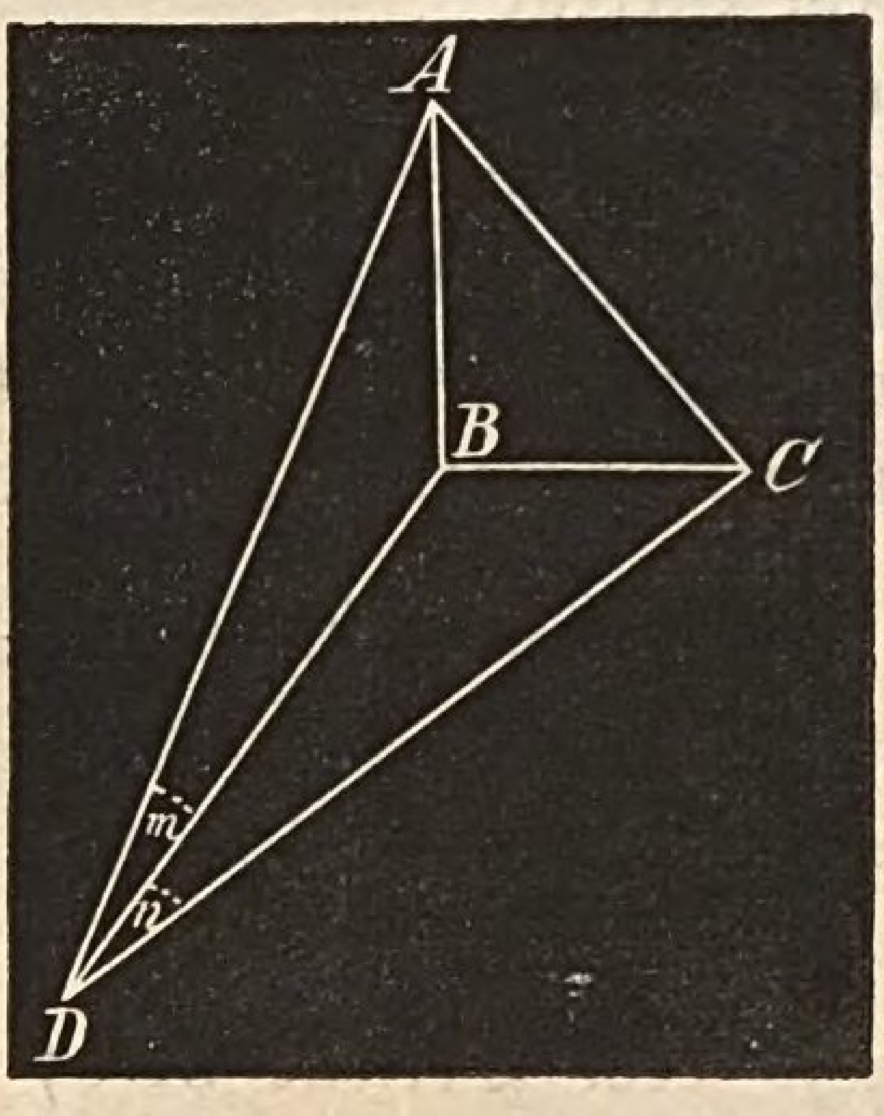
$$\frac{a \sin. x}{\sin. m} = \frac{b \sin. y}{\sin. n} \ldots\ldots 2).$$

Aus dieser Gleichung folgt $a \sin. n : b \sin. m = \sin. y : \sin. x$, oder $(a \sin. n + b \sin. m) : (a \sin. n - b \sin. m) = (\sin. y + \sin. x) : (\sin. y - \sin. x)$, und wegen dem zweiten Verhältnisse $(a \sin. n + b \sin. m) : (a \sin. n - b \sin. m) = \text{tang.} \left(\frac{y + x}{2}\right) : \text{tang.} \left(\frac{y - x}{2}\right)$; aber aus der Gleichung 1) folgt $\text{tang.} \left(\frac{y + x}{2}\right) = \text{tang.} \left(\frac{\alpha + m + n}{2}\right)$, daher ist

$$\text{tang.} \left(\frac{y - x}{2}\right) = \left(\frac{a \sin. n - b \sin. m}{a \sin. n + b \sin. m}\right) \text{tang.} \left(\frac{\alpha + m + n}{2}\right) \ldots\ldots 3).$$

Die Gleichung 1) und 3) bestimmen die Winkel x und y und dann sind die übrigen Stücke leicht gefunden.

Wäre der von den Seiten AB und AC, Fig. 159, eingeschlossene Winkel



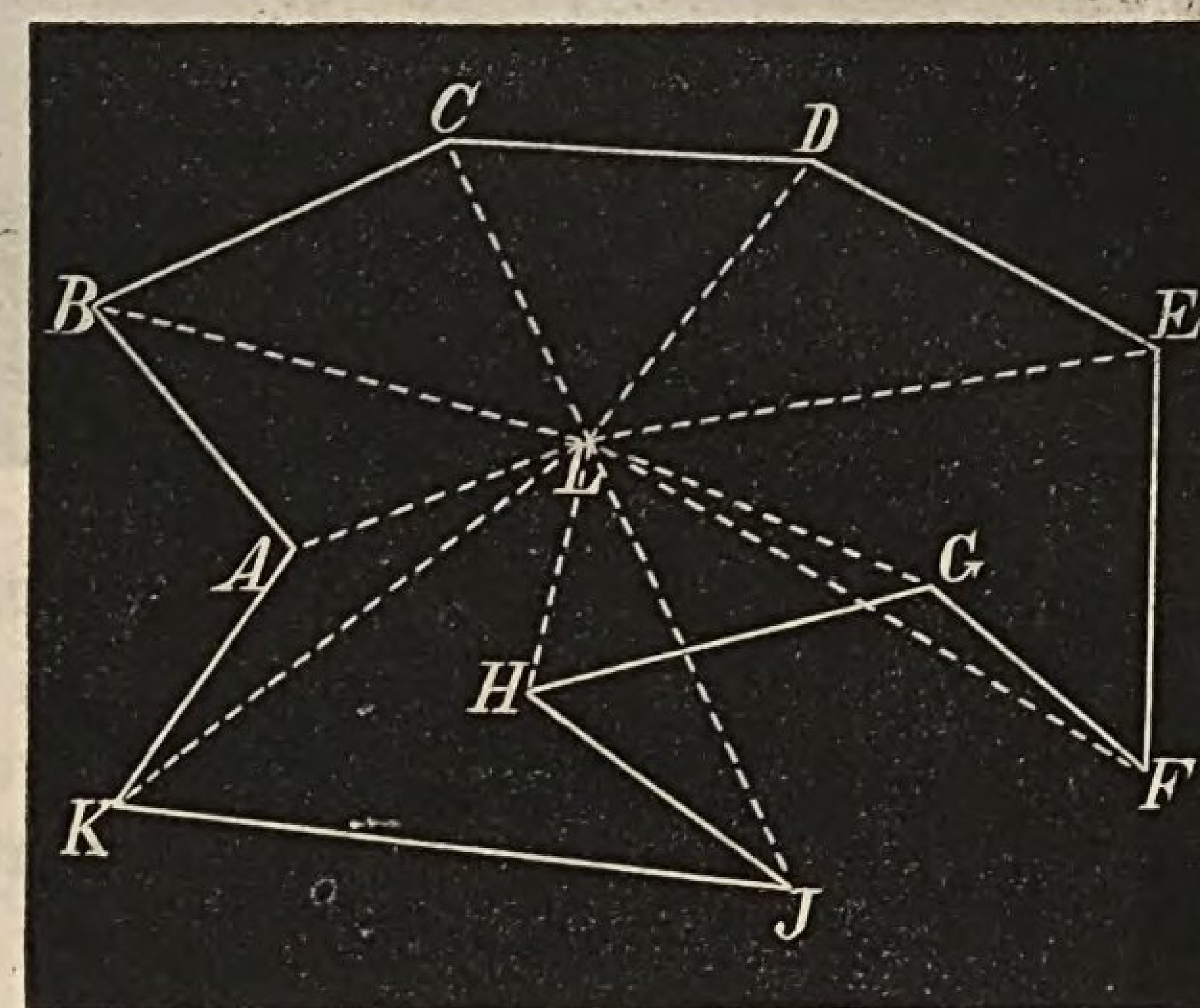
ein rechter, so müßte in der Gleichung 1) $\alpha = 3R$ gesetzt werden, dann wäre $\frac{x + y}{2} = 45 - \left(\frac{m + n}{2}\right)$ u. $\text{tg.} \left(\frac{y - x}{2}\right) = \left(\frac{a \sin. n - b \sin. m}{a \sin. n + b \sin. m}\right) \text{tg.} \left(45 - \frac{m + n}{2}\right) \ldots 4).$

Z. B. Die Seiten eines Hauses sind $a = 10$, $b = 15$ Klafter von einem Punkte D anvisirt und $m = 2^0 13'$, $n = 3^0 7'$ gemessen worden, so ist $\frac{x + y}{2} = 42^0 20$, $\frac{x - y}{2} = 1^0 37'$, daher $x = 44^0 1' 37''$, $y = 40^0 38' 23''$ und $DB = 179{\cdot}678$ Klafter.

Anmerkung. Diese letzte Aufgabe ist in der praktischen Geometrie unter dem Namen das trigonometrische Rückwärtsabschneiden bekannt; mehrere Auflösungen derselben findet man in Netto's Handbuch der Vermessungskunde 2. Theil.

§. 144. Aufgabe. Ein Polygon zu vermessen, wenn von einem innerhalb desselben angenommenen Punkte alle Ecken anvisirt und die Entfernungen von demselben Punkte gemessen werden können.

Auflösung. Diese hat viele Aehnlichkeit mit jener im §. 120; ist nämlich, in dem Punkte L, Fig. 160, das Winkelinstrument horizontal aufgestellt worden und sind die gemessenen Winkel, welche die Endpunkte des Polygons in L bilden, gehörig adnotirt worden, so messe man noch die Entfernungen der Ecken von L, schreibe diese auf, so ist die Vermessung beendet.



Die übrigen nicht gemessenen Stücke werden in diesem Falle selten durch Rechnung gesucht, sondern das Polygon wird zum Behufe der Flächenausmittlung konstruirt; zu diesem Zwecke addire man zuerst die Winkel (versteht sich mit Rücksicht, ob keiner negativ zu nehmen sei, dies wäre z. B. in der obigen Figur mit dem Winkel HLI der Fall, wenn GLH und HLI und nicht GLI und ILH gemessen worden sind), so muß ihre Summe 360 Grade betragen; da aber bei der Messung unvermeidliche Fehler begangen werden, so weicht die Summe etwas von 360^0 ab. Dieser Unterschied zwischen der theoretischen und durch die Messung erhaltenen Summe hängt von der Güte des Instrumentes ab, und beträgt desto weniger, je schärfer jeder Winkel bestimmt werden kann; darf aber nie mehr betragen als die Anzahl der gemessenen Winkel multiplizirt mit der kleinsten Angabe des Nonius; also bei den Astrolaben nach der ältern Konstruktion, wenn n Winkel gemessen worden sind, 2n und bei dem Instrumente mit einem ganzen Kreise n Minuten.

Dieser Unterschied nun, wenn er nicht bedeutend ist, wird auf sämmtliche Winkel zu gleichen Theilen vertheilt, und die so korrigirten Winkel zum Behufe der Konstruktion in Rechnung genommen.

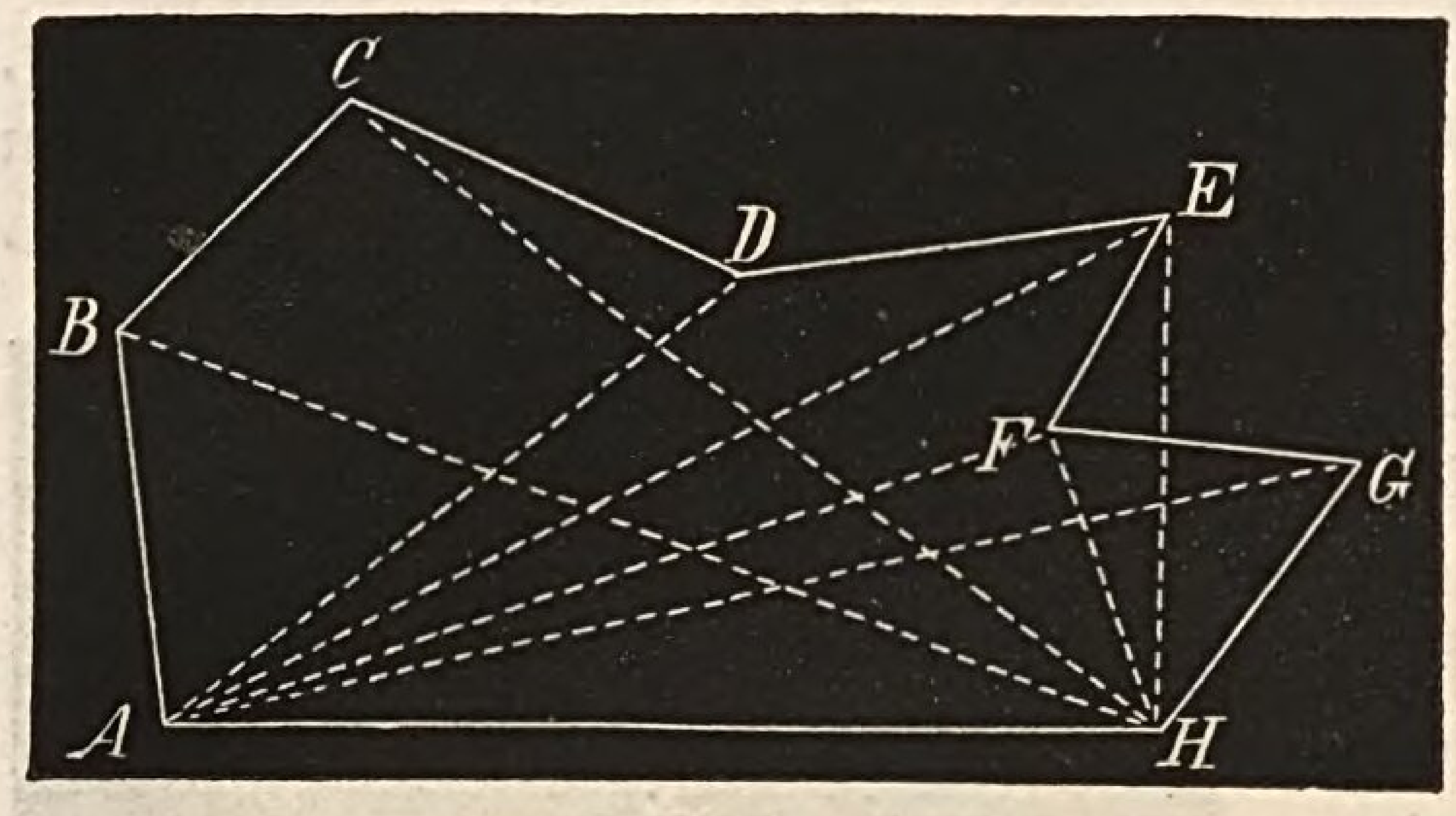
Ueber das Verfahren bei der Darstellung des Polygons ist das Nöthige bereits §. 64 ad b gesagt worden.

Zusatz. Könnte man alle Winkel von L, aber keine der Entfernungen messen, so müßten alle Seiten des Polygons, zudem noch ein Umfangswinkel bestimmt werden, und dann, wenn z. B. ABC gemessen wäre, würde man die Entfernung LB (§. 143) berechnen, die um L liegenden Winkel konstruiren, auf den Schenkel LB das gefundene Maß im verjüngten Maßstabe auftragen, und von B nach beiden Seiten weiter konstruiren.

§. 145. Aufgabe. Ein Polygon zu vermessen, wenn von den Endpunkten einer Seite alle übrigen sichtbar sind, wenn also eine Seite des Polygons als Standlinie angenommen werden kann.

Auflösung. Sind von den Ecken A, H, Fig. 161 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), alle übrigen sichtbar, so messe man von diesen zwei Standpunkten alle Winkel, welche die Ecken mit der Seite AH bilden, und diese selbst, so ist das Polygon bestimmt; zur Kontrolle messe man eine der Seiten und vergleiche ihre durch die Konstruktion erhaltene Länge mit der durch die direkte Messung.

Auch hier wird das Polygon wegen der Ausmittlung des Flächeninhaltes gewöhnlich konstruirt, dabei wird zuerst die Länge AH im verjüngten Maße aufgetragen, und an diese die sämmtlichen Winkel konstruirt, die Durchschnittspunkte

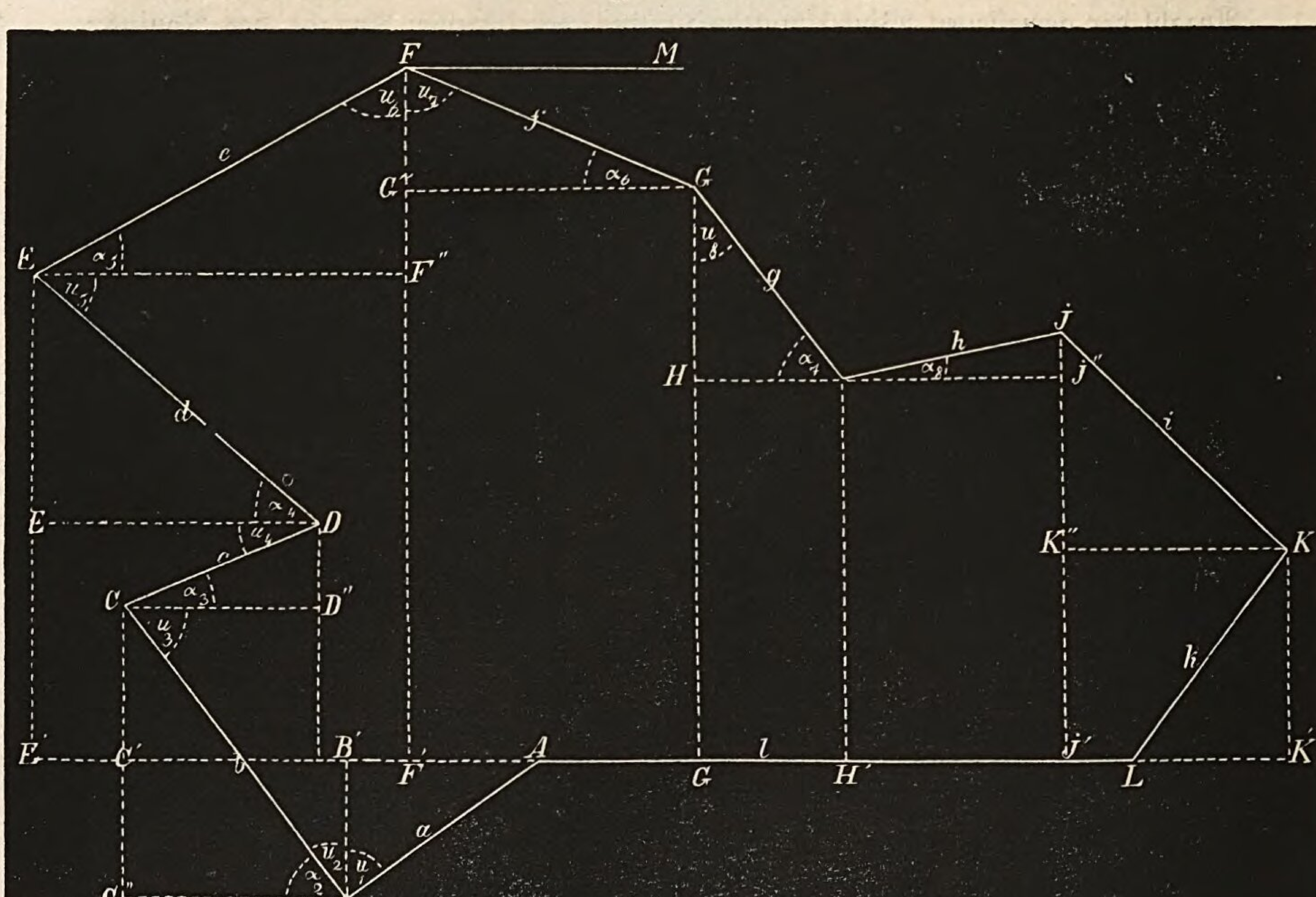


der Schenkel bestimmen die Ecken des Polygons. Weil man bei der Konstruktion der Winkel an den verjüngten Maßstab nicht gebunden ist, so kann man (§. 64 ad b) den Halbmesser beliebig groß nehmen; oder man kann die Abszissen und Ordynaten aller Ecken auf die Abszissenlinie HA berechnen und das Polygon mittelst jenen konstruiren; diese letztere Art ist genauer als die vorhergehende.

Wäre zwar die Linie AH gemessen worden, könnte man aber von A und D oder B und G alle übrigen Ecken anvisiren, so muß man vorerst an der Basis HA die nöthigen Winkel messen, damit im ersten Falle AD, im letztern BG berechnet werden könne, und nachdem eine dieser Längen bekannt ist, dieselbe auftragen, und von ihren Endpunkten die Konstruktion vornehmen.

§. 146. **Aufgabe. Bei einem Polygon sind alle Umfangswinkel und Seiten gemessen worden, es sollen die Formeln abgeleitet werden, nach welchen die Ordynaten und Abszissen der Ecken auf eine der gemessenen Seiten berechnet werden.**

Auflösung. Bezeichnen wir die inneren (konkaven oder konvexen) Winkel des Polygons ABC . . . . . KL, Fig. 162, mit den großen, die diesen Winkeln



nach einer Richtung folgenden Seiten mit den kleinen lateinischen Buchstaben,

nehmen wir ferner bei der Ableitung der Formeln die Seite AL als Abszissenlinie, A als Anfangspunkt der Abszissen, und fällen wir von den Ecken auf AL die senkrechten Ordynaten BB′, CC′, EE′ 2c., so haben wir folgende aus der Figur sich ergebende Winkel:

1.	$\alpha_1 = A - 2R$	$\sin.\alpha_1 = -\sin. A$	$\cos.\alpha_1 = -\cos. A$
	$u_1 = R - \alpha_1 = 3R - A$		
	$u_2 = B - u_1 = (A + B) - 3R$		
2.	$\alpha_2 = R - u_2 = 4R - (A + B)$	$\sin.\alpha_2 = -\sin.(A+B)$	$\cos.\alpha_2 = +\cos.(A+B)$
	$u_3 = \alpha_2 = 4R - (A + B)$		
3.	$\alpha_3 = C - u_3 = (A + B + C) - 4R$	$\sin.\alpha_3 = +\sin.(A+B+C)$	$\cos.\alpha_3 = +\cos.(A+B+C)$
	$u_4 = \alpha_3$		
4.	$\alpha_4 = 4R - D - u_4 = 8R - (A + B + \ldots\ldots + D)$	$\sin.\alpha_4 = -\sin.(A+B+C+D)$	$\cos.\alpha_4 = +\cos.(A+\ldots\ldots+D)$
	$u_5 = \alpha_4$		
5.	$\alpha_5 = E - u_5 = (A + B + \ldots\ldots + D + E) - 8R$	$\sin.\alpha_5 = +\sin.(A+\ldots\ldots+E)$	$\cos.\alpha_5 = +\cos.(A+\ldots\ldots+E)$
	$u_6 = R - \alpha_5 = 9R - (A + B + \ldots\ldots + E)$		
	$u_7 = F - u_6 = (A + B + C + \ldots\ldots + F) - 9R$		
6.	$\alpha_6 = R - u_7 = 10R - (A + \ldots\ldots + E + F)$	$\sin.\alpha_6 = +\sin.(A+\ldots\ldots+E+F)$	$\cos.\alpha_6 = -\cos.(A+\ldots\ldots+F)$
	$u_8 = G - R - \alpha_6 = (A+B+\ldots\ldots+F+G) - 11R$		
7.	$\alpha_7 = R - u_8 = 12R - (A + B + \ldots\ldots + F + G)$	$\sin.\alpha_7 = -\sin.(A+\ldots\ldots+F+G)$	$\cos.\alpha_7 = -\cos.(A+\ldots\ldots+F+G)$
8.	$\alpha_8 = H - 2R - \alpha_7 = (A+B+\ldots\ldots+G+H - 14R$	$\sin.\alpha_8 = -\sin.(A+\ldots\ldots+G+H)$	$\cos.\alpha_8 = +\cos.(A+\ldots\ldots+H)$

Nun bildet jede Seite des Polygons die Hypothenuse eines Dreieckes, in welchem außer dieser noch der eine spitze Winkel bekannt ist, sucht man aus jedem dieser Dreiecke die beiden Katheten, und stellt diese übersichtlich zusammen, so erhält man folgende Tebelle:

$BB' = -a \sin. A$	$AB'' = -a \cos. A$
$CC'' = -b \sin. (A + B)$	$BC'' = +b \cos. (A + B)$
$DD'' = +c \sin. (A + B + C)$	$CD'' = +c \cos. (A + B + C)$
$EE'' = -d \sin. (A + B + C + D)$	$DE'' = +d \cos. (A + B + C + D)$
$FF'' = +e \sin. (A + \ldots\ldots + E)$	$EF'' = +e \cos. (A + B + \ldots\ldots + D + E)$
$FG'' = +f \sin. (A + B + \ldots E + F)$	$GG'' = -f \cos. (A + B + \ldots\ldots + E + F)$
$GH'' = -g \sin. (A + \ldots\ldots + F + G)$	$HH'' = +g \cos. (A + \ldots\ldots + F + G)$
$JJ'' = -h \sin. (A + B + \ldots\ldots + G + H)$	$HI'' = -h \cos. (A + B + \ldots\ldots + F + G + H)$.

Mit Hilfe dieser Tafel läßt sich leicht das Gesetz nachweisen, nach welchem jede beliebige Ordynate oder Abszisse berechnet werden kann, nur müssen wir bemerken, daß bei den Absziſſen der Rechner sich stets im Anfangspunkte der Koordynaten die Abszissenlie vor sich denken muß, und dann sind die vor ihm liegenden Abszissen positiv, also hinter ihm liegende negativ; bei den Ordynaten dagegen hat der Rechner sich zwischen den Endpunkten der als Abszissenlinie angenommenen Seite zu denken, das Gesicht nach Innen des Polygons gewendet, und dann liegen vor ihm jene Punkte, deren Ordynaten positiv sind, somit hinter ihm die negativen Ordynaten.

Diesem nach ist die Abszisse und Ordynate von B auf die Abszissenlinie AL negativ, also $- BB' = - a \sin. A$ und $- AB' = - a \cos. A$, daher

die Ordynate von $B = + a \sin. A$
die Abszisse von $B = + a \cos. A$.

Die Abszisse von C ist negativ und gleich $AC' = AB' + B'C'$, daher $- AC' = - AB' - B'C'$, oder nachdem die Werthe aus der obigen Tabelle substituirt worden sind
$AC' = a \cos. A - b \cos. (A + B)$; die Ordynate von C ist positiv und $= CC' = CC'' - C'C'' = - BB' + CC''$, oder wenn statt diesen Größen ihre Werthe gesetzt werden

die Ordynate von $C = a \sin. A - b \sin. (A + B)$
die Abszisse von $C = a \cos. A - b \cos. (A + B)$.

Um nun das Gesetz, nach welchem die Ordynaten und Abszissen aus den einzelnen Gliedern gebildet sind, noch deutlicher hervortreten zu lassen, bestimmen wir die Ordynate und Abszisse der Ecke F; die erstere ist, wie die Figur zeigt, positiv und gleich $FF' = FF'' + EE'' + DD'' + CC'' - BB'$; werden nun für diese Größen die Werthe substituirt und die Glieder in verkehrter Ordnung geschrieben, so findet man die Ordynate von $F = a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) - d \sin. (A + \ldots\ldots + D) + e \sin. (A + \ldots\ldots + E)$.

Die Abszisse von F ist negativ, daher $- AF' = AB' + BC' - C'D' + D'E' - E'F' = AB' + BC'' - CD'' + DE'' - EF''$, und für die Größen rechter Hand des Gleichheitszeichens die berechneten Werthe aus der Tabelle substituirt, zuletzt die Gleichung mit $- 1$ multiplizirt, findet man die Abszisse von $F = a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) - d \cos. (A + B + C + D) + e \cos. (A + B + C + D + E)$.

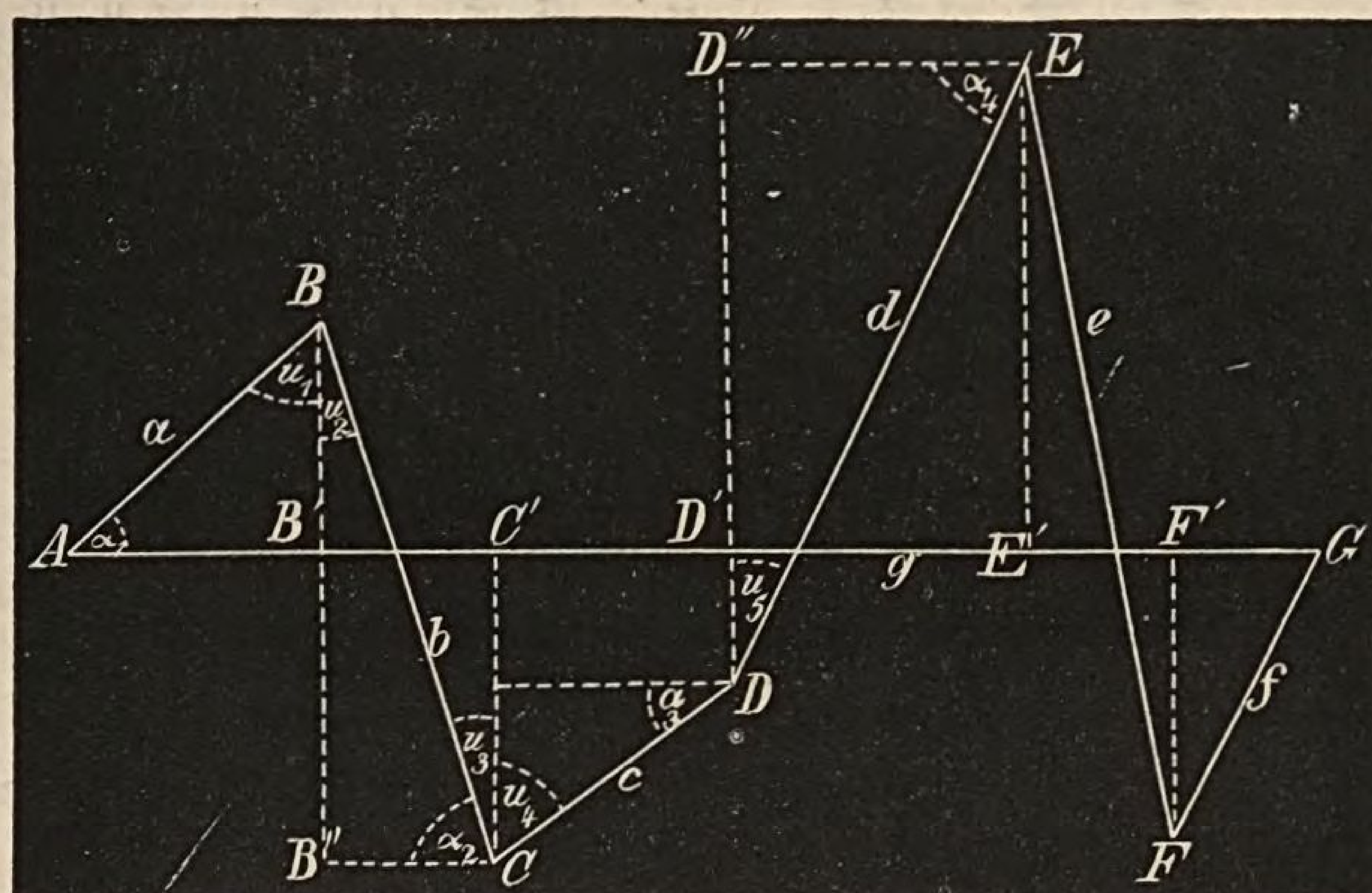
Bezeichnen wir daher jede beliebige Ordynate mit y, die zugehörige Abszisse mit x, so ist nach diesem Gesetze

$$y = a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) - d \sin. (A + B + C + D) + \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

$$x = a \cos. A - b \cos. - A + B) + c \cos. (A + B + B) - d \cos. (A + B + C + D +) \ldots\ldots\ldots\ldots 2).$$

Das letzte Glied in diesen Gleichungen ist das Produkt aus jener Seite, welche der Ecke, dessen Koordynaten bestimmt werden sollen, vorangeht, in dem Sinus oder Cosinus der Summe jener Winkel, welche zwischen der Abszissenlinie und dieser Seite liegen, dabei ist jedes Glied positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Anzahl dieser Winkel ungerade oder gerade ist.

Die eben abgeleiteten Gleichungen 1) und 2) bestimmen die Ordynaten und Abszissen nicht nur der Eckpunkte eines im gewöhnlichen Sinne genommenen Polygons, sondern auch der Eckpunkte jeder wie immer gebrochenen in sich zurückkehrenden Linie, Fig. 163, dabei ist hinsichtlich der Winkel, welche in die



Rechnung zu nehmen sind, folgendes zu bemerken: nimmt man in dem einen Endpunkte, z. B in A, den hohlen mit α_1 bezeichneten Winkel, so muß man bei den folgenden Ecken jene Winkel nehmen, zu welchen man von A angefangen kommen kann, ohne eine der Linien zu überschreiten; also ist der Winkel B konkav, C und D konvex, E konkav, F und G konvex.

Zum Beweise, daß auch in diesem Falle die Ordynaten und Abszissen der Ecken nach den Gleichungen 1) und 2) berechnet werden können, wollen wir einige Glieder der angeführten Gleichungen aus vorstehender Figur 163 (auf der nächsten Seite) entwickeln.

Es ist:

$\alpha_1 = A$	$\sin.\alpha_1 = +\sin. A$	$\cos.\alpha_1 = +\cos. A$
$u_1 = R-\alpha_1 = R-A$		
$u_2 = B-u_1 = (A+B)-R$		
$\alpha_2 = R-u_2 = 2R-(A+B)$	$\sin.\alpha_2 = +\sin.(A+B)$	$\cos.\alpha_2 = -\cos.(A+B)$
$u_3 = R-\alpha_2 = (A+B)-R$		
$u_4 = 4R-C-u_3 = 5R-(A+B+C)$		
$\alpha_3 = R-u_4 = (A+B+C)-4R$	$\sin.\alpha_3 = +\sin.(A+B+C)$	$\cos.\alpha_3 = +\cos.(A+B+C)$
$u_5 = 4R-D-\alpha_3-R = 7R-(A+B+C+D)$		
$\alpha_4 = R-u_5 = (A+B+C+D)-6R$	$\sin.\alpha_4 = -\sin.(A+B+C+D)$	$\cos.\alpha_4 = -\cos.(A+B+C+D).$

Daher $BB' = +a\sin. A$; $BB'' = +b\sin.(A+B)$; $CC' = +c\sin.(A+B+C)$; $DD'' = -d\sin.(A+ \ldots + D)$; $AB' = +a\cos. A$, $CB'' = -b\cos.(A+B)$, $DC'' = +c\cos.(A+B+C)$ und $ED'' = -d\cos.(A+B+C+D)$; daraus folgt z. B. die Ordynate D, und weil sie negativ ist $-DD' = CC' - CC'' = BB'' - BB' - CC''$, somit, wenn für die Größen ihre Werthe gesetzt und die Gleichung mit -1 multiplizirt wird, die Ordynate von $D = a\sin. A - b\sin.(A+B) + c\sin.(A+B+C)$.

Auf dieselbe Art findet man z. B. die Abszisse von E, diese ist positiv und $= AB' + B'C' + C'D' + D'E' = AB' + CB'' + DC'' + ED''$, werden nun statt diesen Gliedern die obigen Werthe gesetzt, so findet man die Abszisse von $E = a\cos. A - b\cos.(A+B) + c\cos.(A+B+C) - d\cos.(A+B+C+D)$, also für die Ordynaten wieder die Gleichung 1); für die Abszissen die Gleichung 2).

Hätte man bei der Ableitung der Gleichungen 1) und 2), Fig. 162 (siehe die Zeichnung auf pag. 200), die AL als Abszissenlinie, aber L als Anfangspunkt der Abszissen angenommen, so hätte man, wie leicht nachgewiesen werden kann, mit den Gleichungen 1) und 2) analoge Ausdrücke erhalten; in diesem Falle wäre z. B.

die Ordynate von $H = k\sin. L - i\sin.(L+K) + h\sin.(L+K+I)$,

die Abszisse von $H = LH' = k\cos. L - i\cos.(L+K) + h\cos.(L+K+I)$.

Zusatz 1. Bestimmt man die Ordynate einer Ecke von beiden Endpunkten derselben Abszissenlinie, so sind die für die Ordynate gefundenen Ausdrücke einander gleich, sucht man aber die Abszisse derselben Ecke von beiden Endpunkten der als Abszissenlinie angenommenen Seite, so ist die Summe beider Ausdrücke der Seite des Polygons gleich; die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht aus der Figur nachgewiesen.

Zusatz 2. Wird der eine Endpunkt einer Seite als Anfangspunkt der Abszissen angenommen und die Ordynate des zweiten Endpunktes bestimmt, so ist der gefundene Ausdruck gleich Null; wird dagegen die Abszisse des zweiten Endpunktes gesucht, so ist der dafür gefundene Ausdruck gleich der Abszissenlinie.

Wird z. B. AL als Abszissenlinie, L als Anfangspunkt angenommen, so ist die Seite

$$l = k \cos. L - i \cos. (K + L) + h \cos. (I + K + L) - \ldots - a \cos. (L + K + I + \ldots C + B).$$

Durch die Berechnung der Seite l nach dieser Gleichung sind auch die Abszissen aller übrigen Eckpunkte bestimmt, denn das erste Glied (k cos. L) ist die Abszisse von k; die algebraische Summe der beiden ersten Glieder (k cos. L — i cos. (k + L)) die Abszisse von I etc.

§. 147. **Aufgabe. Bei der Messung der Umfangswinkel eines Polygons konnten die an einer Seite anliegenden Winkel nicht bestimmt werden, diese sollen nun aus den übrigen gemessenen Seiten und Winkeln berechnet werden.**

Auflösung. Auch bei dieser Aufgabe handelt es sich vorerst um die Ableitung einer Gleichung, aus welcher einer der unbekannten Winkel berechnet werden kann; diese aber ergibt sich leicht aus dem vorigen Paragraphe.

Sind z. B. K und L in dem Polygon Fig. 162 (siehe die Zeichnung auf pag. 200) die unbekannten Winkel, und wollte man vorerst L berechnen, so hat man, die AL als Abszisse und L als Anfangspunkt angenommen,
die Ordynate von K = k sin. L ..... 1) und die Abszisse von K = k cos. L ..... 2).

Wird bei derselben Abszisse A als Anfangspunkt angenommen, so ist

die Ordynate von $K = a \sin. A - b \sin (A + B) + c \sin. (A + B + C) - \ldots$
$+ i \sin. (A + B + \ldots H + I) \ldots 3),$

die Abszisse von $K = a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) - \ldots$
$+ i \cos. (A + B + \ldots H + I) \ldots 4),$

daher §. 146, Zusatz 1)

$$k \sin. L = a (A - b \sin. A + B) + \ldots + i \sin. (A + B + \ldots + 1)$$
$$k \cos. L = l - [a \cos. A - b \cos. (B + B) + c \cos. (A + B + C) - \ldots + i \cos. (A + B + \ldots + I)],$$

wird nun die obige Gleichung durch die untere dividirt, so erhält man

$$\text{tg. } L = \frac{a \sin. A - b \sin. (A + B) + \ldots + i \sin. (A + B + \ldots + H + I)}{l - [a \cos. A - b \cos. (A + B) + \ldots + i \cos. (A + B + \ldots + H + I)]} \ldots 5).$$

d. h., **will man die Tangente eines Winkels bestimmen, so nehme man eine der anliegenden Seiten (in der vorigen Ableitung l) als Abszissenlinie und die zweite in derselben Seite liegende Ecke als Anfangspunkt der Abszissen, so ist die Tangente eines Winkels (in der vorigen Ableitung von L)**

$$= \frac{\text{der Ordynate der vorhergehenden Ecke}}{\text{die Abszissenlinie weniger der Abszisse der vorhergehenden Ecke}}.$$

Auf diese Art ist $\text{tang. } F = \frac{\text{Ordynate von E}}{f - \text{Abszisse von E}}$, wobei, wie es der Ausdruck zeigt, f als Abszissenlinie, G als Anfangspunkt angenommen worden ist.

Hätte man zur Bestimmung des Winkels F die Seite e als Abszissenlinie, somit E als Anfangspunkt der Abszissen gewählt, so wäre

$$\text{tg. F.} = \frac{\text{d sin. E} - \text{c sin. (E+D)} + \text{b sin.(E+D+C)} - \ldots + \text{g sin.(E+D+} \ldots + \text{l+H)}}{\text{e} - [\text{d cos. E} - \text{c cos.(E+D)} + \text{b c.(E+D+C)} - \ldots + \text{g c. (E+D+} \ldots + \text{l+H)}]}.$$

Zusatz. In der Gleichung 5) kommt die Seite k und der Winkel K, in der letzteren die Seite f und der Winkel G nicht vor, diese Gleichungen bestimmen also einen Winkel in einem Polygone, in welchem die eine Seite sammt den beiden anliegenden Winkeln unbekannt sind.

In der vorigen Aufgabe wurde vorausgesetzt, daß nur zwei Winkel eines Polygons unbekannt sind, aber wie eben bemerkt worden ist, bleibt der zu suchende Winkel noch dann bestimmt, wenn auch die anliegende Seite unbekannt ist; dies führt uns wieder auf die im §. 66 gestellte Aufgabe: wenn in einem Polygone drei Stücke unbekannt sind, worunter immer wenigstens ein Winkel sein muß, diese fehlenden Stücke durch Rechnung zu bestimmen.

Hier sind wieder folgende drei Hauptfälle zu unterscheiden: unbekannt sind

I. ein Winkel und zwei Seiten,

II. zwei Winkel und eine Seite,

III. drei Winkel.

§. 148. Aufgabe. In einem Polygone sind alle Stücke außer zwei Seiten und ein Winkel gegeben, die unbekannten Stücke zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnen wir den unbekannten Winkel in Graden ausgedrückt mit W, die Summe der gegebenen mit S, die Anzahl aller Winkel mit n, so ist

$$W + S = 2R\,(n - 2),\ \text{folglich}\ W = 2R\,(n - 2) - S\ .\ .\ .\ .\ .\ 1).$$

Um eine der unbekannten Seiten zu finden, nehme man die zweite unbekannte Seite als Abszissenlinie und bestimme, von beiden Ecken derselben ausgehend, die Ordynate für eine der übrigen Ecken, wodurch man eine Gleichung erhält, in welcher die Abszissenlinie nicht vorkommt, somit die andere Seite berechnet werden kann.

Dieses durch ein Beispiel zu erläutern, nehmen wir an, in dem Polygone Fig. 162 (siehe die Zeichnung auf pag. 200) sei der Winkel H, die Seiten h und b die unbekannten Stücke, gegeben sei:

$$a = 46{\cdot}8;\ c = 40{\cdot}0;\ d\ 57{\cdot}6;\ e = 71{\cdot}6;\ f = 52{\cdot}0;\ g = 28{\cdot}8;\ i = 41{\cdot}0;$$
$$k = 54{\cdot}0;\ l = 71{\cdot}2\ \text{Klafter.}$$

Ferner $A = 204^0 3'$; $B = 110^0 53'$; $C = 73^0 18'$; $D = 309^0 36'$; $E = 49^0 9'$; $F = 143^0 1'$; $G = 123^0 12'$; $I = 132^0 52'$; $K = 94^0 53'$; $L = 120^0 25'$.

Die Summe der gemessenen Winkel $S = 1361^0 22'$, und da das Polygon 11 Winkel hat, so ist die Summe aller $= 1620$ Grade, mithin der Winkel $H = 1620^0 - (1361^0 22') = 258^0 38'$.

Dieser Schluß ist nur dann ganz richtig, wenn die Summe der gemessenen Winkel fehlerfrei wäre, da aber dieß nicht der Fall ist, so ist der Winkel H um die algebraische Summe der in der Messung der übrigen Winkel begangenen Fehler unrichtig.

Nehmen wir an die 10 Winkel sind mit einem der älteren Astrolabien, bei welchen das Ablesen nur auf 2 Minuten sicher ist, gemessen worden, so kann der Fehler in H auch 20 Minuten betragen.

Zur Bestimmung der Seite h nehme man b als Abszissenlinie, C nach der einen, B nach der andern Richtung als Anfangspunkt, und bestimme von beiden Seiten die Ordynate eines der Endpunkte, z. B. H, so erhält man die Gleichung

$$c \sin. C - d \sin. (C + D) + e \sin. (C + D + E) - \ldots\ldots + g \sin. (C + \ldots\ldots F + G)$$
$$= a \sin. B - l \sin. (A + B) + \ldots\ldots + h \sin. (A + B + L + K + I),$$

oder nach vollführter Rechnung $103{\cdot}2256 = 139{\cdot}4195 + h \sin. (A + B + L + K + I)$, daraus $h = 43{\cdot}2053$ Klafter.

Zur Bestimmung der Seite b könnte man wieder h als Abszissenlinie annehmen und wie vor verfahren; oder da H als berechnet vorausgesetzt wird, b als Abszissenlinie, B als den Anfangspunkt und die Abszisse von C bestimmen, so ist diese die gesuchte Seite b; in diesem letztern Falle hat man die Gleichung

$$b = a \cos. B - l \cos. (A + B) + k \cos. (A + B + L) - \ldots\ldots - c \cos. (A + B + K + \ldots\ldots + E + D),$$

und nachdem die einzelnen Glieder berechnet, und bei der Summirung auf ihre Zeichen Rücksicht genommen worden ist, findet man $b = 60{\cdot}502$ Klafter.

Für solche, welche mit Logarithmen zu rechnen aus der Uebung sind, wollen wir die ganze Rechnung in extenso angeben.

Gegeben sind:

a = 46·8	A = 204° 3′	daher	log. a = 1·6702459
c = 40·0	B = 110° 53	„	log. c = 1.6020600
d = 57·6	C = 73 18	„	log. d = 1·7604225
e = 71·6	D = 309° 36	„	log. e = 1·8549130
f = 52·0	E = 49° 9·	„	log. f = 1·7160033
g = 28·8	F = 143° 1	„	log. g = 1·4593925
i = 41·0	G = 123° 12	„	log. i = 1·6127839
k = 54·0	I = 132 52	„	log. k = 1·7323938
l = 71·2	K = 94 53	„	log. l = 1·8524800
	L = 120 25		

Zur Bestimmung der Seite h ist

$$c \sin. C - d \sin. (CD) + e \sin. (C+D+E) - f \sin.(C+D+E+F) + g \sin.(C+D+E+F+G) = a \sin. B - l \sin.(A+B) \ldots + h \sin.(A+B+ \ldots I).$$

Nun ist

C =	73° 18′ =	73 18	log. sin.	= 9·9812850	+
C + D =	382° 54′ =	4·90 + 22 54	„ „	= 9·5900880	+
C + D + E =	432° 3′ =	4·90 + 72 3	„ „	= 9·9783293	+
C + D + E + F =	575° 4′ =	6·90 + 35 4	„ „	= 9·7593121	—
C + D + E + F + G =	698° 16 =	8·90 — 21 44	„ „	= 9·5685387	—
B =	110° 53 =	2·90 — 69 7′	„ „	= 9·9704902	+
A + B =	314° 56 =	4·90 — 45 4	„ „	= 9·8499897	—
A + B + L =	435° 21 =	4·90 + 75 21	„ „	= 9·9856460	+
A + B + L + R =	530° 14 =	6·90 — 9 46	„ „	= 9·2295185	+
A + B + L + K + I =	663° 6 =	8·90 — 56 54	„ „	= 9·9230981	—

Mit den gegebenen Zahlen findet man
c sin. C = + 38·3129; d sin. (C + D) = 22·4135; e sin. (C + D + E) = + 68·1149; f sin. (C + D + E + F) = — 29·8755; g sin. (C + . . . + F) = — 10·6643; a sin. B = + 43·7256; l sin. (A + B) = — 50·4046; k sin. (A + B + L) = + 52·2444; i sin. (A + . . + I) = — 6·9551; demnach ist

$$h = \frac{38{\cdot}3129 - 22{\cdot}4135 + 68{\cdot}1149 + 29{\cdot}8755 - 10{\cdot}6643 - (43{\cdot}7256 + 50{\cdot}4046 + 52{\cdot}2444 - 6{\cdot}9551)}{\sin.\ (A + B + L + K + I)},$$

$$h = \frac{-\ 36{\cdot}1940}{\sin.\ (A + \ldots + I)};\ \log.\ h = 1{\cdot}6355384,\ \text{und}\ h = 43{\cdot}2054\,.$$

Zur Berechnung der Seite b ist die Gleichung

$$b = a \cos.\ B - l \cos.\ (A + B) + \ldots + d \cos\ (A + \ldots + F + E) - c \cos.\ (A + \ldots + E + D).$$

Nun ist

B =	110° 53′ =	2·90 — 69° 7	log. cos.	= 9·5520184	
A + B =	314° 56 =	4·90 — 45° 4	„ „	= 9·8489791	
+ A + B + L =	435° 21 =	4·90 + 75° 21	„ „	= 9·4029724	
A + B + . . . + K =	530° 14 =	6·90 — 9° 46	„ „	= 9·9936596	
A + B + . . . + K + I =	663° 6 =	8·90 — 56° 54	„ „	= 9·7372737	
A + B + . . . + I + H =	921° 44 =	10·90 + 21° 44	„ „	= 9·9679771	
A + B + . . . + H + G =	1044° 56 =	12·90 — 35° 4	„ „	= 9·9130102	
A + B + . . . + G + F =	1187° 57′ =	14·90 — 72° 3	„ „	= 9·4888142	
A + B + . . . + F + E =	1237° 6′ =	14·90 — 22° 54	„ „	= 9·9643470	
A + B + . . . + E + D =	1546° 42′ =	18·90 — 73° 18	„ „	= 9·4584271	

Daher ist

$a \cos. B = -16{\cdot}6826$; $l \cos. (A + B) = +50{\cdot}2874$;
$k \cos. (A + B + L) = +13{\cdot}6573$, $i \cos. (A + .. + K) = -40{\cdot}4058$;
$h \cos. (A + .. + I) = +23{\cdot}5946$; $g \cos. (A + .. + H) = -26{\cdot}7528$;
$f \cos. (A + .. + G) = +42{\cdot}5612$; $e \cos. (A + .. + F) = -22{\cdot}0662$;
$d \cos. (A + .. + E) = -53{\cdot}0603$; $c \cos. (A + .. + D) = -11{\cdot}4944$; somit
$b = -16{\cdot}6826 - 50{\cdot}2874 + 13{\cdot}6573 + 40{\cdot}4058 + 23{\cdot}5946 + 26{\cdot}7528 + 42{\cdot}5612 + 22{\cdot}0662 - 53{\cdot}0603 + 11{\cdot}4944$ und nach der Reduktion $b = 60{\cdot}5020$.

Die Aufgabe wird unbestimmt, sobald die unbekannten Seiten parallel sind. Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, in der Fig. 162 (siehe die Zeichnung pag. 200) seien die Seiten f und l unbekannt, die erstere mit l parallel und habe die Richtung FM; nach dem Vorhergehenden müßte man, um f zu bestimmen, l als Abszissenlinie annehmen und von A so auch von L aus die Ordynate irgend einer Ecke, z. B. von F bestimmen. Für diese Ordynate hätte man die Gleichung:

$$a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) - d \sin. (A + B + C + D) + e \sin. (A + B + C + D + E) =$$
$$k \sin. L - i \sin. (L + K) + h \sin. (L + K + I) - g \sin. (L + K + I\,H) + f \sin. (L + K + I + H + G) \ldots\ldots 2).$$

Aber die ersten vier Glieder rechter Hand des Gleichheitszeichens geben die Ordynate von G, und da FG mit AL parallel vorausgesetzt worden ist, so sind die Ordynaten von F und G einander gleich, also sind die ersten vier Glieder auf der rechten Seite gleich dem ganzen Ausdrucke auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, somit, nachdem die gleichen Werthe beiderseits subtrahirt worden sind, bleibt die Gleichung

$$0 = f \sin. (L + K + I + H + G) \ldots . 3).$$

Wegen der Voraussetzung, daß AL mit FG parallel ist, wird $\alpha_6 = 0$, daher §. 146 $A + B + C + D + E + F = 10R$, und da alle Winkel des Polygons 18 Rechte betragen, so ist $(G + H + I + K + L) = 8R$, $\sin. (G + H + I + K + L) = 0$, somit aus der Gleichung 3) $f = \frac{0}{0}$.

Denselben Ausdruck für f, nämlich $\frac{0}{0}$, hätten wir auch erhalten, wenn wir bei derselben Abszissenlinie die Ordynaten für eine andere Ecke, z. B. für E, einander gleich gestellt hätten; diese Gleichung würde sein:

$$a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) - d \sin. (A + B\,C + D) =$$
$$k \sin. L - i \sin. (L + K) + h \sin. (L + K + I) - g \sin. (L + \ldots\ldots + H)$$
$$+ f \sin. (L + \ldots\ldots + H + G) - e \sin. (L + K + \ldots\ldots + G + F) \ldots\ldots 4).$$

Weil nun $(A + B + C + D + E + F) = 10R$ und $(G + H + I + K + L) = 8R$ betragen, so ist $(A + B + C + D + E) = 10R - F$ und $(G + H + I + K + L + F) = 8R + F$, somit $\sin. (A + B + C + D + E) = \sin. (G + H + I + K + L + F)$ nämlich $= \sin. F$, daher auch

$$e \sin. (A + B + C + D + E) = e \sin. (L + K + I + H + G + F).$$

Bringt man demnach das letzte Glied der Gleichung 4) auf die linke Seite, und setzt dafür den gleichen Werth $e \sin. (A + B + C + D + E)$, so bekommt man die Gleichung 2), somit gibt auch die Gleichung 4) für die unbekannte Seite f den Werth $\frac{e}{o}$.

§. **149.** Aufgabe. In einem Polygone sind alle Stücke außer zwei Winkeln und einer Seite gegeben, die unbekannten Stücke durch Rechnung zu bestimmen.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe müssen wir drei Fälle unterscheiden, diese sind:

a) die unbekannten Winkel liegen an der unbekannten Seite;

b) die unbekannten Winkel liegen an einer bekannten Seite;

c) die unbekannten Winkel liegen zwischen bekannten Winkeln, folgen also nicht auf einander.

Ad a. In dem §. 147, Zusatz, ist bereits angedeutet worden, auf welche Art in diesem Falle ein Winkel gefunden werden kann; nimmt man nämlich die an dem zu bestimmenden Winkel anliegende bekannte Seite als Abszissenlinie und ihren in dem Scheitel des bekannten Winkels liegenden Endpunkt als den Anfangspunkt der Koordynaten, so kann man die Tangente des zu suchenden Winkels durch die bekannten Stücke ausdrücken.

Sind z. B. in dem Polygone, Fig. 162 (siehe die Zeichnung pag. 200), die Seite h sammt den anliegenden Winkeln H und I die unbekannten Stücke, so muß man, um H zu bestimmen, g als Abszissenlinie, G als Anfangspunkt annehmen, und hat dann folgende Gleichung

$$\text{tang. } H = \frac{\text{Ordynate von } I}{\text{durch die Abszissenlinie } g \text{ weniger der Abszisse von } I}.$$

Zur Bestimmung des Winkels I müßte i als Abszissenlinie, K als der Anfangspunkt angenommen werden, und dann ist

$$\text{tang. } I = \frac{\text{Ordynate von } H}{\text{durch die Abszissenlinie } i \text{ weniger der Abszisse von } H}.$$

Behält man, um ein Beispiel zu geben, die für das Polygon im §. 148 angegebenen Werthe bis auf I bei, und setzt dafür den vorhin berechneten Werth $b = 60{\cdot}502$ hinzu, so erhält man zur Berechnung der tang. H die Ordynate von $I = -42{\cdot}3582$;

die Abszisse von I = + 37·31526, daher tang. H = $\frac{-\,42·3582}{28·8 - 37·31526} = +\frac{42·3582}{8·51526}$; der dieser Tangente entsprechende Winkel = 78°38′; aber weil die Tangente positiv und der Winkel nach der Zeichnung ein konverer ist, so liegt der Endpunkt des Bogens im dritten Quadranten, daher H = 180° + 78° 38′ = 258° 38′.

Kann man sich verlassen, daß der Winkel H richtig berechnet ist, so findet man den Winkel I nach der Gleichung 1) §. 148.

Die Rechnung selbst ist folgende:

Die Gleichung zur Bestimmung des Winkels H ist

$$\text{tg. } H = \frac{f \sin. G - e \sin. (F + G) + d \sin. (E + F + G) - \ldots - k \sin. (L + A + \ldots + G) + i \sin. (G + \ldots + A + K)}{g - \{f \cos. G - e \cos. (F + G) + d \cos. (E + F + G) - \ldots - k \cos. (L + A + \ldots + G) + i \cos. (G + \ldots + A + K)}.$$

Gemessen wurde:		Die Logarithmen der bekannten Seiten sind:
a = 46·8	A = 204° 3	log. a = 1·6702459
b = 60·5	B = 110° 53	„ b = 1·7817697
c = 40·0	C = 73° 18	„ c = 1·6020600
d = 57·6	D = 309° 36	„ d = 1·7604225
e = 71·6	E = 49 9	„ e = 1·8549130
f = 52·0	F = 143° 1	„ f = 1·7160033
g = 28·8	G = 123° 12	„ g = 1·4593925
i = 41·0	K = 94° 53	„ i = 1·6127839
k = 54·0	L = 120° 25	„ k = 1·7323938
l = 71·0		„ l = 1·8524800

Ferner ist

G =	123° 12	= 2·90 — 56°48	log. sin. = 9·9226032 +	log. cos. = 9·7384343 —
G + F =	266° 13	= 2·90 + 86°13′	„ „ = 9·9990525 —	„ „ = 8·8194363 —
G + F + E =	315° 22′	= 4·90 — 44°38	„ „ = 9·8466879 —	„ „ = 9·8522466 +
G + ... + D =	624° 58′	= 6·90 + 84°58	„ „ = 9·9983220 —	„ „ = 8·9431743 —
G + ... + C =	698° 16	= 8·90 — 21°44	„ „ = 9·5685387 —	„ „ = 9·9679771 +
G + ... + B =	809° 9	= 9·90 — 0°51	„ „ = 9·9999522 +	„ „ = 8·1712804 +
G + ... + B + A =	1013° 12′	= 12·90 — 66°48	„ „ = 9·9633795 —	„ „ = 9·5954322 +
G + ... + A + L =	1133° 37	= 12·90 + 53°37	„ „ = 9·9058317 +	„ „ = 9·7731900 +
G + F + E + ... + L + K =	1228° 30	= 14·90 — 31°30	„ „ = 9·7180851 +	„ „ = 9·9307658 —

$f \sin. G = + 43{\cdot}5117$	$f \cos. G = - 28{\cdot}4733$
$e \sin. (F + G) = - 71{\cdot}4439$	$e \cos. (F + G) = - 4{\cdot}7244$
$d \sin. (F + G + E) = - 40{\cdot}4679$	$d \cos. (E + \ldots + G) = + 40{\cdot}9892$
$c \sin. (D + \ldots + G) = - 39{\cdot}8458$	$c \cos. (D + \ldots + G) = - 3{\cdot}5094$
$b \sin. (C + \ldots + G) = - 22{\cdot}4031$	$b \cos. (C + \ldots + G) = + 56{\cdot}2013$
$a \sin. (B + C + \ldots + G) = + 46{\cdot}7949$	$a \cos. (B + \ldots + G) = + 0{\cdot}6943$
$l \sin. (B + A + \ldots + G) = - 65{\cdot}4425$	$l \cos. (A + B + \ldots + G) = + 28{\cdot}0487$
$k \sin. (L + A + B + \ldots + G) = + 43{\cdot}4736$	$k \cos. (L + A + \ldots + G) = + 32{\cdot}0320$
$i \sin. (K + L + \ldots + G) = + 21.4224$	$i \cos. (K + L + \ldots + G) = - 34{\cdot}9582$

daher

$$\text{tang. } H = \frac{+ 43{\cdot}5117 + 71{\cdot}4439 - 40{\cdot}4679 + 39{\cdot}8458 - 22{\cdot}4031 - 46{\cdot}7949 - 65{\cdot}4425 - 43{\cdot}4736 + 21{\cdot}4224}{28{\cdot}8 + 28{\cdot}4733 - 4{\cdot}7244 - 40{\cdot}9892 - 3{\cdot}5094 - 56{\cdot}2013 + 0{\cdot}6943 - 28{\cdot}0487 + 32{\cdot}0320 + 34{\cdot}9582}$$

$\text{tang. } H = \frac{-42{\cdot}3582}{-8{\cdot}5153}$ und $H = 78^0\ 38$ oder $H = 180 + 78^0\ 38' = 258^0\ 38'$; was die Zeichnung entscheidet.

Ad b. Man nehme die unbekannte Seite als die Abszissenlinie und bestimme die Ordynate, von beiden Endpunkten dieser Seite ausgehend, für den Scheitel eines der unbekannten Winkel, so erhält man eine Gleichung, in welcher der andere Winkel aber nur einmal vorkommt, somit berechnet werden kann.

Sind z. B. in demselben Polygone die Seite l und die Winkel D, E unbekannt, so nehme man, um D zu bestimmen, l als Abszissenlinie, und berechne, von ihren Endpunkten ausgehend, die Ordynate für E, so erhält man folgende Gleichung:

$a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) - d \sin. (A + B = C + D) = k \sin. L - i \sin. (L + K) + \ldots\ldots - e \sin. (L + K + \ldots\ldots G + F)$, in welcher D unbekannt ist.

Nimmt man für die bekannten Größen wieder die im §. 148 angegebenen und berechneten Werthe, setzt dafür l, D, E als unbekannt, so erhält man aus der letzten Gleichung nach der Reduktion $42{\cdot}6809 - d \sin. (A + B + C + D) = 64{\cdot}4136$, somit $\sin. (A + B + C + D) = - \frac{21{\cdot}73278}{d}$, und den zugehörigen Winkel $= 22^0\ 10'$.

Da aber der $\sin. (A + B + C + D)$ negativ ist, so liegt der Endpunkt des zugehörigen Bogens entweder im dritten oder vierten Quadranten, und da $(A + B + C)$ schon über 360^0 beträgt, so kann $(A + B + C + D)$ entweder $6R + 22^0\ 10'$ oder $8R - (22^0\ 10')$ sein.

Setzen wir im ersten Falle (A + B + C + D) = 6R + 22° 10′ und für (A + B + C) die bekannte Summe = 388° 14′, so finden wir D = 173° 56′; setzen wir im zweiten Falle (A + B + C + D) = 8R − (22° 10′), so folgt D = 309° 36′, und da, wie die Figur zeigt, D ein erhabener Winkel ist, so gilt nur der zweite Werth, nämlich D = 309° 36, wie zuvor.

Die ganze Rechnung ist folgende:

Gegeben:		Logarithmen der bekannten Seiten:
a = 46·8	A = 204° 3′	log. a = 1·6702459
b = 60·5	B = 110° 53′	„ b = 1·7817697
c = 40·0	C = 73° 18′	„ c = 1·6020600
d = 57·6	F = 143° 1′	„ d = 1·7604225
e = 71·6	G = 123° 12′	„ e = 1·8549130
f = 52·0	H = 258° 38′	„ f = 1·7160033
g = 28·8	I = 132° 52′	„ g = 1·4593925
h = 43·2	K = 94° 53′	„ h = 1·6355384
i = 41·0	L = 120° 25′	„ i = 1·6127839
k = 54·0		„ k = 1·7323938

daher

A = 204° 3′	= 2·90 + 24° 3′	log. sin. = 9·6101635 −	a sin. A	= − 19·0726
A + B = 314° 56	= 4·90 − 45° 4′	„ „ = 9·8499897 −	b sin. (A + B)	= − 42·8311
A + B + C = 388° 14′	= 4·90 + 28° 14′	„ „ = 9·6749194 +	c sin. (A + B + C)	= + 18·9225
L = 120° 25	= 2·90 − 59° 35′	„ „ = 9·9356918 +	k sin. L	= + 46·5678
K + L = 215° 18	= 2·90 + 35° 18′	„ „ = 9·7618208 −	i sin. (K + L)	= − 23·6921
I + K + L = 348° 10	= 4·90 − 11° 50′	„ „ = 9·3118926 −	h sin. (I + . . . + L)	= − 8·8599
H + I + K + L = 606 48	= 6·90 + 66° 48′	„ „ = 9·9633795 −	g sin. (H + . . . + L)	= − 26·4711
G + H + ... + L = 730° 0′	= 8·90 + 10° 0′	„ „ = 9·2396702 +	f sin. (G + . . . + L)	= + 9·0297
F + G + ... + L = 873′ 1′	= 10·90 − 26° 59	„ „ = 9·6567987 +	e sin. (F + . . . + L)	= + 32·4872

somit vermöge der obigen Gleichung

$$-19{\cdot}0726 + 42{\cdot}8311 + 18{\cdot}9225 - d \sin.(A + B + C + D) = 46{\cdot}5678 + 23{\cdot}6921 - 8{\cdot}8599 + 26{\cdot}4711 + 9{\cdot}0297 - 32{\cdot}4872$$

daraus folgt $\sin.(A + B + C + D) = -\frac{21{\cdot}7327}{57{\cdot}6}$; der zugehörige Winkel ist = 22° 10′.

Ad c. Man verbinde die beiden unbekannten Winkel durch eine gerade Linie, so erhält man hiedurch zwei Polygone.

In dem einen ist die eben gezogene Verbindungslinie sammt den an ihr anliegenden Winkeln unbekannt, die fehlenden Stücke können daher nach der oben sub a gegebenen Anleitung gefunden werden; in dem andern ist die eine Seite sammt den an der Verbindungslinie gelegenen Winkeln unbekannt, diese liegen also an einer gegenwärtig bereits bekannten Seite, können somit nach der sub b erklärten Methode bestimmt werden, und dann muß wieder das Brouillon zeigen, wie die berechneten Winkel in Verbindung zu bringen sind.

Nimmt man z. B. in dem Polygone Fig. 162 (siehe die Zeichnung auf pag. 200) die Winkel B, E und die Seite k als unbekannt an, so erhält man durch die Verbindung der genannten Punkte das Polygon BCED und ABEFG . . . . . L.

In dem ersten ist $\text{tang. CBE} = \frac{c \sin. C - d \sin. (C + D)}{b - [c \cos. C - d \cos. (C + D)]}$ und $\text{tang. BED} = \frac{c \sin. D - b \sin. (C + D)}{d - [c \cos. D - b \cos. (C + D)]}$; substituirt man für b, c, d und C, D die im §. 148 angenommenen Werthe, so findet man den Winkel CBE = $8^0 51' 14''$; BED = $31^0 45' 14''$, aber weil die tang. BED negativ ist, und wie die Figur zeigt, mit Rücksicht auf den §. 146, der Endpunkt im vierten Quadranten liegt, so ist für das Polygon BCDEB, dieses für sich betrachtet, BED = $328^0 14' 46''$ zu nehmen.

Die Verbindungslinie BE zu berechnen, bestimme man die Abszisse von C die BE als Abszissenlinie betrachtet, von beiden Endpunkten ausgehend, so hat man nach §. 146, Zusatz 1, die Gleichung BE = b cos. B + (d cos. E — c cos. (D + E), wobei E = $328^0 14' 46''$ zu nehmen ist, aus welcher BE = 103·2987 Klafter folgt.

In dem zweiten Polygone ABEF . . . . . KL nimmt man zur Bestimmung der Winkel ABE und BEF die unbekannte Seite k als Abszissenlinie und hat dann folgende Gleichungen:

$$l \sin. L - a \sin. (L + A) + BE \sin. (L + A + ABE) = i \sin. K - h \sin. (K + I) + \ldots + e \sin. (K + I + \ldots + G + I) \ldots 1)$$

$$l \sin. L - a \sin.(L + A) = i \sin. K - h \sin.(K + I) + \ldots + e \sin.(K + I + \ldots + G + F) - EB \sin.(K + I + \ldots + F + BEF) \ldots 2).$$

Aus der ersten findet man $\sin. (L + A + ABE) = \frac{94·7282}{BE}$ und L + A + B = $66^0 29' 46''$, ferner weil sin. (L + A + ABE) positiv ist, so liegt der Endpunkt des Bogens entweder im ersten oder zweiten Quadranten, d. h. L + A + ABE ist entweder 4R + ($66^0 29' 46''$) oder 6R — ($66^0 29' 46''$), aus der ersten Annahme folgt, mit Rücksicht, daß L + A = $324^0 28'$ beträgt, ABE = $102^0 1' 46''$, aus der zweiten, nämlich L + A + ABE = 6R — ($66^0 29' 46''$) folgt ABE = $149^0 2' 14''$, und daß B nur den ersten Werth, nämlich ABE = $102^0 1' 46''$ haben könne, muß wieder aus dem Entwurfe des Polygons entschieden werden.

Aus der Gleichung 2) findet man $\sin.\,(K + I + \ldots\ldots + F + BEF = \frac{94\cdot7282}{BE}$, somit wieder $(K + I + H + \ldots\ldots + BEF) = 66^0\,29'\,46''$, und da der Sinus positiv ist, so kann der Endpunkt nur im ersten oder zweiten Quadranten liegen, und weil $(K + I + H + F + G) = 752^0\,36'$ beträgt, so ist $(K + I + \ldots\ldots + G + BEF)$ entweder $8R + (66^0\,29'\,46'')$ oder $10R - (66^0\,29'\,46'')$; aus der ersten Annahme folgt, $BEF = 33^0\,53'\,45''$, und wird $(K + I + \ldots\ldots + F + G + BEF = 10R - (66^0\,29'\,46'')$ gesetzt, so folgt $BEF = 80^0\,54'\,14''$.

Hier ist der wahre Winkel $BEF = 80^0\,54'\,14''$.

Nun zeigt die Figur, daß man den Winkel $CBE = 8^0\,51'\,14''$ und $EBA = 102^0\,1'\,46''$ addiren müsse, um den Winkel CBA zu erhalten, demnach ist $CBA = 110^0\,53'$; und daß man DEB von FEB abziehen müsse, um den Winkel FED zu erhalten, somit ist $FED = 49^0\,9'$.

Die Berechnung des Winkels BEF wäre überflüssig, wenn man von der Richtigkeit des Winkels ABE überzeugt wäre, was auch die letztgeführte Rechnung zeigt.

Die Rechnung wird wie folgt geführt:

In dem Polygone BCDEB ist bekannt

$b = 60\cdot5$	$C = 73^0\,18'$	daher	$\log.\sin.\,C = 9\cdot9812850 +$	$\log.\cos.\,C = 9\cdot4584271 +$
$c = 40\cdot0$	$D = 309^0\,36'$	„	$\log.\sin.\,(C + D) = 9\cdot5900880 +$	$\log.\cos.\,(C + D) = 9\cdot9643470 +$
$d = 57\cdot6$		„	$\log.\sin.\,D = 9\cdot8867801 -$	$\log.\cos.\,D = 9\cdot8044284 +$

$c\sin.\,C = + 38\cdot3129$; $d\sin.\,(C + D) = + 22\cdot4135$; $c\sin.\,D = - 30\cdot8205$; $b\sin.\,(C + D) = + 23\cdot5428$

$c\cos.\,C = + 11\cdot4944$; $d\cos.\,(C + D) = + 53\cdot0603$; $c\cos.\,D = + 25\cdot4969$; $b\cos.\,(C + D) = + 55\cdot7335$.

Daher

$$\text{tang. } CBE = \frac{38\cdot3129 - 22\cdot4135}{60\cdot502 - 11\cdot4944 + 53\cdot0603} = \frac{15\cdot8994}{102\cdot0679} \text{ und } CBE = 8^0\,51'\,14''$$

$$\text{tang. } BED = \frac{-30\cdot8205 - 23\cdot5428}{75\cdot6 - 25\cdot4969 + 55\cdot7335} = -\frac{54\cdot3633}{105\cdot8366} \text{ und } BED = 31^0\,45'\,14''.$$

Zur Berechnung der Seite BE hat man

$CBE = 8^0\,51'\,14''$	log. cos. $= 9\cdot9947838 +$	$b\cos.\,CBE$	$= + 59\cdot7810$
$BED = 328^0\,14'\,46$	„ „ $= 9\cdot9295804 +$	$d\cos.\,BED$	$= + 48\cdot9780$
$D + BED = 637^0\,50'\,46''$	„ „ $= 9\cdot1351705 +$	$c\cos.\,(D + BED)$	$= + 5\cdot4605$

daher $BE = 59\cdot7810 + 48\cdot9782 - 5\cdot4605$, also $BE = 103\cdot2987$.

In dem Polygone ABEF . . . . KL ist:

Gegeben:

l = 71·0	L = 120° 25	somit	log.	l = 1·8524800
a = 46·8	A = 204° 3′	„	„	a = 1·6702459
BE = 103·3	K = 94° 53	„	„	BE = 2·0140950
i = 41·0	I = 132° 52	„	„	i = 1·6127839
h = 43·2	H = 258 38′	„	„	h = 1·6355384
g = 28·8	G = 123° 12	„	„	g = 1·4593925
f = 52·0	F = 143° 1′	„	„	f = 1·7160033
e = 71·6		„	„	e = 1·8549130

L = 120° 25′ = 2·90 — 59° 35′	log. sin. = 9·9356918 +	l sin. L = + 61·4005
A + L = 324° 28 = 4·90 — 35° 32′	„ „ = 9·7643080 —	a sin. (L + A) = — 27·1991
K = 94° 53 = 90 + 4° 53′	„ „ = 9·9984207 +	i sin. K = + 40·8512
K + I = 227° 45 = 2·90 + 47° 45	„ „ = 9·8693597 —	h sin. (I + K) = — 31·9814
H + I + K = 486° 23′ = 6·90 — 53° 37	„ „ = 9·9058317 +	g sin. (H + . . . + K) = + 23·1859
G + H + I + K = 609° 35 = 6·90 + 69° 35′	„ „ = 9·9718233 —	f sin. (G + . . . + K) = — 48·7334
F + G + H + I + K = 752° 36 = 8·90 + 32° 36′	„ „ = 9·7314040 +	e sin. (F + . . . + K) = + 38·5760

daher vermöge der Gleichung 1)

$$61{\cdot}4005 + 27{\cdot}1991 + BE \sin. (A + L + ABE) = 40{\cdot}8512 + 31{\cdot}9813 + 23{\cdot}1859 + 48{\cdot}7334 + 38{\cdot}5760$$

$$\sin. (A + L + ABE) = \frac{94{\cdot}7282}{103{\cdot}2987};\ \underline{A + L + ABE = 66^{\circ}\, 29'\, 46''},$$

und aus der Gleichung 2)

$$61{\cdot}4005 + 27{\cdot}1991 = 10{\cdot}8512 + 31{\cdot}9813 + 23{\cdot}1859 + 48{\cdot}7334 + 38{\cdot}7334 + 38{\cdot}5760 - BE \sin. (K + I + \ldots\ldots + F + BEF),$$

daraus $K + I + \ldots + F + BEF = 66^{\circ}\, 29'\, 46''$.

Die Seite K zu bestimmen, nehme man diese als Abszissenlinie und berechne nach beiden Seiten in dem Polygone ABEF . . . die Abszissen von E, ihre Summe ist = k. Man findet

$$k = - 36{\cdot}0475 - 38{\cdot}0848 + 41{\cdot}1965 - 3{\cdot}4902 + 29{\cdot}0499 - 17{\cdot}0837 + 18{\cdot}1399 + 60^{0}3196,$$

und nach der Reduktion $\underline{k = 53{\cdot}9996}$.

§. 150. Aufgabe. In einem Polygone sind alle Stücke außer drei Winkeln bekannt, diese letzteren sollen aus den bekannten Stücken berechnet werden.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) entweder folgen die unbekannten Winkel auf einander, oder

b) sie sind in dem Polygone zerstreut.

Ad a. Sind in dem Polygone Fig. 162 (siehe die Zeichnung auf pag. 200) D, E, F die unbekannten Winkel, so verbinde man D mit F durch eine Gerade, so wird hiedurch das Polygon in ein Dreieck DEF und in ein Polygon ABCDF ... L getheilt. In dem Polygone ist unbekannt: die Linie DF sammt beiden anliegenden Winkeln CDF und DFG, diese können nach der im vorigen Paragraphe sub a gegebenen Erklärung berechnet werden, und sind diese so auch die Seite DF berechnet, so kann man in dem Dreiecke, da alle drei Seiten gegeben sind, die Winkel bestimmen; sodann muß wieder das Brouillon zeigen, wie die Winkel des Dreieckes mit jenen des Polygons in Verbindung zu bringen sind.

Ad b. Sind die Winkel im Polygone zerstreut, sind z. B. unbekannt C, G, K, so verbinde man ihre Scheitel, und wird in diesem Falle das Ganze in die Polygone CBALK; KIHG; GFEDC und das Dreieck CGK theilen.

In jedem der Polygone sind die Verbindungslinien sammt den beiden anliegenden Winkeln die unbekannten Stücke, können also nach der §. 149 sub a gegebenen Anleitung berechnet werden, und sind die drei Diagonalen bekannt, so können wieder die drei Winkel des Dreieckes GCK gefunden, hiedurch aus allen berechneten Winkeln die gesuchten bestimmt werden; wobei wieder aus der Skizze ersichtlich sein muß, wie die Winkel des Polygons aus den berechneten entstehen.

Die Gleichungen für die Winkel BCK und CKL in dem Polygone ABCKL sind

$$\text{tang. BCK} = \frac{a \sin. B - l \sin. (A + B) + k \sin. (B + A + L)}{b - [a \cos. B - l \cos. (A + B) + k \cos. (A + B + K)]} \ldots\ldots 1),$$

$$\text{tang. CKL} = \frac{l \sin. L - a \sin. (L + A) + b \sin. (L + A + B)}{k - [l \cos. L - a \cos. (L + A) + b \cos. (L + A + B)]} \ldots\ldots 2).$$

Läßt man wieder für die bekannten Größen jene im §. 148 angenommenen Werthe gelten, so ist BCK = 52° 7′ 58″ und CKL = 52° 31′ 2″.

In dem Polygone HGIK findet man die unbekannten Winkel aus folgenden Gleichungen:

$$\text{tang. HGK} = \frac{h \sin. H - i \sin. (H + I)}{g - [h \cos. H - i \cos. (H + I)]} \ldots\ldots 3),$$

$$\text{tang. GKI} = \frac{h \sin. I - g \sin. (H + I)}{i - [h \cos. I - g \cos. (H + I)]} \ldots\ldots 4).$$

Mit den bekannten Werthen findet man HGK = 41° 25′ 41″; die tang. HGK ist zwar negativ, und würde das Polygon HGKI für sich behandelt, so müßte man HGK = 318° 34′ 19″ nehmen, denn hat man bei der Berechnung der tang. HGK den konvexen Winkel H in Rechnung genommen, so muß man auch bei G den konvexen Winkel nehmen.

Aus der nächsten Gleichung folgt GKI = 9° 55′ 41″.

Für die Berechnung der unbekannten Winkel in dem Polygone CDEFG hat man

$$\text{tang. FGC} = \frac{e \sin. F - d \sin. (F + E) + c \sin. (F + E + D)}{f - [e \cos. F - d \cos. (F + E) + c \cos. (F + E + D)]} \; \ldots\ldots 5),$$

$$\text{tang. DCG} = \frac{d \sin. D - e \sin. (D + E) + f \sin. (D + E + F)}{c - [d \cos. D - e \cos. (D + E) + f \cos. (D + E + F)]} \; \ldots\ldots 6),$$

und wenn für die vorkommenden bekannten Größen ihre angenommenen Werthe gesetzt werden, findet man FGC = 43° 29′ 10″; DCG = 5° 15′ 10.

Würde dieses Polygon als selbstständig betrachtet, so müßte man wieder, weil die tang. DCG negativ ist, den Winkel DCG = 354° 44′ 50″ nehmen, denn hier hat man bei D den konvexen Winkel genommen, so müßte man es auch bei E nehmen.

Nachdem die sämmtlichen Winkel der Polygone berechnet sind, so hat man zur Bestimmung der Diagonalen folgende Gleichungen:

$$CK = \frac{a \sin. B - l \sin. (A + B) + k \sin. (A + B + L)}{\sin. BCK} \; \ldots\ldots 7),$$

$$GK = \frac{h \sin. H - i \sin. (H + I)}{\sin. KGH} \; \ldots\ldots 8),$$

$$GC = \frac{d \sin. D - e \sin. (D + E) + f \sin. (D + E + F)}{\sin. DCG} \; \ldots\ldots 9),$$

wobei HGK = 318° 34′ 19″; DCG = 354° 44′ 50″ bedeuten; aus diesen findet man CK = 185·41659; GK = 96·39192; GC = 116·20096 Klafter. Mit diesen Zahlen findet man die Winkel in dem Dreiecke GCK und zwar CGK = 121° 8′ 31″; GCK = 26° 25′ 12″; GKC = 32° 26′ 17″.

Die gesuchten Winkel des Polygons sind demnach folgende:

DCB = GCK + KCB — DCG = 26° 25′ 12″ + 52° 7′ 58″ — 5° 15′ 10″ = 73° 18′
FGH = FGC + CGK — HGK = 43° 29′ 10″ + 121° 8′ 31″ — 41° 25′ 41″ = 123° 12
IKL = IKG + GKC + CKL = 9° 55′ 41″ + 32° 26′ 17″ + 52° 31′ 2″ = 94° 53′.

Um die Unbekannten zu finden, ist die Rechnung folgende:

a = 46·8	log. a 1·6072459	B = 110° 53′	= 2·90 — 69° 7	log. sin. = 9·9704902 +	log. cos. = 9·5520184 —
b = 60·5	„ b 1·7817697	A + B = 314° 56	= 4·90 — 45° 4′	„ „ = 9·8499897 —	„ „ = 9·8489791 +
c = 40·0	„ c 1·6020600	A + B + L = 435° 21	= 4·90 + 75° 21	„ „ = 9·9856960 +	„ „ = 9·4029724 +
d = 57·6	„ d 1·7604225	L = 120° 25	= 2·90 — 59° 35	„ „ = 9·9356918 +	„ „ = 9·7043947 —
e = 71·6	„ e 1·8549130	A + L = 324° 28	= 4·90 — 35° 32	„ „ = 9·7643080 —	„ „ = 9·9105057 +
f = 52·0	„ f 1·7160033	H = 258° 38	= 2·90 + 78° 38′	„ „ = 9·9913971 —	„ „ = 9·2946580 —
g = 28·8	„ g 1·4593925	H + I = 391° 30	= 4·90 + 31° 30	„ „ = 9·7180851 +	„ „ = 9·9307658 +
h = 43·2	„ h 1·6355384	I = 132° 52	= 2·90 — 47° 8′	„ „ = 9·8650677 +	„ „ = 9·8326970 —
i = 41·0	„ i 1·6127839	F = 143° 1′	= 2·90 — 36° 59	„ „ = 9·7792953 +	„ „ = 9·9024438 —
k = 54·0	„ k 1·7323938	E + F = 192° 10	= 2·90 + 12° 10	„ „ = 9·3237802 —	„ „ = 9·9901339 —
l = 71·0	„ l 1·8524800	E + F + D = 501° 46	= 6·90 — 38° 14	„ „ = 9·7915963 +	„ „ = 9·8951445 —
		D = 309° 36	= 4·90 — 50° 24′	„ „ = 9·8867801 —	„ „ = 9·8044284 +
		D + E = 358° 45	= 4·90 — 1° 15′	„ „ = 8·3387529 —	„ „ = 9·9998966 +

Die Werthe der Glieder sind in der Gleichung 1)

a sin. B = + 43·72564; l sin. (A + B) = — 50·40455; k sin. (A + B + L) = + 52·2441

a cos. B = — 16·68262; l cos. (A + B) = + 50·28739; k cos. (A + B + L) = + 13·65734

$$\text{daher tang. BCK} = \frac{43·72564 + 50·40455 + 52·2441}{60·5020 + 16·68262 + 50·28739 - 13·65734} = \frac{146·37460}{113·81463};\ \text{BCK} = 52^\circ\, 7'\, 58''4.$$

In der Gleichung 2)

l sin. L = + 61·40048; a sin. (A + L) = — 27·19906; b sin. (A + B + L) = + 58·53501

l cos. L = — 36·04747; a cos. (A + L) = + 38·08479; b cos. (A + B + L) = + 15·30178

$$\text{daher tang. CKL} = \frac{61·40048 + 27·19906 + 58·53501}{54·0 + 36·04747 + 38·08479 - 15·30178} = \frac{147·13455}{112·83048};\ \text{CKL} = 52^\circ\, 31'\, 1''6.$$

In der Gleichung 3)

h sin. H = — 42·35801; i sin. (H + I) = + 21·42244; h cos. H = — 8·51523; i cos. (H + I) = + 34·95825,

$$\text{somit tang. HGK} = \frac{-\,42·35801 - 21·42244}{28·8 + 8·51523 + 34·95825} = -\frac{63·78045}{72·27348};\ \text{HGK} = 41^\circ\, 25'\, 40''8.$$

In der Gleichung 4)

h sin. I = + 31·66694; g sin. (H + I) = + 15·04796; h cos. I = — 29·39243; g cos. (H + I) = 24·55604,

$$\text{also GKI} = \frac{31·66694 - 15·04796}{41·0 + 29·39243 + 24·55604} = \frac{16·61894}{94·94847};\ \text{GKI} = 9^\circ\, 55'\, 40''7.$$

In der Gleichung 5)

$$e \sin. F = +43{\cdot}07332;\ d \sin. (E+F) = -12{\cdot}13955;\ c \sin. (F+E+D) = +24{\cdot}75462$$

$$c \cos. F = -57{\cdot}19483;\ d \cos. (E+F) = -56{\cdot}30623;\ c \cos. (F+E+D) = -31{\cdot}41988$$

und $\text{tang. } CGF = \frac{43{\cdot}07332 + 12{\cdot}13955 + 24{\cdot}75462}{52{\cdot}0 + 57{\cdot}19483 - 56{\cdot}30623 + 31{\cdot}41988} = \frac{79{\cdot}96749}{84{\cdot}30848};\ CGF = 43^0\,29'\,10''7.$

In der Gleichung 6) ist

$$\text{tang. } DCG = \frac{-44{\cdot}38156 + 1{\cdot}561946 + 32{\cdot}18101}{40{\cdot}0 - 36{\cdot}71562 + 71{\cdot}58295 + 40{\cdot}84581} = -\frac{10{\cdot}638604}{115{\cdot}71317};\ DCG = 5^0\,15'\,9''7.$$

In der Gleichung 7) ist

$$CK = \frac{43{\cdot}72564 + 50{\cdot}40455 + 52{\cdot}24441}{\sin. (52^0\,7'\,58''4)},\ \underline{CK = 185{\cdot}41659.}$$

In der Gleichung 8) ist

$$GK = \frac{-42{\cdot}35801 - 21{\cdot}42244}{\sin. (318^0\,34'\,19'')},\ \underline{GK = 96{\cdot}39192.}$$

In der Gleichung 9) ist

$$GC = \frac{-44{\cdot}38156 + 1{\cdot}561946 + 32{\cdot}18101}{\sin. (354^0\,44'\,50'')},\ \underline{GC = 116{\cdot}20096.}$$

Die Winkel des Dreieckes CGK zu berechnen, setze man $CK + GK + GC = 2S$, so ist

$$\cos. \tfrac{1}{2} GCK = \sqrt{\frac{S(S-GK)}{CG\,.\,CK}};\ \cos. \tfrac{1}{2} CGK = \sqrt{\frac{S(S-CK)}{CG\,.\,GK}};\ \cos. \tfrac{1}{2} CKG = \sqrt{\frac{S(S-CG)}{CK\,.\,GK}}$$

Nun ist

$S = 199{\cdot}004735$	$\log. S = 2{\cdot}2988634$	$\log. \cos. \tfrac{1}{2} GCK = 9{\cdot}9883534$
$S - GK = 102{\cdot}612815$	$\log. (S - GK) = 2{\cdot}0112016$	„ „ $\tfrac{1}{2} CGK = 9{\cdot}6913866$
$S - CK = 13{\cdot}588145$	„ $(S - CK) = 1{\cdot}1331601$	„ „ $\tfrac{1}{2} CKG = 9{\cdot}9823621$
$S - CG = 82{\cdot}803775$	„ $(S - CG) = 1{\cdot}9180501$	

somit $\tfrac{1}{2} GCK = 13^0\,12'\,36{\cdot}0$ und $\underline{GCK = 26^0\,25'\,12''}$

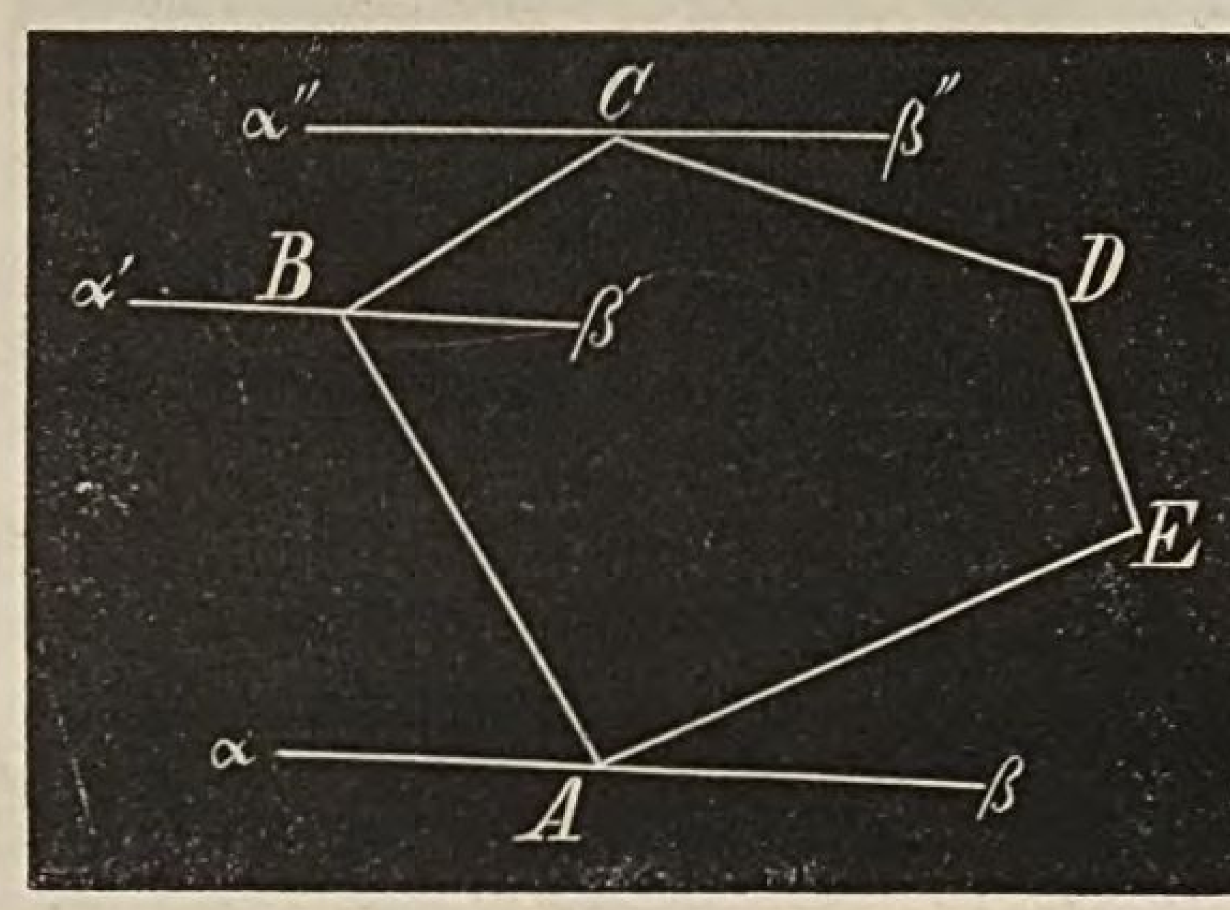
„ $\tfrac{1}{2} CGK = 60^0\,34'\,15{\cdot}5$ „ $\underline{CGK = 121^0\,8\,31}$

„ $\tfrac{1}{2} CKG = 16^0\,13'\,8{\cdot}6$ „ $\underline{CKG = 32^0\,26\,17.}$

Zusatz. Da bei der Rechnung sehr oft aus dem Brouillon entschieden werden muß, welcher der möglichen Werthe eines Winkels der richtige sei, so folgt, daß jenes mit dem größten Fleiße entworfen sein soll.

§. 151. Wenn die Alhidade eines Astrolabiums mit einer Boussole verbunden ist, wie dieß bei dem Instrumente von Kraft der Fall ist, so können die Winkel auch mit Springständen gemessen werden. Man braucht nur in jedem Standpunkte vorerst den Nullpunkt des Nonius genau auf den Anfang der Theilung zu stellen, wodurch die beiden Visirebenen übereinander fallen und dann den horizontal gestellten Limbus so drehen, daß die Magnetnadel auf einen und denselben im ersten Standpunkte willkührlich gewählten Grad schief einspielt; ist dieß geschehen, so ist die mit dem Limbus verbundene Visirebene stets mit sich parallel, somit das Astrolabium orientirt.

Ist ABCDE, Fig. 164, das Polygon, dessen Winkel gesucht werden, A der erste Standpunkt, $\alpha\beta$ die ursprüngliche Lage beider Visirebenen, während die Magnetnadel auf n Grade steht, so können auf dem Limbus des Astrolabiums die Winkel αAB und αAE, daher auch BAE bestimmt werden.



Geht man nun mit dem Instrumente nach C, und ist $\alpha''\beta''$ die mit $\alpha\beta$ parallele Lage der fixen Visirebene, so bestimmt man an dem Limbus die Winkel $\alpha''CB$, $\alpha''CD$; dann ist, wenn $\alpha'\beta'$ eine durch B mit $\alpha\beta$, somit auch mit $\alpha''\beta''$ parallele Linie vorstellt, der Winkel $ABC = \alpha AB + \alpha''CB$, also durch die gemessene ausgedrückt.

Die Schärfe der Messung hängt nur von der Richtkraft der Magnetnadel ab, je genauer die parallele Lage der unbeweglichen Visirebene eingehalten wird, desto richtiger ist der abgeleitete Winkel bestimmt.

Zusatz. Sind in einem Polygone von n Seiten alle Winkel gemessen worden, so müssen diese, bevor sie zur Rechnung verwendet werden, addirt und ihre Summen auf (n — 2) 180 Grade ausgeglichen werden.

Bedeutet d den kleinsten Werth bis auf welchen jeder Winkel vermöge der Einrichtung des Instrumentes abgelesen werden kann, so ist nd das Maximum der Differenz zwischen der theoretischen und der durch Messung erhaltenen Summe; findet man einen größeren Unterschied, so müssen jene Winkel, bei welchen man einen Fehler begangen zu haben vermuthet, noch ein Mal gemessen werden.

Die erlaubte Differenz wird auf alle Winkel ohne Rücksicht ihrer Größe zu gleichen Theilen vertheilt.

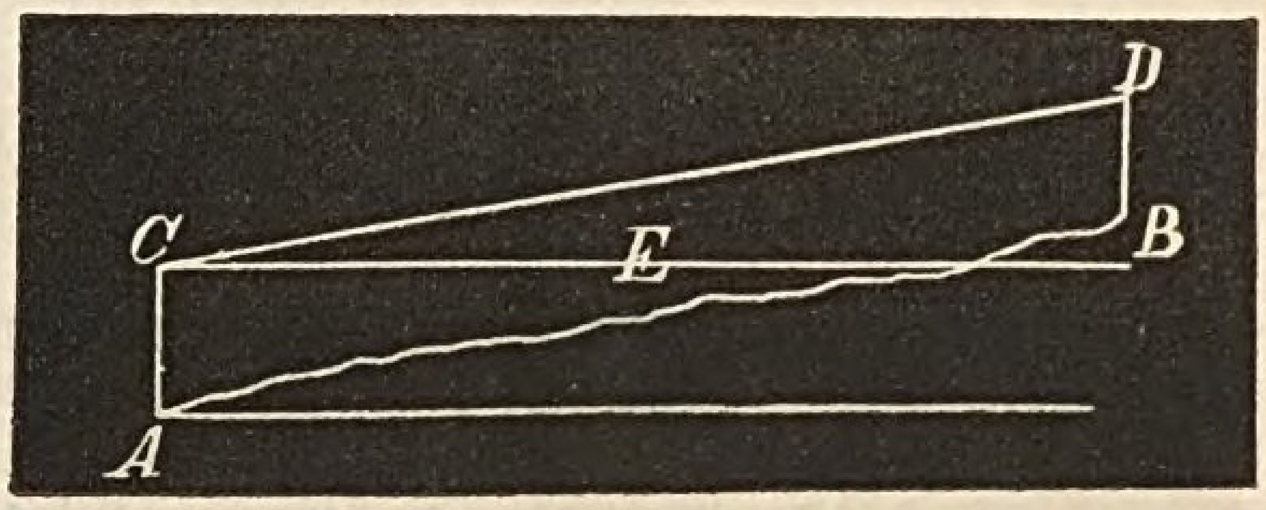
Sind z. B. die sämmtlichen Winkel eines Polygons von 11 Seiten mit einem Astrolabium, dessen Nonius 2 Minuten angibt, gemessen worden, so ist die theoretische Summe = 1620 Grade, die durch die Messung erhaltene darf somit 1620 ± 22′ betragen. Angenommen der Unterschied sei + 19 Minuten, so wird jeder Winkel um $^{19}/_{11}$ Minuten vermindert; zur Vermeidung der Bruchtheile einer Sekunde würde man in diesem Falle 7 Winkel um 1′ 44″, die übrigen um 1′ 43″ vermindern.

Dieser Ausgleichung der Winkel ohngeachtet werden die durch die Rechnung erhaltenen Resultate kleine Fehler *enthalten*, deren erlaubte Grenze von der

Güte der Meßwerkzeuge und der mehr oder weniger günstigen Beschaffenheit des Terrains abhängt, jedoch nicht näher angegeben werden kann.

§. 152. Mit Hilfe der Astrolabien und des Boussolen-Instrumentes kann man auch die Höhen- und Tiefenwinkel messen, und diese Daten sehr gut brauchen, wenn man bei der Messung der horizontalen Projektion der Linien auf ein stark geneigtes Terrain kommt.

Die Art der Neigungswinkel einer Linie zu messen, ist in der Fig. 165 dargestellt; AB ist die Linie, deren horizontale Projektion gesucht wird, A der Standpunkt des Instrumentes, AC die Höhe der Okularspalte ober dem Boden, sobald die eine Visur horizontal ist, BD ein Maßstab (Nivellirlatte), auf dem die Höhe der Okularspalte aufgetragen ist, so daß BD = AC ist, endlich EC eine durch die Okularspalte gedachte horizontale Linie oder Ebene.



Sobald das Instrument aufgestellt ist, wird bei dem einfachen Astrolabium oder bei der Boussole der Limbus in die vertikale Ebene umgelegt und so gedreht, daß die Spitze des Senkels auf Null zeigt, so ist die eine Visirebene horizontal; bei dem Instrumente von Kraft wird auf dem umgelegten Limbus eine Libelle aufgesetzt, und durch ein langsames Drehen desselben zum Einspielen gebracht; bei dem Astrolabium von Voigtländer wird die Visur durch die oberhalb liegende Libelle horizontal gestellt.

Nun wird die Höhe der Okularspalte oder Okularöffnung ober dem Boden auf dem Maßstabe ersichtlich gemacht, dieser sodann in jenem Punkte der Linie aufgestellt, bis wohin sie ein nahe gleiches Gefälle hat und der erwähnte Punkt am Maßstabe anvisirt.

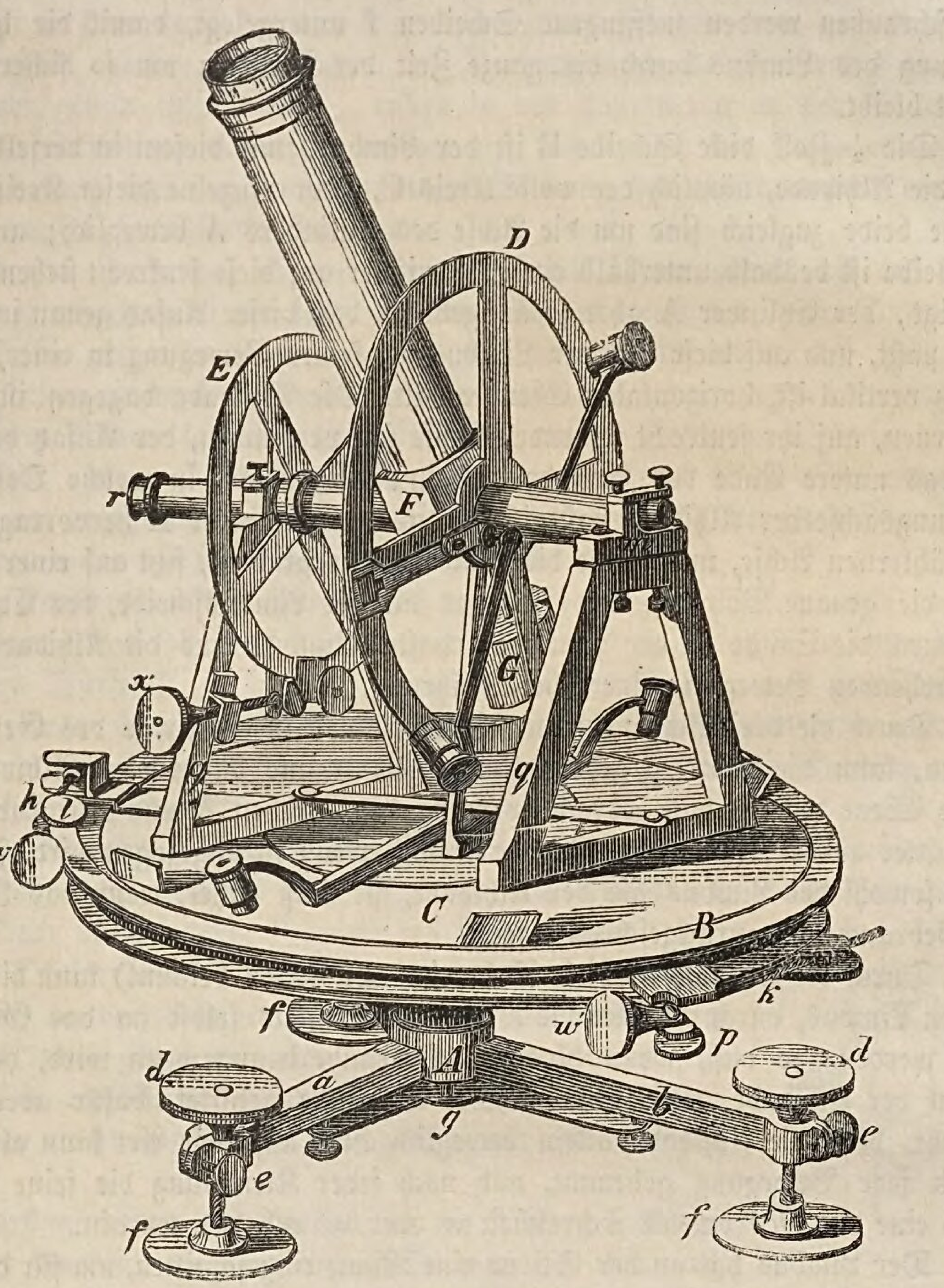
Bei der Boussole gibt der Index des Senkels, bei den übrigen Instrumenten der Nonius den Höhen- oder Tiefenwinkel; ist dieser und die wahre Länge der Linie bekannt, so kann ihre Projektion leicht berechnet werden. Bei den Astrolabien ohne Fernrohr können jedoch Neigungswinkel unter 6° nicht gemessen werden, weil der Objektivfaden der Alhidade durch den Diopterflügel des Limbus verstellt wird.

Der Reichenbach'sche Theodolit.

§. 153. Der Theodolit nach der Reichenbach'schen Konstruktion ist unter denjenigen Instrumenten, deren wir uns gegenwärtig in der praktischen Geometrie zum Winkelmessen bedienen, eines der sinnreichsten und übertrifft sowohl an Zweckmäßigkeit als Genauigkeit die älteren, unter demselben Namen vorkommenden Instrumente, nämlich die Theodoliten von Adams, Ramsden oder die sogenannten Multiplikationskreise von Borda*).

*) In Frankreich scheinen die Theodoliten nach der englischen oder deutschen Konstruktion wenig beliebt zu sein, denn in dem Lehrbuche: Cours de Topographie et de Géodésie von Salneuve, Paris 1841 ist nur der schwerfällige Multiplikationskreis Borda's beschrieben, und das Instrument, was daselbst Seite 281 Theodolit genannt wird, ist wieder nur eine Abart desselben Kreises.

Die Konstruktion des in der Fig. 166 dargestellten Theodoliten ist folgende:



Die drei Arme a, b, c und der über drei Zoll dicke Cylinder A bilden das Gestell des Instrumentes, sie sind mit einander fest verbunden, der Winkel zwischen zwei Armen beträgt 120 Grade. Die breitköpfigen mit d bezeichneten Schrauben dienen zur horizontalen Stellung des Limbus; ihre in den Enden der drei Arme einge-

---

Die Reichenbach'schen Theodoliten weichen in einigen Stücken von einander ab, denn schon der Erfinder selbst hat drei Arten derselben unterschieden, nämlich: den einfachen, den multiplizirenden und den astronomischen Theodoliten, und seitdem haben dieselben (besonders die im Wiener polytechnischen Institute verfertigten) wieder manche sehr zweckmäßige Aenderungen erhalten. Wir haben jedoch die Darstellung eines einzigen Theodoliten aufgenommen, hiezu aber die neueste sowohl zu geodätischen als astronomischen Messungen gleich vortreffliche Konstruktion gewählt, am Ende des Paragraphes aber die Unterschiede dieses Theodoliten von den andern beigefügt.

schnittenen Schraubenmuttern sind gespalten, und können durch die Klemmschrauben e nach Bedarf an die Schraubenspindel angepreßt werden: unter die Spitzen der Stellschrauben werden messingene Scheiben f untergelegt, damit die horizontale Stellung des Limbus durch die ganze Zeit der Messung um so sicherer unverändert bleibt.

Die $\frac{1}{2}$ Zoll dicke Scheibe B ist der Limbus, mit diesem in derselben Ebene liegt die Alhidade, nämlich der volle Kreis C, jeder einzelne dieser Kreise für sich, so wie beide zugleich sind um die Achse des Cylinders A beweglich; an die Limbusscheibe ist deshalb unterhalb ein cylindrischer auf diese senkrecht stehender Ansatz befestigt, der Cylinder A aber so ausgehöhlt, daß dieser Ansatz genau in die Oeffnung paßt, und auf diese Art den Limbus bei seiner Bewegung in einer, wenn der Ansatz vertikal ist, horizontalen Ebene erhält. Die Alhidade dagegen ist mit einer stählernen, auf ihr senkrecht stehenden Achse fest verbunden, der Ansatz des Limbus und das untere Ende des Cylinders A sind durchbohrt, in welche Oeffnung die Drehungsachse der Alhidade paßt. Das aus dem Cylinder A hervorragende Ende der stählernen Achse, um welche die Alhidade beweglich ist, sitzt auf einer Platte g; durch die genaue Bohrung des Ansatzes an der Limbusscheibe, des Cylinders A und durch die Stütze an der Platte g erhalten Limbus und die Alhidade während der drehenden Bewegung eine sichere Führung.

Durch die drei Schrauben, welche von unten in die Arme des Gestelles eingreifen, kann die Platte g gehoben oder gesenkt und dadurch die Alhidade genau in die Ebene des Limbus gebracht werden; die zwischen A und g liegende Schraubenmutter an der Achse der Alhidade hemmt, wenn sie angezogen wird, jede Bewegung sowohl des Limbus als der Alhidade, sie muß daher, wenn das Instrument im Gebrauche ist, zurückgeschraubt sein.

Durch die Klemme h (diese ist bereits aus §. 72 bekannt) kann die Alhidade an den Limbus, durch die Klemme k aber der Limbus selbst an das Gestell befestigt werden, so daß, wenn blos die Schraube h angezogen wird, der Limbus sammt der Alhidade, wird aber dieselbe Schraube gelüftet, dafür aber k rechts gedreht, blos die Alhidade allein beweglich ist; auf diese Art kann also durch h und k jede Bewegung gehemmt, und nach jeder Klemmung die feine Bewegung durch eine der Mikrometer-Schrauben w oder w′ erhalten werden.

Der Limbus hat an der Stirne eine Rinne eingeschnitten, um für die Klemmbacken die erforderliche Fläche zu erhalten.

Der Durchmesser des Alhidadenkreises beträgt bei diesem Instrumente 9 Zoll, er ist zugleich auch der innere Durchmesser des von der linken nach der rechten Seite bis 360 und zwar von 10 zu 10 Minuten auf Silber getheilten Kreises*). Mittelst eines der um 90 Grade von einander abstehenden, ebenfalls auf Silber getheilten nachtragenden vier Nonien kann man den gemessenen Winkel bis auf 10 Sekunden ablesen, wozu man sich der an dem beweglichen Träger gehaltenen Loupen bedient**).

---

*) Die Größe eines Theodoliten pflegt man nach dem Durchmesser der Alhidade zu beurtheilen, und da macht man (Preistarif der Werkstätte des k. k. polytechnischen Institutes in Wien) Theodoliten von 7½, 8, 9 und 12 Zoll Durchmesser; die von Reichenbach selbst verfertigten hatten alle nur 8 Zoll im Durchmesser.

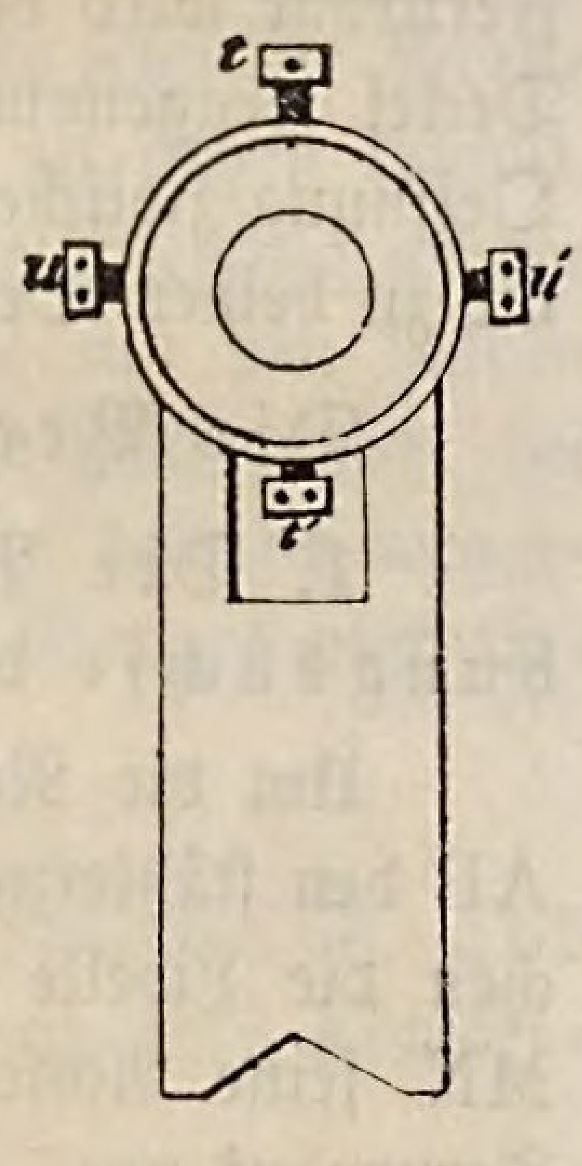
**) Die Ursache, warum vier Nonien angebracht sind, ist im §. 80 und 81 zu suchen.

Auf der Alhidade stehen die zwei vertikalen Träger q und q', auf welchen die horizontale Drehungsachse des Fernrohrs in den Lagern ruht; das eine dieser Achsenlager m kann durch die vier Schrauben etwas gehoben oder gesenkt, sodann aber festgestellt werden. Die Enden der Drehungsachse des Fernrohrs sind von Stahl, sehr genau cylindrisch*), ruhen in den Lagern nur an den Seiten auf, damit jedes Schlottern vermieden werde, und stehen nach der Länge etwas über die Lager heraus, weil bei der horizontalen Stellung des Instrumentes die Füße der Libelle auf diese Cylinder kommen.

Mit dem Fernrohre ist ein vertikaler Kreis D verbunden, die auf diesem befindliche Eintheilung ist mit jener auf dem Limbus gleich, der innere Durchmesser des auf Silber getheilten Kreises beträgt bei diesem Instrumente $7\frac{1}{2}$ Zoll; mittelst der zwei in einem Durchmesser liegenden von der Bewegung des Kreises ganz unabhängigen Nonien kann der Höhewinkel bis auf 10 Sekunden abgelesen werden. Der auf der andern Seite des Fernrohrs liegende Kreis E ist nicht eingetheilt und dient nur dazu, das Fernrohr, somit auch den Kreis D, bei jeder Lage fest zu halten, wozu unten die Klemmung angebracht ist.

Die Konstruktion des Fernrohres weicht bei diesem Instrumente von der gewöhnlichen etwas ab; das Rohr endet an der Drehungsachse in einen hohlen messingenen Würfel F, in diesem ist ein dreiseitiges Prisma aus gewöhnlichem, aber sehr reinem Glase so gestellt, daß die durch das Objektivglas kommenden auf das Prisma auffallenden Strahlen unter einem auf ihre vorige Richtung rechten Winkel reflektirt werden**).

Das Okularglas ist bei r und zwar in dem einen Arme der Drehungsachse des Fernrohrs, die deshalb hohl ist; der volle Cylinder G gleicht das auf der vordern Seite überwiegende Gewicht des Rohres aus.



Die Okularröhre ist längs der Achse verschiebbar, auch läßt sie sich an derselben etwas drehen und nach dieser Drehung durch zwei gegen einander wirkende Schräubchen feststellen. Die einfallende Lichtmenge so wenig wie möglich zu schwächen macht man bei den Theodoliten nur astronomische Okulare.

Ursprünglich sind die Libellen an die stählernen Achsen aufgehängt worden, gegenwärtig stellt man sie aber auf, weshalb die Füße der Libelle, wie aus der Ansicht Fig. 167 ersichtlich ist, unten ausgeschnitten sind, und so weit auseinander sein müssen, daß sie außerhalb der Lager zu stehen kommen. An dem einen Ende der Libelle sind die zur Berichtigung erforderlichen Schrauben u, u' und t, t'.

Diese Libellen bedürfen aber sehr oft einer Rektifikation, wahrscheinlich deshalb, daß das Metall zwischen den Schräubchen bei der Rektifikation geklemmt

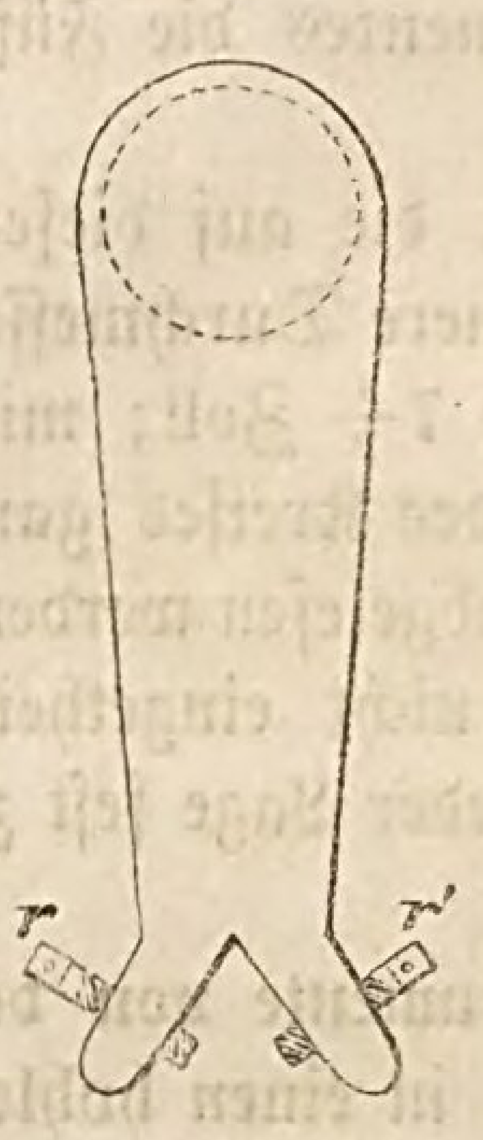
---

*) Ueber die technische Bearbeitung der Rotationszapfen an astronomischen und geodätischen Instrumenten hat Prof. Stampfer im 19. Bande der polytechnischen Jahrbücher einen Aufsatz geliefert.

**) Die mit dieser Einrichtung des Fernrohres vorkommenden Instrumente nennt man Theodoliten mit gebrochenem Fernrohr.

bei einer erhöhten Temperatur sich ungleichförmig ausdehnt, wodurch jede Rektifikation beeinträchtigt wird.

Der geniale Werkmeister des k. k. polytechnischen Institutes in Wien, Chr. Starke, hat auf eine höchst einfache und sinnreiche Art dieser Spannung zwischen den Theilen einer Libelle abgeholfen; nach seiner Konstruktion, Fig. 168, sind in dem einen Fuße der Fassung blos zwei etwas dickere Schräubchen r r' mit sehr feinen Gewinden, die Glasröhre liegt in der Fassung, ohne jedoch mit ihr in eine Berührung zu kommen, auf einer Unterlage befestigt. Beim Gebrauche wird der Theodolit entweder auf ein festes Stativ oder auf eine Mauer gestellt.



Anmerkung. Denkt man sich statt des gebrochenen ein gewöhnliches Fernrohr, so hat man einen sogenannten neunzölligen multiplizirenden Theodoliten, und ist überdies der Limbus mit dem Cylinder A fest verbunden, also nicht beweglich, weshalb auch die Klemmung k wegfällt, so hat man einen einfachen 9" Theodoliten. Bei den multiplizirenden Theodoliten hat Reichenbach noch ein Fernrohr an den Cylinder A befestigt, dieses sogenannte Versicherungsrohr hält man aber gegenwärtig für überflüssig; auch waren bei den ursprünglichen Theodoliten die Alhidade und der Limbus durchbrochen, was jedoch Nebensache ist.

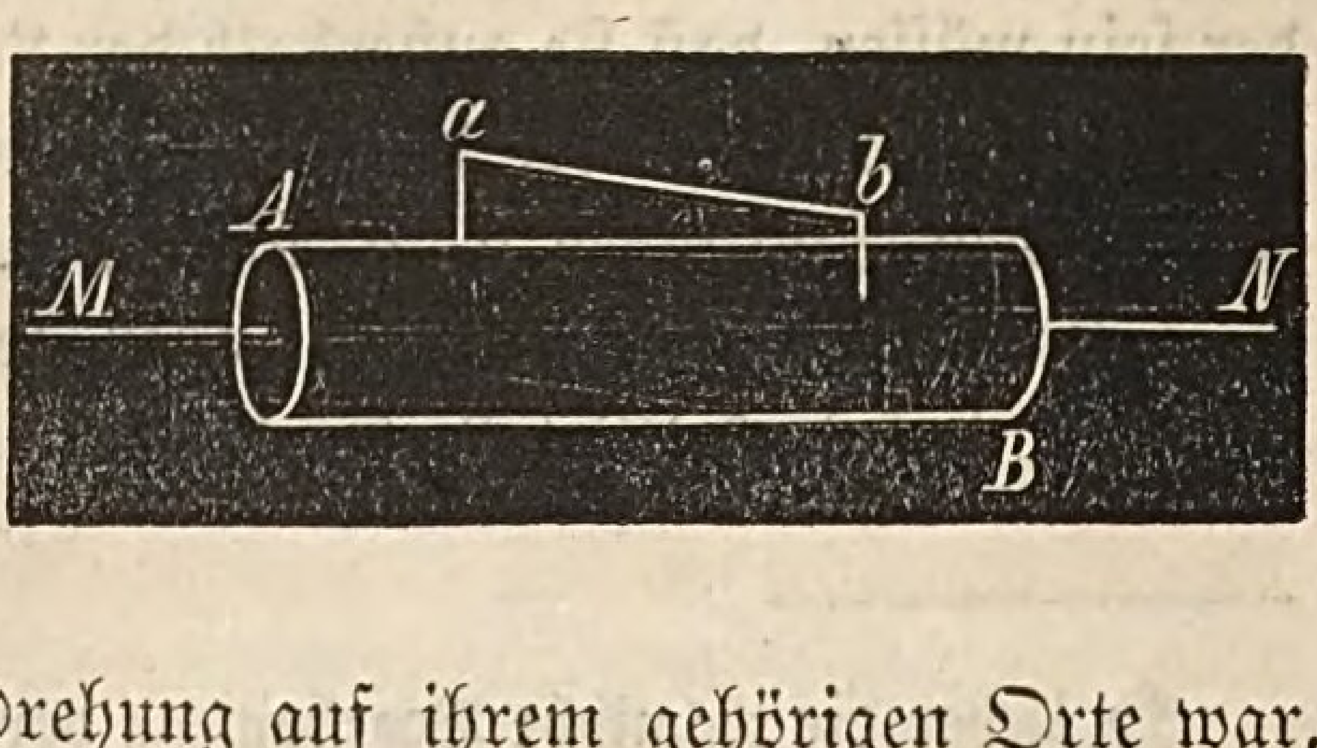
Rektifikation des Theodoliten.

§. 154. Dieses Instrument ist so eingerichtet, daß sich der Geometer jeden Augenblick von der Richtigkeit jedes einzelnen Theiles sehr leicht überzeugen kann; will man um dasselbe rektifiziren, so ist hiebei folgende Ordnung die geeignetste: Das Fernrohr wird beiläufig horizontal gestellt, die oberhalb den Lagern angebrachten Deckel weggenommen, die Libelle durch die oberhalb der Achse frei gewordene Oeffnung zwischen den Speichen des Höhenkreises behutsam durchgesteckt, und auf die zu beiden Seiten der Träger vorstehenden stählernen Cylinder gesetzt.

Die Berichtigung der Libelle ist nun von doppelter Art:

1. Die Achse der Libelle muß mit der horizontalen Drehungsachse des Fernrohres in einer Ebene liegen.

Um die Nothwendigkeit dieser Rektifikation einzusehen, stelle die Fig. 169 AB den stählernen Cylinder, auf welchen die Libelle ab aufgestellt wird, MN seine Achse, also auch die des Fernrohrs vor, und nehmen wir zur größeren Deutlichkeit MNa liege in einer Ebene, b aber stehe aus dieser heraus.



Denken wir uns ab werde nach vorwärts bewegt, so wird b tiefer als a kommen, die Blase, welche vor der Drehung auf ihrem gehörigen Orte war, wird gegen a gehen, und man könnte, weil die Blase nicht mehr einspielt, vermuthen, die Drehungsachse des Fernrohres habe ihre Lage geändert, also die Ursache dieser Erscheinung wo anders suchen als sie ist.

Liegt aber ab mit MN in einer Ebene, und spielt die Blase ein, so wird sich diese, wenn ab um MN gedreht wird, nicht nach der Länge bewegen, weil ab in Bezug auf MN gleich hoch bleibt.

Will man also untersuchen, ob die Achse der Libelle mit der Drehungsachse des Fernrohrs in einer Ebene liegt, so bringe man die Libelle in die Richtung einer Stellschraube und mit dieser die Blase in die Mitte.

Neigt man die Libelle behutsam, so daß sie die eine oder die andere Speiche des Höhenkreises berührt, mit ihren Füßen aber auf der Drehungsachse aufsteht und bemerkt man eine Bewegung der Blase nach der Länge der Röhre, so ist eine Rektifikation nöthig.

Bei der älteren Einrichtung der Libelle Fig. 167 (siehe die Zeichnung auf pag. 225) wird das eine in der horizontalen Richtung wirkende Schräubchen uu' nachgelassen, das andere angezogen und dadurch die Achse der Libelle entsprechend verstellt.

Hat aber eine Libelle jene Fig. 168 (pag. 226) dargestellte Einrichtung, steht sie also mittelst der Schräubchen auf der Drehungsachse des Fernrohrs, so wird der Zweck erreicht, wenn nur eines dieser Schräubchen entsprechend gedreht wird. Nach welcher Seite die Libellenachse zu verstellen sei, läßt sich leicht aus dem Ausweichen der Blase beurtheilen.

2. Die Achse der Libelle muß parallel mit der horizontalen Drehungsachse des Fernrohrs sein.

Ist nach dem Vorigen die Libelle in die Richtung einer Fußschraube gestellt, und mittelst dieser die Blase in die Mitte gebracht, so nehme man die Libelle behutsam weg, und schraube die zwei Deckel oberhalb den Lagern wieder an, wodurch die Libelle eine gesichertere Stellung erhält. Nun setze man jene mit Verwechslung ihrer Träger wieder auf, nämlich so, daß der rechte Fuß der Libelle auf den linken, somit der linke Fuß auf den rechten Cylinder zu stehen kommt, und lasse die Blase zur Ruhe kommen. Nimmt diese ihre vorige Stellung wieder an, so ist kein Fehler vorhanden, wo nicht, so wird die Blase um den halben Fehler an der Stellschraube des Gestelles eingestellt, die übrige Hälfte aber bei der einen Libelle mittelst der Schräubchen tt', bei der andern aber dadurch weggebracht, daß man die Schräubchen rr' um denselben Theil eines Ganges nach Erforderniß auf- oder abwärts schraubt.

Die Richtigkeit dieser Operation folgt aus dem §. 84.

3. Die horizontale Drehungsachse des Fernrohrs und die vertikale Drehungsachse der Alhidade müssen auf einander senkrecht stehen.

Um dies zu untersuchen, wird die berichtigte Libelle auf die Achsen aufgesetzt, in die Richtung einer Fußschraube und mittelst dieser zum Einspielen gebracht. Nachdem die Blase zur Ruhe gekommen ist, dreht man die Alhidade sammt der Libelle um 180 Grade, kommt jetzt die Blase nicht in der Mitte zur Ruhe, so wird die Hälfte des Ausweichens an der Fußschraube, die andere Hälfte durch die vier Schrauben beseitigt, durch welche das eine der Achsenlager m bewegt werden kann; und zwar werden die beiden untern geöffnet, die obern angezogen, wenn das Lager tiefer, und umgekehrt, wenn es höher gestellt werden soll. Die Arbeit wird so oft wiederholt, bis die Blase in der Mitte bleibt, die Alhidade mag in

der ersten oder zweiten Lage stehen. Man darf sich indessen nicht irre machen lassen, wenn die Blase während der Drehung ganz von ihrer Stelle kommen sollte, sie braucht nur wieder, nachdem genau um 180 Grade gedreht worden ist, ihren gehörigen Ort einzunehmen; auch muß man die Alhidade desto genauer um 180 Grade wenden, je weniger die Ausweichung der Blase beträgt.

Nach diesem erst kann man die Alhidade selbst horizontal stellen; man bringt nämlich die Blase mittelst einer Fußschraube in die Mitte, dreht hierauf die Alhidade um 90°, führt durch die zwei andern Fußschrauben, indem man sie der Libelle entsprechend dreht, die Blase wieder in die Mitte und setzt dies wechselseitige Einstellen durch alle drei Fußschrauben so lange fort, bis die Blase in jeder Stellung einspielt; zur Kontrolle muß die Blase in der Mitte ruhig stehen bleiben, wenn die Alhidade langsam ganz herum gedreht wird. Dies ist zugleich eine Probe der vorhergehenden Rektifikation.

4. Das Fadenkreuz muß mit dem optischen Bilde in einer Ebene liegen.

Diese Rektifikation haben wir bereits bei dem Perspektivlineale §. 107, sub 2, kennen gelernt, weshalb wir nur das diesem Instrumente Eigenthümliche hier anführen wollen. Der Beobachter richtet zuerst nach der Eigenthümlichkeit seines Auges das Okularglas so, daß das Fadenkreuz möglichst deutlich und scharf begränzt erscheint; dies erreicht er dadurch, daß er die äußere Fassung des Okularglases etwas vor- oder zurückschraubt. Sollte jedoch das Hinausschrauben so viel betragen, daß dem Okularglase eine feste Haltung benommen ist, so müßte das Fadenkreuz innerhalb der Okularröhre äußerst vorsichtig etwas zurückgeschoben werden. Um auch das Objekt eben so deutlich zu sehen, richtet man das Fernrohr auf ein entferntes Signal und zieht die Okularröhre längs des stählernen Cylinders so weit heraus, bis diese Absicht erreicht ist.

Dabei wird das ränderirte, in der Zeichnung nicht sichtbare Druckschräubchen, mittelst welchem die Okularröhre festgestellt ist, etwas gelüftet.

Ob das Bild genau in der Ebene des Fadenkreuzes sich befinde, dies zu erkennen, ist bereits erklärt worden.

5. Die Visirebene muß auf die horizontale Drehungsachse des Fernrohrs senkrecht stehen.

Man löse die Klemme aus dem kleinen vertikalen Kreise aus, öffne die beiden Deckel oberhalb der Achsenlager, um das Fernrohr sodann heraus nehmen zu können.

So vorbereitet, richte man das Fernrohr auf einen entfernten, nahe im Horizonte liegenden Punkt, klemme sowohl den Limbus als auch die Alhidade fest, und bringe, wenn es nöthig ist, den Durchschnittspunkt der Fäden durch die Mikrometer-Schraube scharf auf den pointirten Punkt. Nun hebe man behutsam die Achse aus ihren Lagern und setze sie umgekehrt, nämlich so auf, daß die Okularröhre außerhalb des zweiten Lagers komme.

Wird nun der pointirte Punkt nicht mehr scharf geschnitten, so muß man die Abweichung zur Hälfte durch die Mikrometer-Schraube der Alhidade, die andere Hälfte aber dadurch korrigiren, daß man bei diesem Instrumente diejenige der drei Druckschrauben, welche auf das gläserne Prisma nach der Richtung der

optischen Achse wirken, und zwar die entfernteste vom Okulare etwas bewegt, wodurch die Lage der optischen Achse gegen die Drehungsachse geändert wird.

Die Bewegung dieser Schraube darf nur äußerst gering, ja kaum merklich sein, um schon eine merkliche Wirkung hervorzubringen.

Durch wiederholtes Umlegen der Achse wird man sich von der Richtigkeit ihrer Stellung auf die Drehungsachse überzeugen.

Alle übrigen Schrauben an dem Würfel bleiben ganz unberührt, um die durch sie bewirkte Stellung des Prisma in anderer Beziehung nicht zu ändern und die Präzision des Fernrohres nicht zu beeinträchtigen.

Zusatz. Ist an dem Theodoliten ein gewöhnliches Fernrohr angebracht, so wird bei dieser Rektifikation der halbe Fehler mittelst der Mikrometer-Schraube der Alhidade, die andere Hälfte aber mittelst den zwei Schräubchen an der Okularröhre weggebracht, durch welche das Fadenkreuz in der horizontalen Richtung verschoben wird, was bereits bei der Rektifikation eines Perspektivdiopters erklärt worden ist.

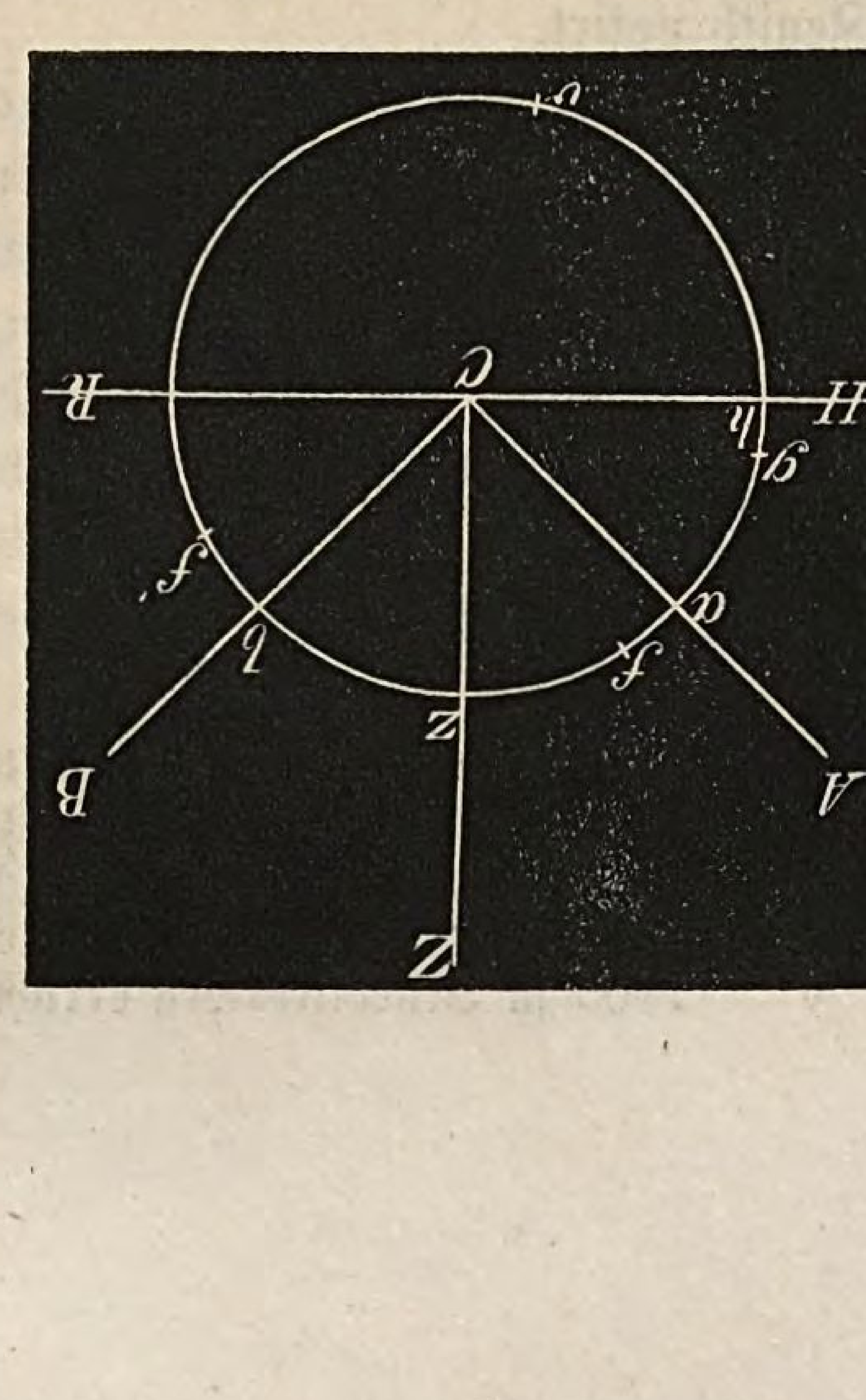
6. Den Vertikalfaden des Fadenkreuzes genau vertikal zu stellen.

Nach den vorhergehenden Berichtigungen visirt man den vertikalen Faden auf einen scharf begrenzten Punkt, z. B. auf den Kopf eines Nagels ein, und bewegt das Rohr auf und ab; verläßt der Faden den pointirten Gegenstand, so wird dieser Fehler durch die beiden an der Okularröhre befindlichen Schräubchen weggebracht. Die Einrichtung, der Okularröhre eine drehende Bewegung zu ertheilen, ist dieselbe wie bei dem Fernrohre an dem Instrumente von Schablaß, nur sind hier die Schräubchen an der Okularröhre und die Leiste an der Drehungsachse des Fernrohrs.

7. Untersuchung des Kollimationsfehlers an dem Höhenkreise.

Wenn bei einer bestimmten Richtung der Visirebene der Index auf dem Limbus Null Grade angeben soll, jedoch auf $\pm \alpha$ Grade zeigt, so nennt man diesen Winkel den Kollimationsfehler des Instrumentes.

Soll nun der Theodolit das wahre Maß eines Höhenwinkels angeben, so ist erforderlich, daß der Nullpunkt der Eintheilung auf dem Höhenkreise genau mit dem Nullpunkte eines Nonius übereinstimme, wenn die optische Achse horizontal ist; findet dies nicht statt, so ist der Bogen zwischen dem Nullpunkte des Kreises und des Nonius in Graden ausgedrückt der Kollimationsfehler, und dann wird der Höhenwinkel um diese Größe fehlerhaft bestimmt.



Nehmen wir an, Fig. 170 sei hzv der vertikale Kreis, C die Drehungsachse, CA die Visur nach dem Punkte A, Z das Zenith und HR eine horizontale Linie durch C, welche den Kreis in h schneidet; g der Nullpunkt des Nonius, f der Nullpunkt des Höhenkreises, und af mit hg nicht gleich, so ist af — hg = x ..... 1) der Kollimationsfehler des Instrumentes.

Um diesen zu finden, denken wir uns das Fernrohr auf einen erhöhten Punkt A eingestellt, so wird, da bei dieser Bewegung der Nonius unverändert geblieben, der Höhenkreis aber mit dem Fernrohre bewegt worden ist, auf dem Nonius eine Zahl, z. B. m Grade für den Höhenwinkel ACH abgelesen werden.

Ist nun ein zweiter Punkt B in derselben vertikalen Ebene mit ACZ, überdies seine Zenithdistanz ZCB = ZCA (wie wir einen solchen Punkt erhalten, wird später gezeigt werden), und hat man den Durchschnittspunkt der Okularfäden auch auf diesen eingestellt, so hat sich die optische Achse des Fernrohrs, somit auch der Höhenkreis, um den Bogen ab weiter bewegt; der Nullpunkt der Eintheilung ist nun nach f′ an den Nullpunkt des Nonius, bei g aber ist von dem Höhenkreise ein Punkt v gekommen, so daß ff′ = ab = gv ist; hat man nun für diesen Stand an dem Nonius n Grade abgelesen, so ist ACB = (n — m), und vermöge der Voraussetzung, daß ZCB = ZCA ist, ACB = 2 ZCA,

daher $ZCA = \frac{n - m}{2}$ ... 2), von dem Kollimationsfehler unabhängig.

Das Komplement von ZCA ist der zu bestimmende Höhenwinkel ACH, dieser ist daher $90 - \left(\frac{n - m}{2}\right)$ und da man für denselben bei dem ersten Ablesen m^0 gefunden hat, so ist der Kollimationsfehler

$$x = m - \left(90 - \frac{n - m}{2}\right) = \frac{m + n}{2} - 90; \text{ dah. auch } af - bg = \frac{m + n}{2} - 90 \ldots 3).$$

Wir haben jetzt noch zu zeigen, wie man zwei Punkte findet, deren Zenithdistanzen einander gleich sind; dies geschieht auf folgende Art: Man bringe den Durchschnitt auf einen entfernten Punkt A, z. B. auf die Spitze eines Thurmes, dreht hierauf die Alhidade um 180°, so kommt der Theil des Kreises zbv gegen A, das Fernrohr aber gegen B zu stehen, visirt man nun abermals den Punkt A an, so ist es dasselbe, als wenn man nicht die Alhidade, sondern den Punkt A mit derselben Zenithdistanz nach B gewendet hätte.

Bei dem Theodoliten mit einem gewöhnlichen Fernrohr wird bei dieser Rektifikation das Objektiv durch die Fernrohrträger, also das Okularglas über das Zenith votirt.

Ist der Kollimationsfehler gefunden, so kann man ihn durch die vertikalen Schräubchen, um welche die Nonien beweglich sind (solche nennt man fliegende Nonien), weg bringen, indem man das Fernrohr so stellt, daß der Nonius den gefundenen Kollimationsfehler anzeigt, den vertikalen Kreis klemmt, und sodann den einen Nonius auf Null, den andern auf 180 Grade bringt. Man kann aber den Kollimationsfehler belassen und ihn bei jedem Höhenwinkel in Rechnung bringen, indem man, wenn er nach der Gleichung 3) positiv ist, denselben abzieht, im entgegengesetzten Falle addirt *).

---

*) Da wir den Namen Reichenbach schon so oft genannt haben, und in der Folge noch nennen werden, so dürfte folgende kurze Notiz nicht am unrechten Orte sein.

Reichenbach, Georg, war zu Dunlach in Bayern den 24. August 1772 geboren, wurde 1794 Artillerielieutenant, später Direktor des von Utzschneider 1805 zu Benediktbaiern errichteten, 1819 aber nach München verlegten mechanisch-

Zusatz. Wir haben bei der Beschreibung des Theodoliten erwähnt, daß in dem Würfel ein gläsernes dreiseitiges Prisma und nicht etwa ein Spiegel ist, mittelst dessen ein auffallender Strahl so reflektirt wird, daß beide einen rechten Winkel bilden. Die Einrichtung eines solchen Prisma, das auch bei einigen andern Instrumenten vorkommt, findet man §. 158 angegeben.

Gebrauch des Theodoliten.

§. 155. Bevor der Theodolit auf das Stativ gestellt wird, muß gesorgt werden, daß das letztere eine feste Stellung und die Stativscheibe eine nahe horizontale Lage erhalte, indem sonst, wenn das Stativ bedeutend schief gestellt wäre, die Fußschrauben des Gestelles nicht ausreichen.

Bei weichem Boden also werden in diesen drei starke Pflöcke eingetrieben, und auf diese das Stativ gestellt, ist der Boden zwar fest, aber zu viel geneigt, so muß an der obern Stelle abgegraben werden, die dadurch gewonnene Erde aber darf nicht zur Anschüttung des tiefer gelegenen Theiles, wohin ein Fuß des Stativs zu stehen kommt, verwendet werden.

Vorausgesetzt, daß der Boden gehörig vorbereitet ist, wird nun das Stativ so gestellt, daß die Mitte der Scheibe ober den Scheitel des zu messenden Winkels kommt, jene vermöge der Einrichtung des Stativs nahe horizontal gemacht, und auf derselben der Punkt bestimmt, welcher mit dem Scheitel des Winkels in einer Vertikalen liegt.

Nun wird der Theodolit auf das Stativ so aufgesetzt, daß die Drehungsachse der Alhidade genau über den letzt bestimmten Punkt kommt, unter die Fußschrauben die Untersätze gelegt und in das Holz eingedrückt, das Fernrohr mit den beiden Kreisen (dieser Theil ist außer dem Gebrauche für sich aufgehoben) auf die Träger gelegt, die Deckel oberhalb den Achsenlagern wieder eingeschraubt und die Klemmung an den vertikalen Kreis E eingelegt, endlich wird das In-

---

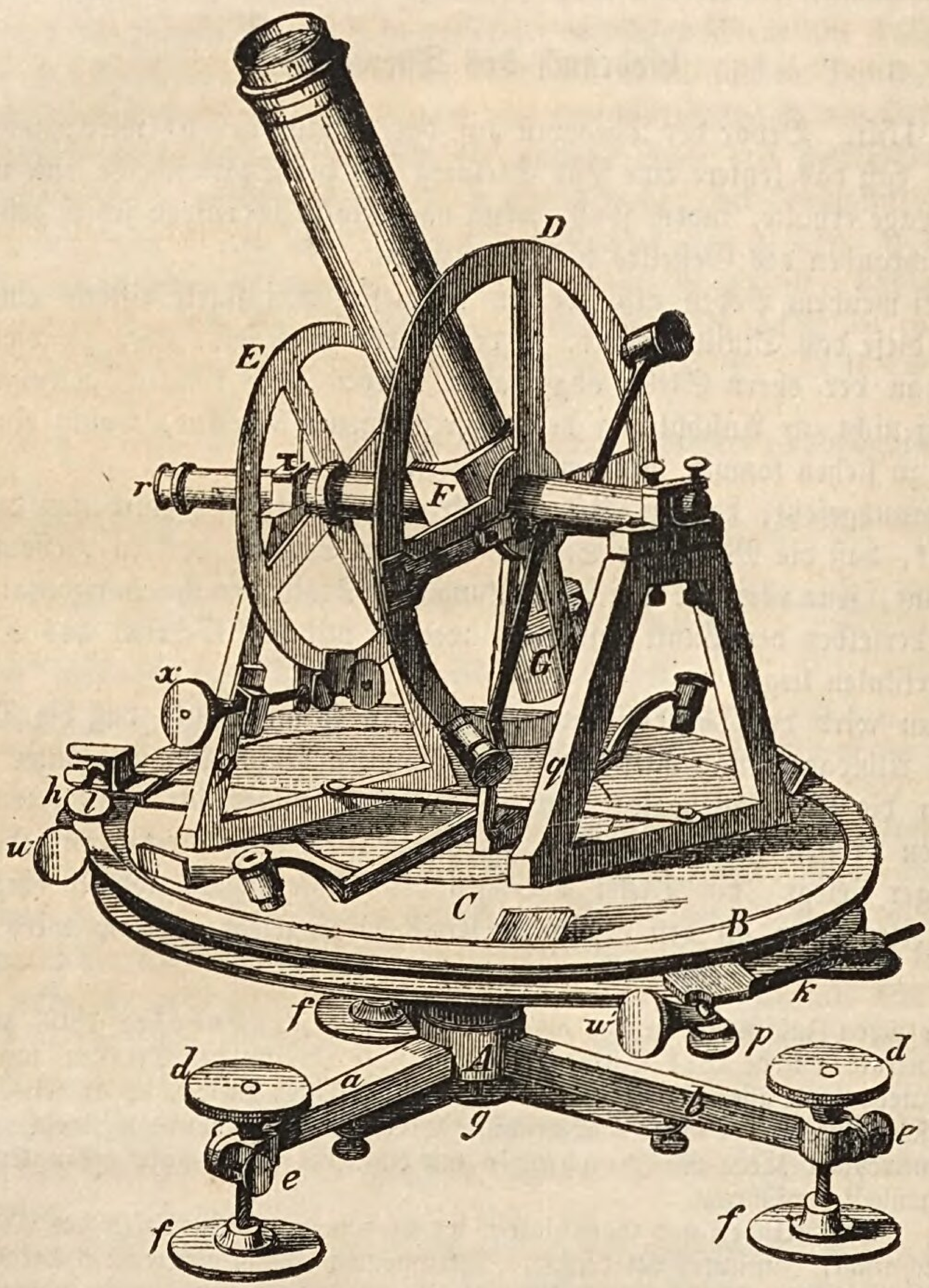
optischen Institutes, in das auch der berühmte Fraunhofer 1806 als Optiker eintrat; wurde 1811 Salinenrath und 1820 Direktor des Straßen- und Brückenbaues, hatte aber nebstdem seine eigene Werkstätte, in der, da er selbst ein praktischer Mechaniker war, sehr geschickte Arbeiter gebildet wurden, welche die äußerst sinnreichen Ideen Reichenbach's mit einer bis dahin nicht gekannten Vollkommenheit ausführten.

Die Reinheit und Genauigkeit, welche den in der Werkstätte des Wiener polytechnischen Institutes verfertigten Instrumenten eine so verdiente Anerkennung verschafft, ist zum Theil noch ein Erbtheil Reichenbach's, indem in dieser Werkstätte die ersten Instrumente (1819) durch seine Arbeiter und unter der Leitung seines Werkmeisters ausgeführt wurden, er selbst im Juni 1820 nach Wien kam, um in diesem Institute die berühmte Maschine zum Eintheilen der Kreise anzufertigen und aufzustellen, auch gegenwärtig der noch äußerst geschickte Werkmeister dieses Institutes, Herr Starke, ein Zögling aus seiner Werkstätte ist.

Reichenbach's Instrumente, Meridiankreise, Passagen-Instrumente, Aequatoriale, Heliometer, Multiplikationskreise, Nivellir-Instrumente, so auch seine übrigen Maschinen, z. B. die seinen Namen führende Wassersäulmaschine, jene zum Kanonenbohren in Wien ꝛc. ꝛc. sind bleibende Zeugnisse seines ausgezeichneten Genies. Er starb zu München den 21. Mai 1826.

Eben daselbst starb den 7. Juni desselben Jahres der Optiker Fraunhofer; durch den Tod dieser Männer haben mehrere Wissenschaften einen unersetzlichen Verlust erlitten.

strument, das als rektifizirt vorausgesetzt wird, nach dem im vorigen Paragraphe sub 3 Gesagten horizontal gestellt, die Klemmschrauben e fest angezogen.



Zu der ganzen Vorbereitung gehört noch, daß der Nullpunkt des einen, gewöhnlich des an der Klemmschraube w nächst gelegenen Nonius mit dem Nullpunkte des Limbus genau übereinstimmt, was leicht durch die Mikrometer-Schraube w erreicht wird. Diese Einstellung beider mit Null bezeichneter Striche ist zwar nicht unumgänglich nothwendig, befördert aber die Arbeit während der Messung.

Bei der Messung wird zuerst die Klemmschraube k gelöst, das Fernrohr in die Richtung des links liegenden Signals bewegt, wobei, weil die Alhidade an dem Limbus angeklemmt ist, beide bewegt werden, und wenn einmal das pointirte Signal im Gesichtsfelde erscheint, die Schraube k angezogen, die scharfe

Einstellung der optischen Achse auf die Mitte des Signals wird durch die kombinirte Anwendung der Schrauben w' und x erreicht.

Ist das Signal scharf anvisirt, so wird die Klemmschraube h gelöst, das Fernrohr sammt der Alhidade, also ohne den Limbus, nach dem rechts liegenden Signale gewendet, und sobald dies in der Nähe der optischen Achse erscheint, die Alhidade mittelst h festgestellt, die scharfe Visur aber durch w und x hergestellt. Der Stand des an der Klemmschraube w nächst gelegenen Nonius gibt nun den einfachen Winkel, wenn die Alhidade keine excentrische Bewegung hat; zur Beseitigung dieses Fehlers müssen aber die Sekunden bei allen vier Nonien abgelesen werden, und das Mittel aus diesen vier Angaben zu den Graden und Minuten der ersten Ablesung addirt, gibt das Maß des Winkels.

Auf diese Art wird jeder einzelne Winkel bis auf 10 Sekunden abgelesen, was schon eine bedeutende Schärfe ist; allein mit diesem Instrumente können die Winkel noch viel genauer und zwar durch die scharfsinnige Einrichtung, daß die Alhidade ohne den Limbus, sodann beide vereint beweglich sind, gemessen werden.

Wird nämlich nach dem ersten Ablesen der Stand der Alhidade rücksichtlich des Limbus unverändert beibehalten, dagegen die Schraube k geöffnet, der Limbus, die Alhidade und das Fernrohr nach dem links liegenden Signale gewendet, letzteres wieder, nachdem k geklemmt ist, wie das erste Mal mit Hilfe w' und x scharf pointirt, sodann die Klemmschraube h geöffnet, das Fernrohr ohne den Limbus in die Richtung des zweiten Signals gebracht, und mittelst w und x scharf anvisirt, so ist begreiflich die Alhidade auf dem Limbus um den doppelten Winkel bewegt worden.

Löst man den Stand der Nonien wieder ab, und dividirt das Resultat durch 2, so wird dadurch der einfache Winkel, da der doppelte bis auf 10 Sekunden genau abgelesen worden ist, schon bis auf 5 Sekunden bestimmt sein.

Auf diese Art ist es also möglich, durch eine öftere Wiederholung der beschriebenen Operation bei einer aufmerksamen Behandlung des Instrumentes die Winkel mit einer beliebigen Schärfe zu bestimmen.

Um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, geben wir die Resultate, wie wir sie bei der Messung erhalten haben:

Beim 1.	Ablesen	gefund.	= 48°31'20"	dah. d.	einf. Winkel	= 48°31'20"
„ 2.	„	„	= 97° 2'45"	„	„	= 48°31'22"·5
„ 3.	„	„	= 145°34'10"	„	„	= 48°31'23"·3
„ 4.	„	„	= 194° 5'30"	„	„	= 48°31'22"·5
„ 5.	„	„	= 242°37' 0"	„	„	= 48°31'24"·0
„ 6.	„	„	= 291° 8'40"	„	„	= 48°31'26"·6
„ 7.	„	„	= 339°39'45"	„	„	= 48°31'23"·6
„ 8.	„	„	= 388°11'10"	„	„	= 48°31'23"·8
„ 9.	„	„	= 436°42'30"	„	„	= 48°31'23".3
„ 10.	„	„	= 485°13'50"	„	„	= 48°31'23"·0

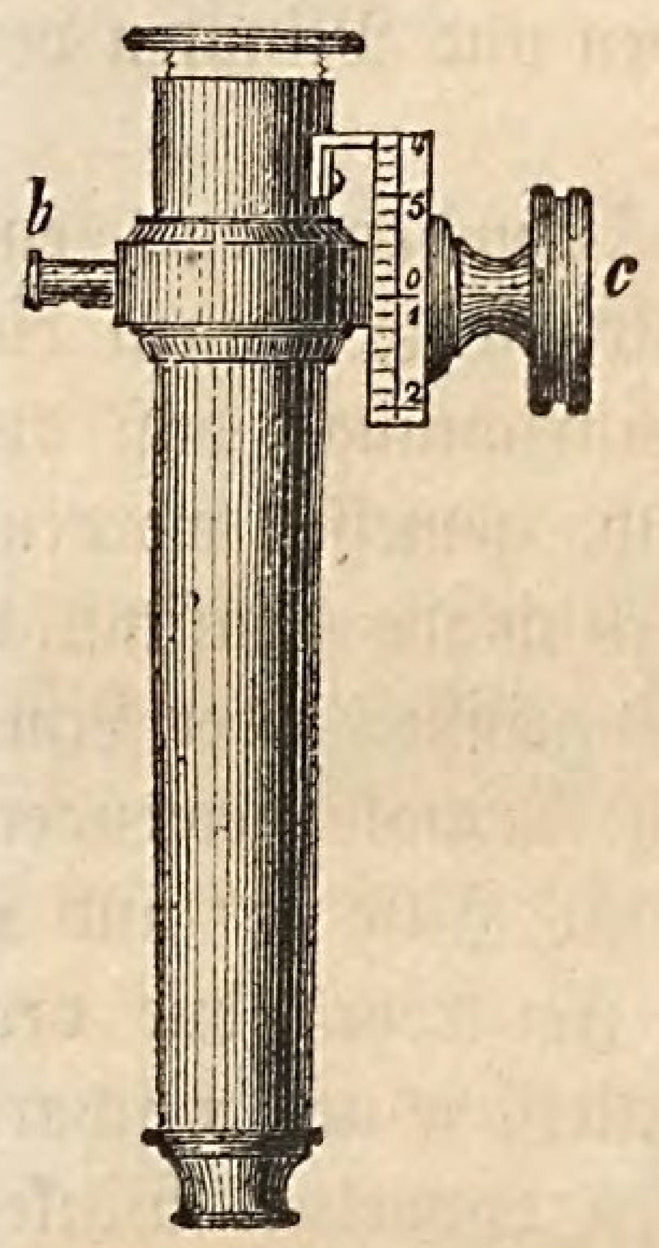
Läßt man die fünfte und sechste Beobachtung, bei der entweder im Anvisiren oder Ablesen ein kleiner Fehler begangen worden ist, und die erste weg, so ist das arithmetische Mittel aus den übrigen der wahre Winkel und = 48°31'23"·14; mit diesem stimmen die letzten vier Angaben bis auf die Sekunde überein, und in

diesem Falle sagt man: ist der Winkel bis auf die stehende Sekunde scharf bestimmt.

Im §. 12, 2. Theil steht das Nähere über die Messung der Winkel.

Zusatz. Hätte man vor dem Beginne der Messung nicht beide Nullpunkte eingestellt, so hätte der ursprüngliche Stand des Nonius von jeder folgenden Ablesung abgezogen werden müssen.

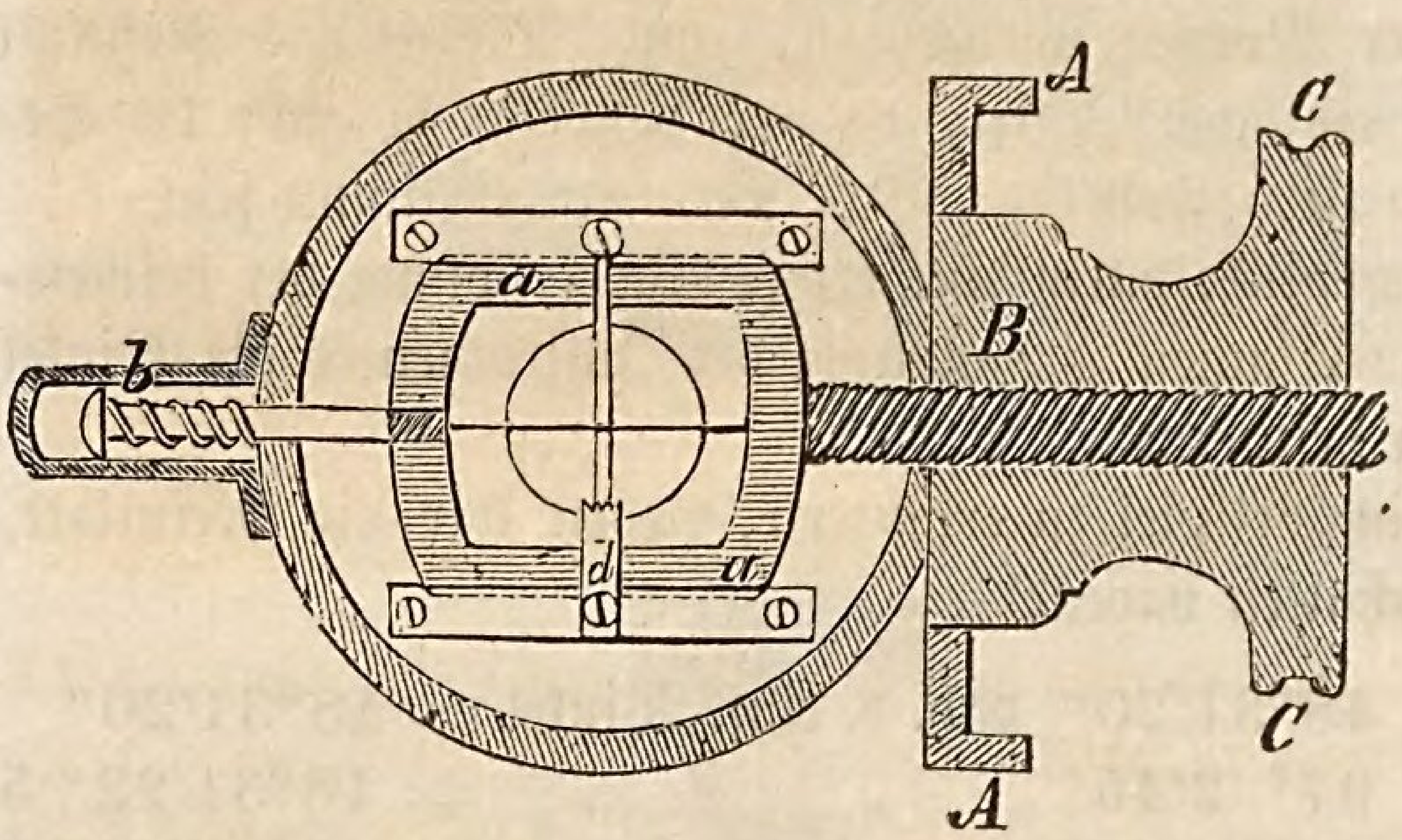
Sind aus einem Standpunkte mehrere Winkel zu messen, so läßt man den Stand der Alhidade, wie er bei der Messung des vorhergehenden Winkels erhalten wurde, unverändert und subtrahirt diese letzte Angabe von jeder folgenden Ablesung.



Anmerkung. Das Verfahren, die Vielfachen der Winkel zu messen, ist von dem Astronom Tobias Mayer (zu unterscheiden von seinem Sohne Tobias, Verfasser des Werkes über praktische Geometrie) erfunden; nach ihm machte der Ritter von Borda in Frankreich bei den seinen Namen führenden Kreisen dieses Verfahren in der Art bekannt, wie es bei dem Theodoliten angewendet ist; man nennt also diese scharfsinnige Erfindung die Mayer-Borda'sche Multiplikationsmethode.

§. 156. Der rühmlichst bekannte Werkmeister Starke hat in neuerer Zeit eine Vorrichtung ersonnen, welche bei jedem größeren Winkelmesser angebracht werden kann, und die den Stand der Alhidade bis auf eine Sekunde mit der größten Schärfe angibt.

Diese interessante Einrichtung ist folgende: die Alhidade trägt ein Mikroskop Fig. 171, in dessen Bildfläche ein Schraubenmikrometer angebracht ist; die innere Einrichtung des Mikrometers ist in der Fig. 172 dargestellt.



In der Mitte des Rahmens a sind senkrecht auf die Achse der Schraube zwei parallele Spinnfäden gespannt, ihr Abstand ist etwas größer als die Breite eines Theilstriches am Limbus, so daß, wenn ein solcher Strich zwischen die parallelen Fäden gebracht ist, zu beiden Seiten noch ein merklicher Zwischenraum, fast so breit als der Strich selbst, bleibt.

Senkrecht auf jene Parallelfäden ist in der Mitte des Gesichtsfeldes noch ein Faden gespannt, in dessen Nähe man die Einstellung vornimmt; der Rahmen ist einerseits mit der Mikrometerschraube, andrerseits mit einem Stifte b fest verbunden; die um denselben gewundene Feder drückt die Mutter der Mikrometerschraube an das Gehäuse des Mikroskops, wodurch jeder todte Gang vermieden ist.

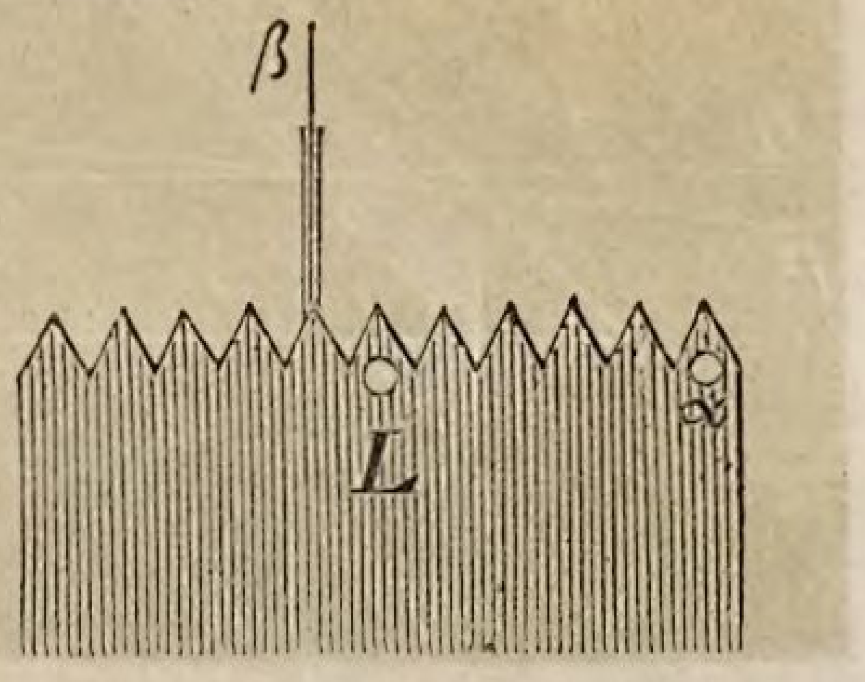
Auf der runden Schraubmutter B ist die in 60 Intervalle eingetheilte Trommel A aber nur durch die Reibung fest; wird die Mutter mittelst des Kopfes c gedreht, so geht die Trommel mit, diese dagegen kann auch ohne die

Mutter gedreht werden; der Index zu dieser Eintheilung ist am Mikroskope befestigt.

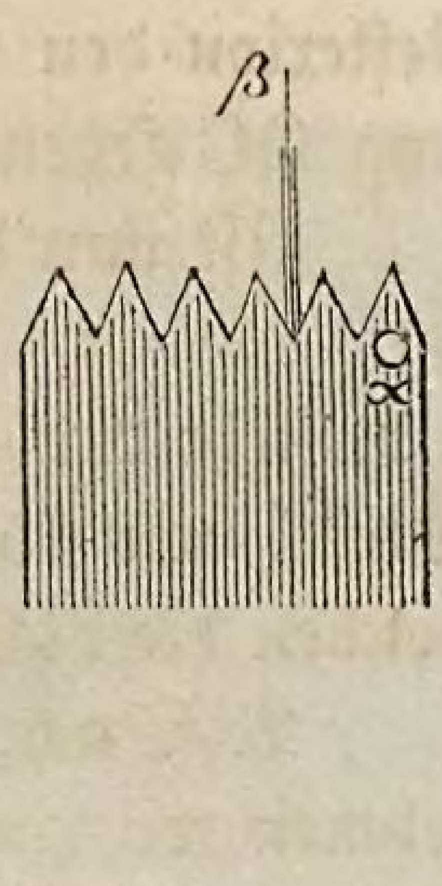
An der einen Leiste, zwischen welchen der Rahmen verschiebbar ist, also oberhalb aber nahe an demselben ist eine Lamelle d angeschraubt, diese vertritt gleichsam die Stelle eines Nonius, der bei dieser Vorrichtung ganz entbehrlich ist; an der Lamelle sind so viele Einschnitte (siehe die folgende Figur) als Minuten einem Intervalle am Limbus entsprechen, die Entfernung von einer Spitze zu der anderen ist nämlich so groß als eine Minute am Limbus, und dienen dazu, die einzelnen Minuten abzulesen; der Nullpunkt ist durch ein äußerst kleines Löchelchen α angegeben.

Die Vergrößerung des Mikroskops muß so eingestellt sein, daß ein Schraubengang, also eine Umdrehung der Trommel, genau einer Minute am Limbus entspricht, weshalb schon die Mikrometerschraube so geschnitten sein muß, daß sie nahe diesen Werth gibt, damit eine kleine Erhöhung oder Erniedrigung des Objektivs, somit eine kleine Aenderung in der Vergrößerung des Bildes die erwähnte Bedingung genau erfüllt; und da der Umfang der Trommel in 60 Intervalle getheilt ist, so entsprechen diese den einzelnen Sekunden; durch Schätzung eines aliquoten Theiles bekommt man noch die Zehntel einer Sekunde.

Werden die Parallelfäden durch die Mikrometerschraube so gestellt, daß das Löchelchen genau in ihrer Mitte zu liegen scheint, so muß der Index bei der Trommel auf Null zeigen, zu diesem Zwecke ist eben ihre unabhängige Bewegung an der Schraubmutter; endlich muß das Mikroskop durch Schrauben so gestellt werden können, daß das Löchelchen genau über den Index der Alhidade zu stehen kommt, diese beiden also den Abstand der Parallelfäden gleichzeitig genau halbiren.



Das Ablesen wollen wir durch die Fig. 173 versinnlichen; diese ist für einen Limbus konstruirt, dessen kleinste Eintheilung 10 Minuten entspricht, die Lamelle L hat daher zehn Einschnitte, somit eilf Spitzen, unter dem Löchelchen α ist der Index der Alhidade, β der nächste Strich des Limbus. Sobald die Alhidade geklemmt ist, werden die Parallelfäden so weit geschoben, bis β ihren Abstand scharf halbirt; ist dies geschehen, so zählt man die Minuten an den Spitzen und die Sekunden an dem Umfange der Trommel. Steht z. B. der Index an der Trommel auf 5·5, so ist nach der Zeichnung die Ablesung durch das Mikroskop 7′ 5″ 5; und diese zu der Angabe des Index der Alhidade zu addiren.



Die Fig. 174 ist für die Eintheilung des Limbus von 5 zu 5 Minuten konstruirt, zeigt bei dieser Einstellung die Trommel 42′4, so ist die Ablesung des Mikroskops 1′42″4; der Index der Alhidade gibt dann noch die ganzen Grade und die übrigen Minuten an.

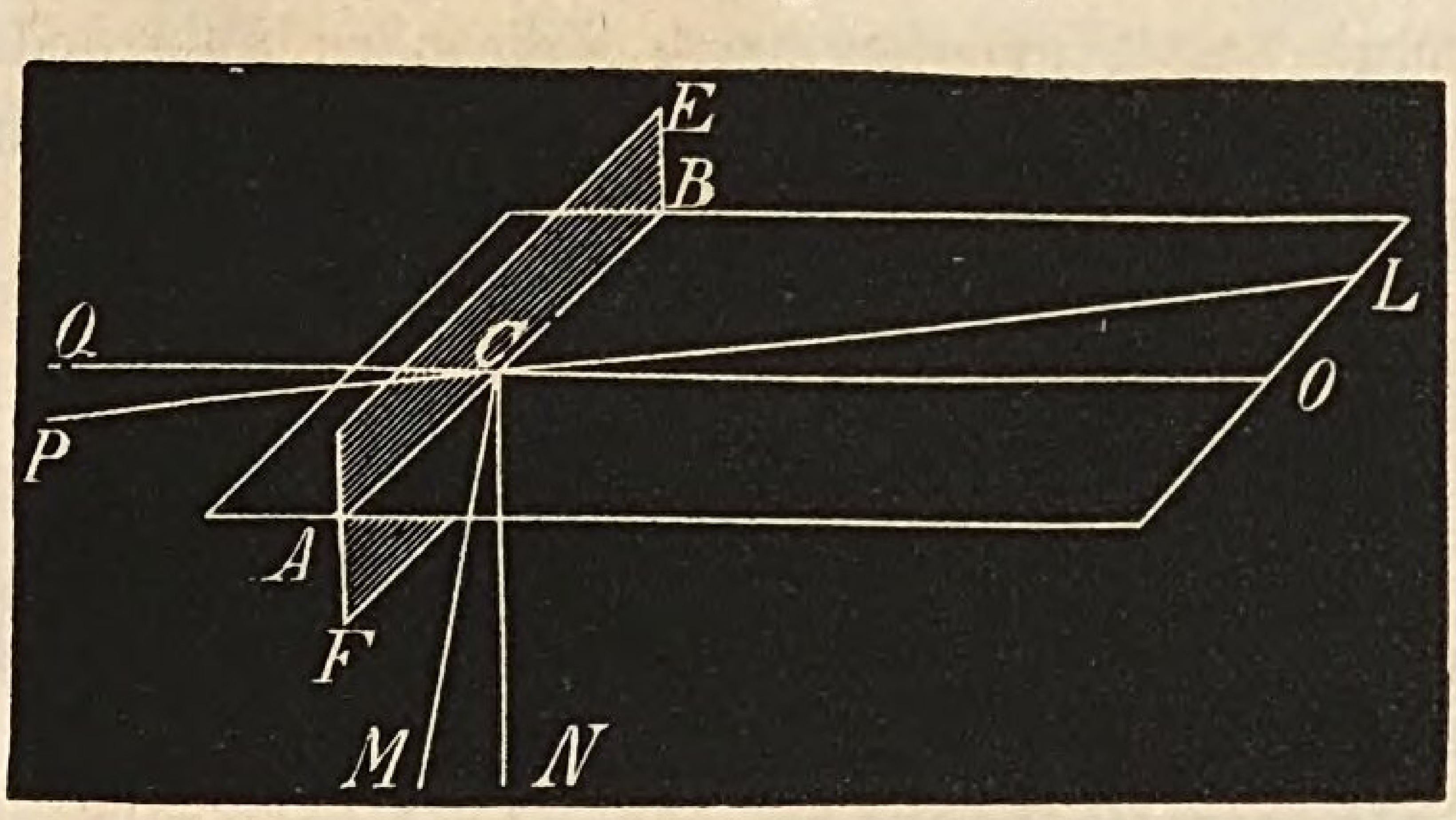
Vierter Abschnitt.

Theorie der Winkelmesser mit Spiegeln.

§. 157. Die Winkelmesser, bei denen ein oder zwei ebene Glasspiegel wesentliche Bestandtheile sind, nennt man im Allgemeinen Spiegelinstrumente. Die Bestandtheile derselben, die Spiegel ausgenommen, so auch die Bedingungen, denen jene genügen sollen, sind bereits im 2. Abschnitte besprochen worden, hier ist also nur noch das nachzutragen, was die Spiegel betrifft.

Die Gesetze der Reflexion und einfachen Brechung der Strahlen als bekannt vorausgesetzt, sind die theoretischen Sätze, welche bei den folgenden Spiegelinstrumenten in Anwendung kommen, nachstehende:

1. Satz. In der Fig. 175 stellt EF eine vertikale Glasebene, von welcher der untere Theil ABF mit Analogen belegt, also ein Spiegel, der obere Theil AEB aber durchsichtig ist; ABO ist eine durch AB gelegte horizontale Ebene, in O das Auge.



Der von O kommende in der Ebene ABO liegende Strahlencylinder OC wird zur Hälfte durch den durchsichtigen Theil in gerader Linie CQ fortgehen; die andere Hälfte aber trifft den Spiegel unter dem Winkel OCB und wird, wenn dieser kein rechter ist, nach der Richtung CN reflektirt, CN bleibt mit CO in der horizontalen Ebene, überdies ist OCB = ACN.

Also umgekehrt, wird das Auge O direkt den Strahl von Q und durch Reflexion den Strahl von N erhalten, somit beide Objekte zugleich in der Richtung OC sehen, oder wie man sagt, in der Deckung erblicken.

Ist nun der Winkel $BCO = 45^0$, so ist es auch ACN, daher

$$NCO = NCQ = 90^0 \ldots\ldots 1),$$

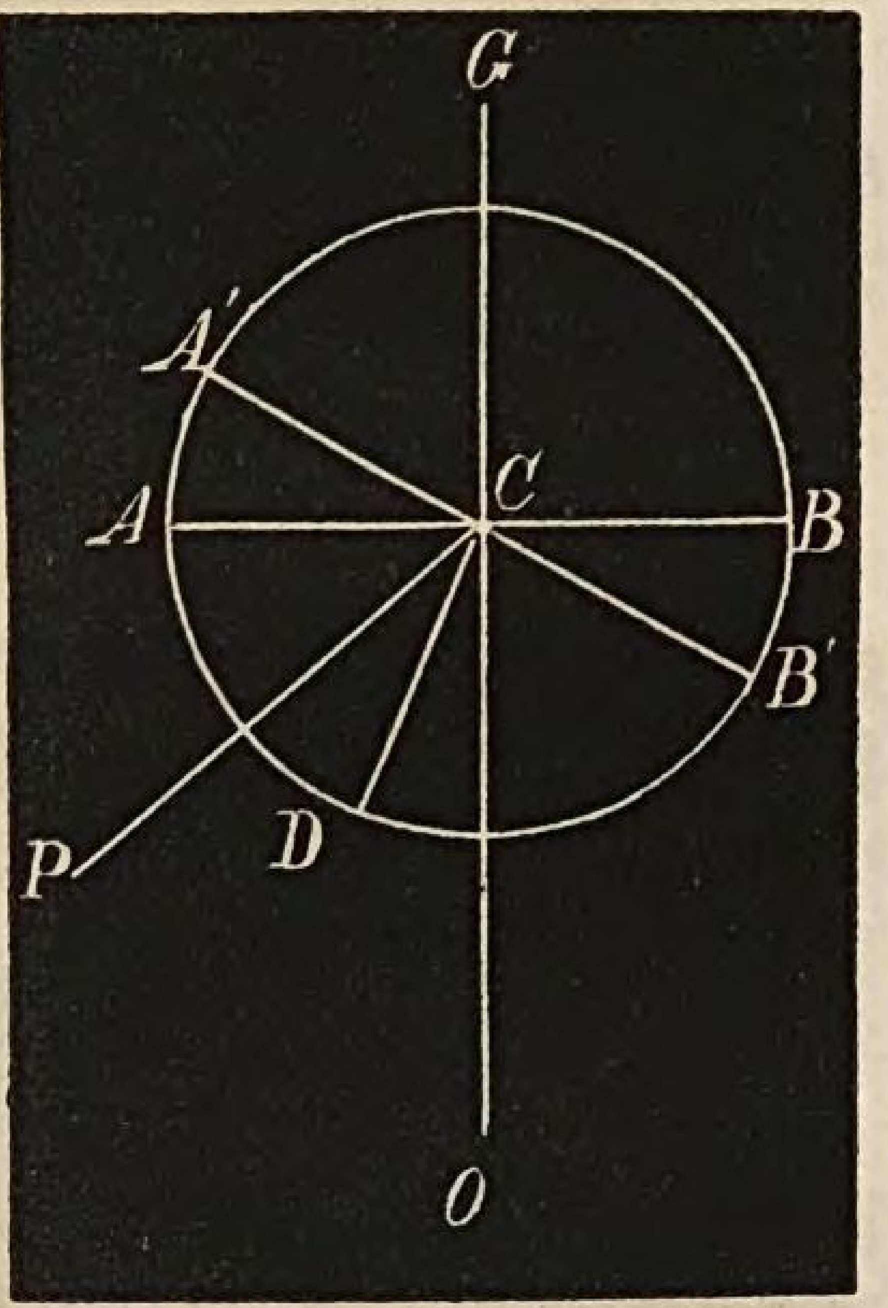
d. h. steht der Spiegel vertikal und gegen die Visur auf das Signal Q unter einem Winkel von 45 Graden, so sieht das Auge jene zwei Objekte in der Deckung, von welchen die Lichtstrahlen im Mittelpunkte des Spiegels einen rechten Winkel bilden.

2. Satz. Behalten wir die vorige Lage der Linien und Ebenen bei, und nehmen wir an, das Auge bewege sich in der horizontalen Ebene von O nach L, um den Winkel OCL = x, so wird es in der Richtung LC direkt ein anderes

Objekt, z. B. P, sehen, es wird auch der Winkel PCQ = LCO = x sein, aber durch die Reflexion werden von einem andern Objekte z. B. von M in das Auge Strahlen gelangen, wenn MCA = BCL ist. Da nun LCB und x kleiner als OCB ist, so wird auch MCA um x abgenommen haben, daher PCM = QCN — 2x, oder wenn wir PCM = α setzen $\alpha = 90 - 2x$ . . . . . 1).

Hat also das Auge sich nach der rechten Seite um den Winkel x bewegt, so bilden die Strahlen von dem in der Deckung gesehenen Objekte in C einen Winkel, welcher um 2x kleiner ist als der vorige.

3. Satz. Es sei Fig. 176 AB der Durchschnitt eines zur Hälfte belegten vertikal stehenden Spiegels, CO das Einfallsloth und in O das Auge, so wird dieses im Punkte C nur durch den unbelegten Theil des Spiegels einen Gegenstand G sehen, welcher mit CO in einer geraden Linie liegt; wird aber der Spiegel in die Lage A'B' gedreht, so wird das Auge in O außer G noch ein Objekt P erblicken, sobald GCPO in einer Ebene liegen, und A'CP = B'CO ist.



Setzen wir den Winkel, um welchen der Spiegel gedreht worden ist, also BCB' = α, sodann PCO = a, so ist B'CO = A'CP = 90 — α, demnach

$$a = 2\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; 1)$$

und der Nebenwinkel PCG, den die Strahlen von den Objekten G und P in der Mitte des Spiegels bilden, gleich $180 - 2\alpha$ . . . . . 2).

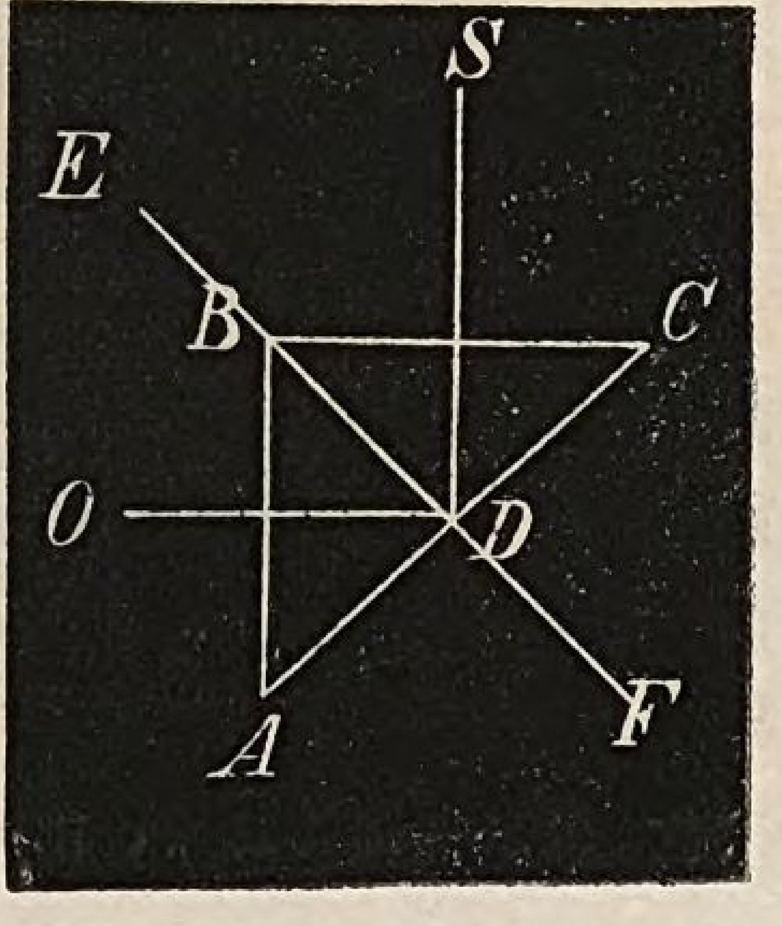
Ist CD das Einfallsloth auf dem Spiegel A'B', so ist OCD = PCD = α . . . . . 3).

Steht also der Spiegel AB auf eine Visur CO senkrecht, und macht ein Objekt P mit dieser einen Winkel PCO = 2α, so braucht der Spiegel zufolge Gleichung 3) nur um die Hälfte dieses Winkels bewegt zu werden, um durch Reflexion das Signal P zu sehen, auch wird das Einfallsloth um den Winkel α bewegt.

4. Satz. Ist A'B', Fig. 176 (siehe obere Zeichnung), die Lage des halb belegten Spiegels, damit das Objekt P durch Reflexion im Auge O erscheint, und setzen wir den Winkel, welchen die Visirebene OG mit dem Spiegel A'B' bildet, also OCB' = α, ferner PCG = a, so ist B'CO = GCA' und B'CO = A'CP, daher 2B'CO = GCA' + A'CP, oder $a = 2\alpha$ . . . . . 1),

d. h. der Winkel zwischen den beiden Objekten im Spiegel ist noch einmal so groß, als der Winkel zwischen dem Spiegel und der Visirebene.

§. 158. Es sei ABC, Fig. 177, der Durchschnitt eines dreiseitigen gleichschenkeligen bei B rechtwinkeligen Prisma aus gewöhnlichem Glase, SD ein Strahl, der auf die Ebene BC senkrecht auffällt, somit ungebrochen in das Glas eintritt, EF das Einfallsloth auf die Ebene AC, daher der Einfallswinkel SDE = 45°.



Wird der Einfalls- und Brechungswinkel allgemein mit α und β bezeichnet, so ist $\frac{\sin.\ \alpha}{\sin.\ \beta} = n$ ein konstanter

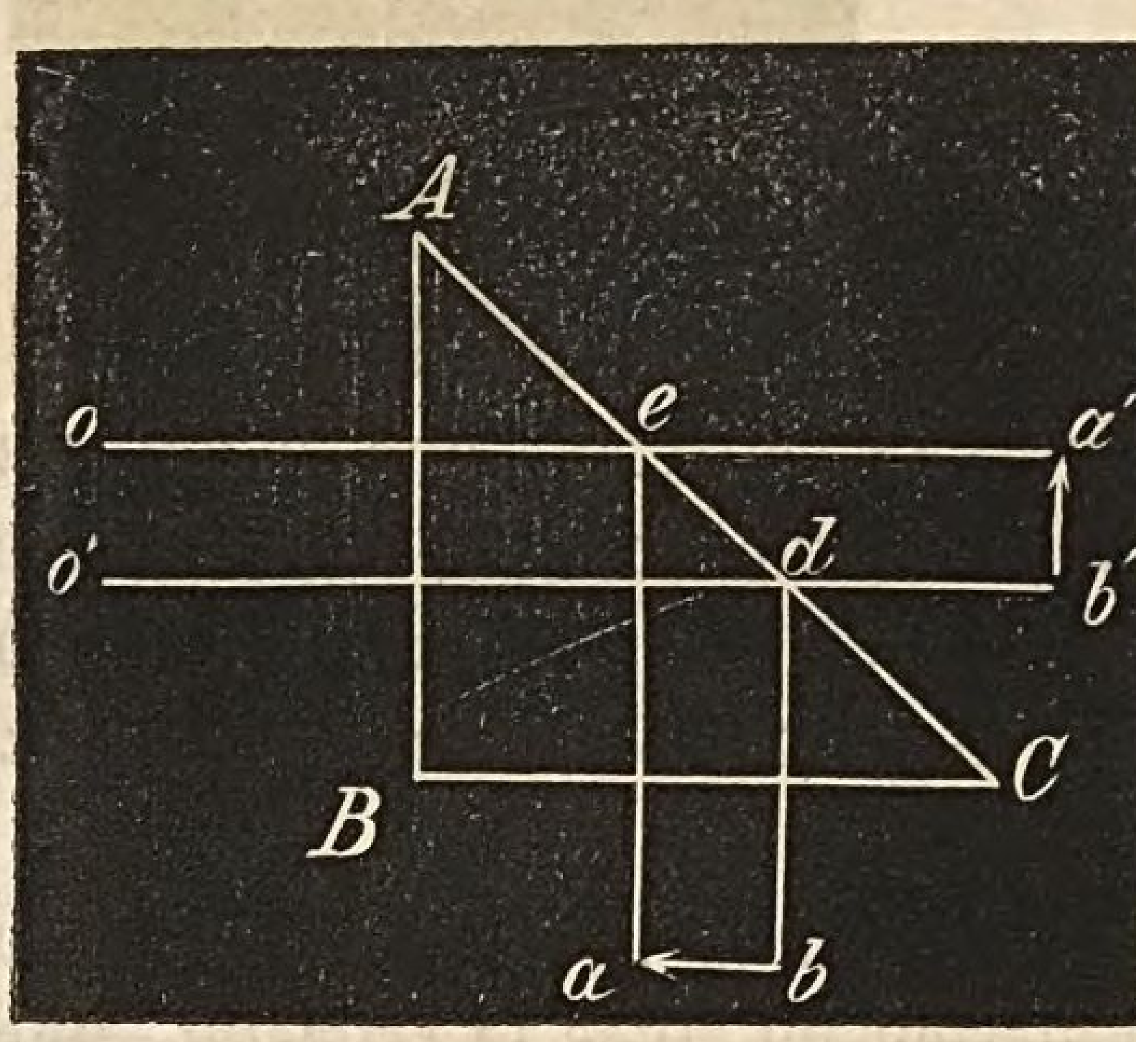
Quotient und für Strahlen, die aus gewöhnlichem Glase in die Luft austreten, $\frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta} = \frac{2}{3}$, somit $\sin. \beta = \frac{3}{2} \sin. \alpha \ldots\ldots 1)$.

Da nun in diesem Falle $\alpha = 45^0$, $\sin. \alpha = 0{\cdot}707 \ldots$ ist, wodurch $\sin. \beta = 1{\cdot}06 \ldots$, also größer als die Einheit ausfällt, so erleidet der Strahl SD die totale Reflexion.

Ist DO die Richtung des reflektirten Strahles, so ist SDE = EDO = 45^0 SDO = 90^0 und da der Strahl DO beim Austritte aus dem Glase die Kathetenfläche AB senkrecht trifft, somit seine Richtung beibehält, so folgt, daß ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Prisma, wenn auf eine Kathete desselben die Strahlen senkrecht auffallen, dieselben unter einem rechten Winkel gegen ihre ursprüngliche Richtung reflektirt.

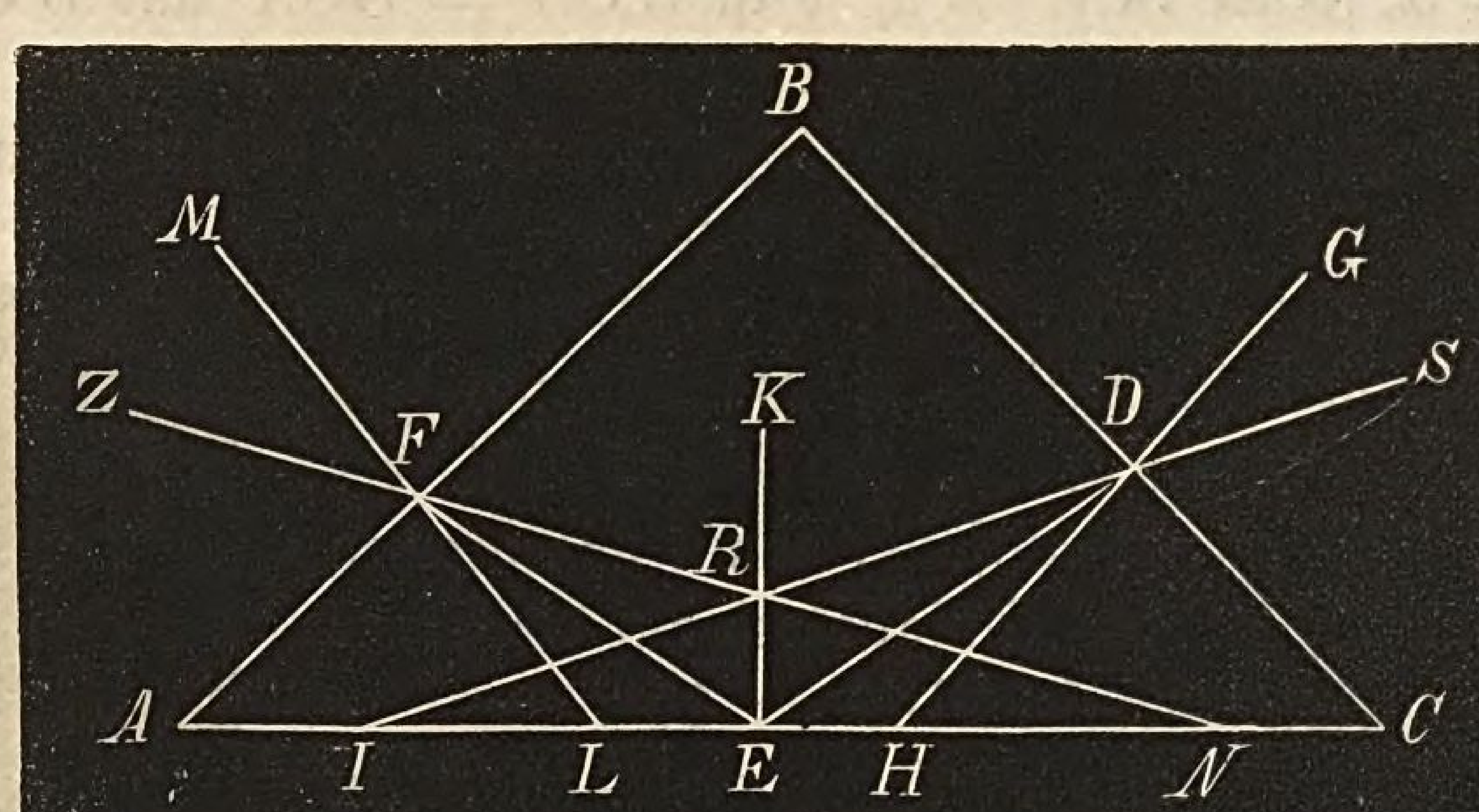
Der Bedingung zu Folge fallen die Strahlen auf die Ebene BC senkrecht auf, bei D erfolgt eine totale Reflexion, die zurückgeworfenen Strahlen kommen wieder lothrecht auf die Ebene AB; durch das Eintreffen dieser günstigen Umstände wird somit bei einem solchen Prisma im Vergleich mit einem gewöhnlichen Planspiegel äußerst wenig Licht zerstreut und nur einiges im Innern des Glases absorbirt; bei solchen Prismen erscheint somit das Bild viel heller als wenn man einen Spiegel angewendet hätte.

Ist ab, Fig. 178, ein Objekt, von dem auf ein solches Prisma Strahlen auffallen, und ist eo, do' ihre Richtung nach der Reflexion, so wird das Auge vor der Kathetenfläche AB, die Punkte a, b in der Richtung oe, o'd und zwar eben so weit hinter der Hypothenusenfläche sehen als sie vor derselben liegen. Das Bild a'b' erscheint also mit seinem Objekte gleich groß aber vertikal, wenn jenes horizontal war.



§. **159.** Untersuchen wir nun ob die Winkel an der Hypothenusenfläche streng genommen einander gleich sein müssen.

Nehmen wir an Fig. 179 sei der Querschnitt eines beliebigen aber bei B rechtwinkeligen Prisma, a und b die Winkel



der Kanten bei A und C, SD der auf die Ebene BC schief auffallende Strahl,

GDH das Einfallsloth, der Einfallswinkel SDG $= \alpha$, der Brechungswinkel EDH $= \beta$, der Brechungsexponent n, so ist $\sin. \alpha = n \sin. = \beta$ .... 1).

Setzen wir den Winkel DHC $= \varphi$, DEC $= \delta$, so ist $\varphi = 90 - b$, $\delta = 90 - (b + \beta)$; ist EK das Einfallsloth auf die Ebene AC, der Einfallswinkel bei der Reflexion an der Ebene AC nämlich DEK $= \gamma$, so ist $\gamma = b + \beta$; und wenn EF die Richtung des reflektirten Strahles, MFL das Einfallsloth an der Ebene AB, der Einfallswinkel EFL $= \alpha'$, der Brechungswinkel ZFM $= \beta'$ ist, so bekommen wir, weil nun der Strahl aus dem Glase in die Luft tritt, $n \sin. \alpha' = \sin. \beta'$ .... 2).

Wird der Winkel FLA $= \varphi'$ gesetzt, so ist $\varphi' = 90 - a$, und $\alpha' = \varphi' - \delta$, wird in diese Gleichung für φ' und δ der oben gefundenen Werthe substituirt, so ist $\alpha' = b - a + \beta$, daher wegen 2) $n \sin. (b - a + \beta) = \sin. \beta'$ oder $n \sin. (b - a) \cos. \beta + n \cos. (b - a) \sin. \beta = \sin. \beta'$; aus 1) folgt

$$\cos. \beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}}{n}, \text{ daher ist}$$

$$\sin. (b - a) \sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha} + \cos. (b - a) \sin. \alpha = \sin. \beta' \; .... \; 3).$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß so lange b und a verschieden sind, der Winkel β' auch von n abhängt, daher die Erscheinung der Farbenzerstreuung zum Vorschein kommt. Lassen wir aber $a = b$ sein, so reduzirt sich die Gleichung 3) auf $\sin. \alpha = \sin. \beta'$ und da beide Winkel nur von Null bis 90^0 gezählt werden, so ist $\alpha = \beta'$ .... 4), in diesem speziellen Falle tritt also keine Farbenzerstreuung auf.

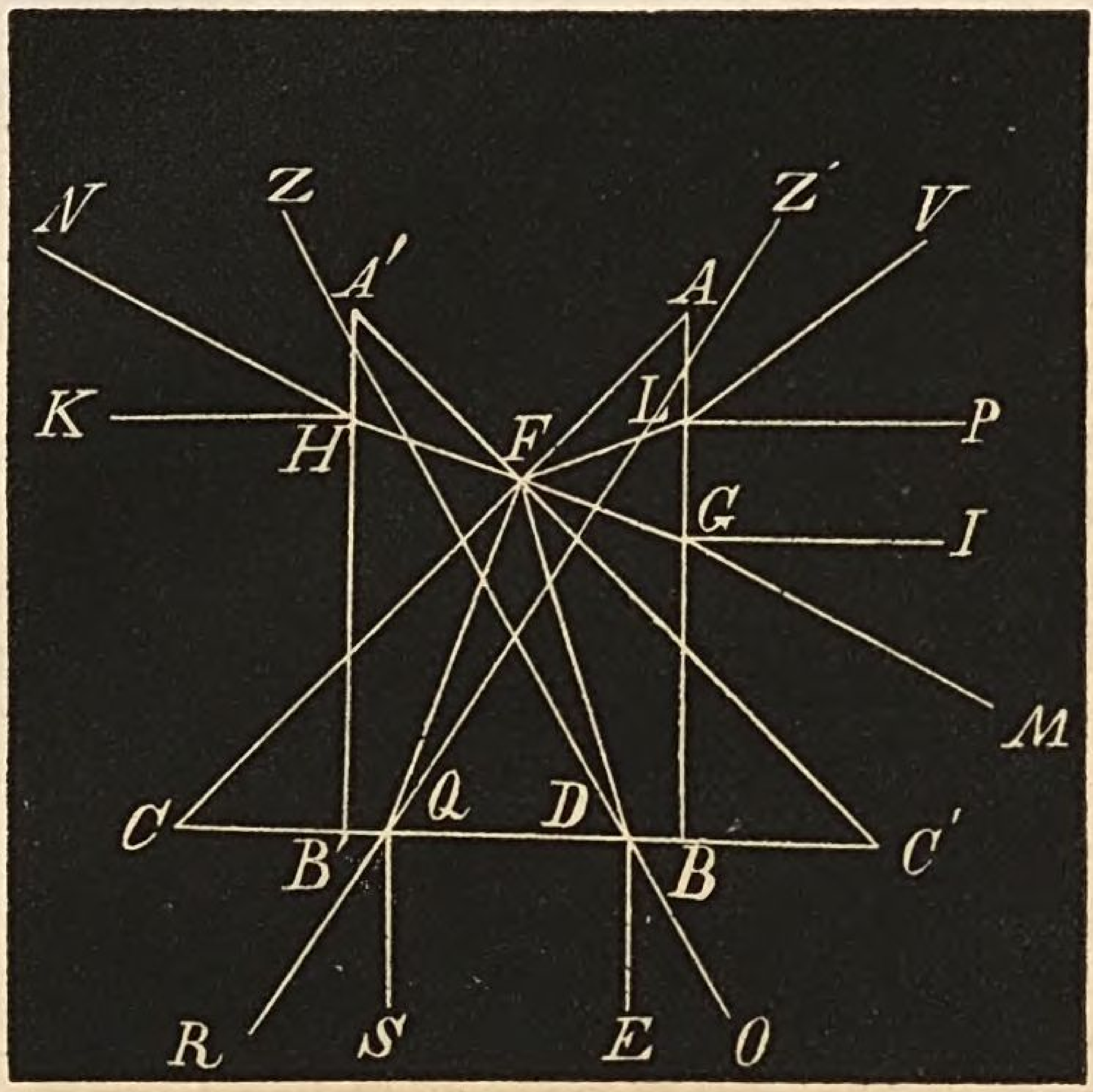
Ist endlich SI die Richtung des auffallenden Strahles, SIC $= x$, ZN die Richtung des zweimal gebrochenen und einmal reflektirten Strahles, der Winkel ZNA $= y$, so ist φ der äußere Winkel des Dreieckes IDH, somit $x = \varphi - \alpha$, oder statt φ den obigen Werth gesetzt, $x = 90 - b - \alpha$ .... 5), ferner ist φ' der äußere Winkel des Dreieckes FLN, daher $y = \varphi' - \beta'$ oder $y = 90 - a - \beta'$ ... 6), da aber $a = b$ und als Folge dessen $\alpha = \beta'$ ist, so folgt aus 5) und 6) $x = y$ .... 7).

Ein rechtwinkliges gleichschenkliges Prisma hat demnach genau dieselbe Wirkung wie eine ebene zur Prismenfläche AC parallele Spiegelfläche; auch ist vermöge Gleich. 4) der Einfallswinkel auf der ersten Kathetenfläche dem Winkel gleich, unter welchem derselbe Strahl aus dem Prisma austritt.

Bezeichnet man den Punkt, wo sich die Linie SI und ZN schneiden, mit R, so ist SRZ $= \psi$ der Winkel, welchen der direkte Strahl mit dem austretenden bildet, aus dem Vierecke BFRD folgt $\psi = 90 + 2\alpha$ .... 8), wobei zu bemerken ist, daß α von dem Einfallslothe gegen den spitzen Winkel an der Hypothenusenfläche als positiv, somit auf der anderen Seite des Einfallslothes als negativ zu betrachten ist.

§. 160. In der Fig. 180 (siehe die Zeichnung auf der nächsten Seite) sind ACB, A'C'B' die Durchschnitte zweier übereinander liegenden Prismen, ihre Kathetenebenen BC, B'C' liegen in einer Ebene, F der Punkt, wo sich ihre Hypothenusen berühren, so stehen diese auf einander senkrecht, daher liegt das in F auf AC errichtete Einfallsloth in der A'C' und umgekehrt.

Fig. 180.



Nehmen wir nun an, OD sei ein Strahl, der sowohl auf die Kathetenfläche BC als auch auf B'C' fällt und nach F gebrochen wird, so kommt er in Bezug auf das Prisma ABC unter den Einfallswinkel

$$DFC' = \alpha,$$

und wenn DFC' = C'FG ist, wird noch G reflektirt. Derselbe Strahl DF fällt auf A'B'C' unter dem Winkel

$$DFC = \alpha'$$

und kommt, DFC = CFH vorausgesetzt, nach H. Es ist aber leicht nachgewiesen, daß HFG eine gerade Linie ist, daß somit die in F reflektirten Strahlen unter gleichen Winkeln auf die Flächen AB und A'B' auffallen; sind also GI und HK die Einfallslothe, so sind auch die Winkel MGI und NHK einander gleich, die aus den Prismen austretenden Strahlen GM und NH parallel.

Also umgekehrt, sind MG und NH parallele Strahlen, von welchen der erste auf die Kathetenebene AB, der andere auf A'B' fällt, so treten sie nach der Reflexion in F bei D parallel aus, das Auge in O sieht daher beide Objekte in der Richtung OZ und zwar in der Deckung.

§. **161.** Ist V, Fig. 180 (siehe oben), ein Objekt, von dem der Strahl VL unter dem Einfallswinkel VLP $= \gamma$ auf das Prisma ABC fällt, nach F gebrochen, daselbst nach Q reflektirt wird und beim Austritte die Richtung QR nimmt, so ist der Winkel zwischen den Linien VL und QR (Gleichung 8 vorhergehenden Paragraphs), wenn wir ihn mit ρ bezeichnen $\rho = 90 + 2\gamma$ .... 1).

Bei einem anderen Strahle NH, welcher mit VL nicht parallel ist, und unter dem Winkel NHK $= \gamma'$ auf das Prisma A'B'C' fällt, von da den Weg HFDO nimmt, bei diesem ist der Winkel zwischen den Linien NH und DO $\rho' = 90 + 2\gamma'$ .... 2).

Die Summe dieser Gleichungen ist $\rho + \rho' = 180 + 2(\gamma + \gamma')$.

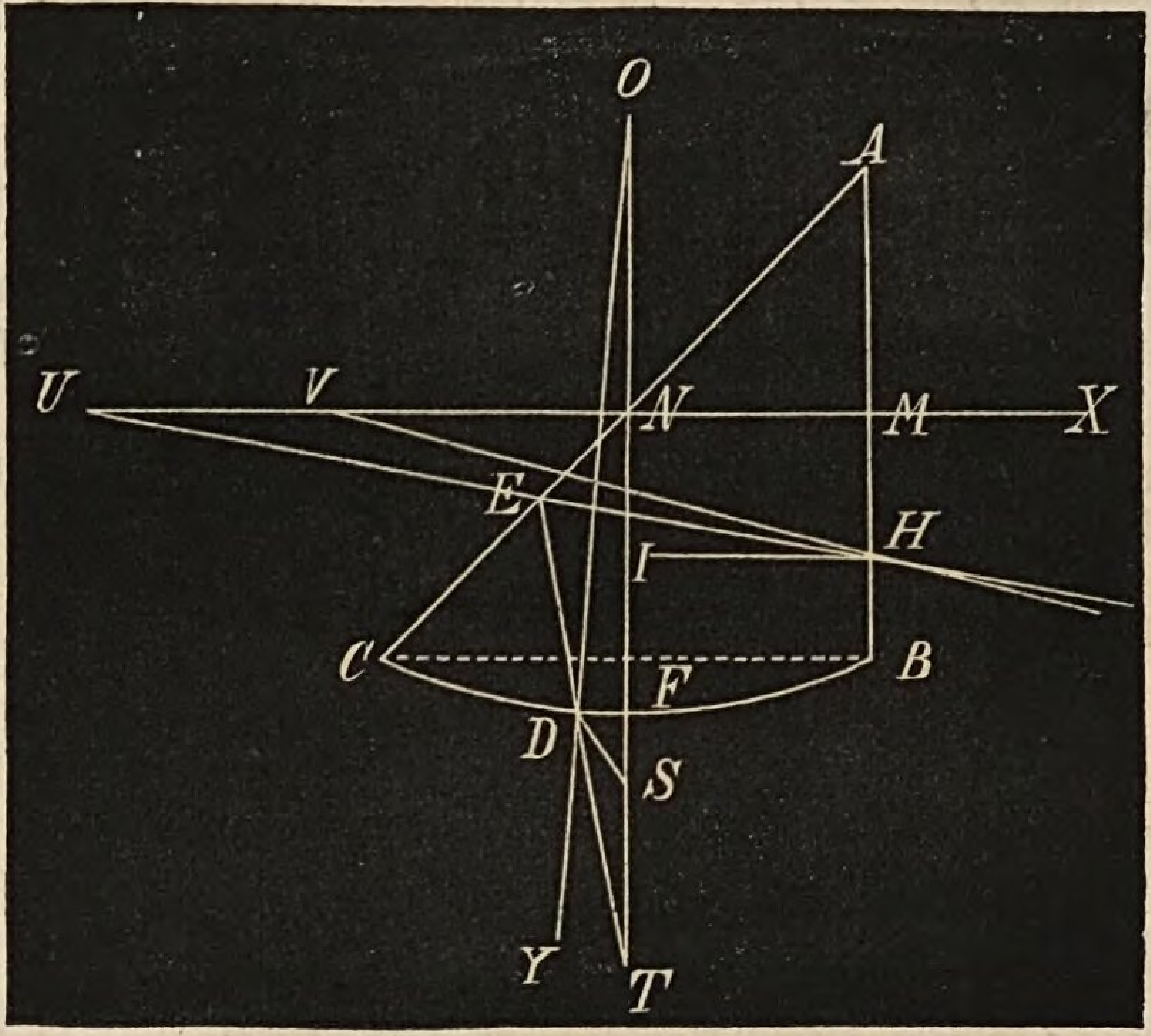
Denkt man sich von F aus mit den Linien NH, QR, DO und LV parallele Linien gezogen, so enthält die letzte Gleichung die Summe der sämmtlichen Winkel, darunter jene zwischen QR und DO zweimal; der erhabene Winkel zwischen NH und LV ist offenbar $180 + (\gamma + \gamma')$, zieht man somit diesen von der obigen Summe ab und bezeichnet den Winkel, unter welchem sich RQ mit OD schneidet, mit ψ, so ist $\psi = \gamma + \gamma'$ .... 3).

Der Beobachter sieht daher die Objekte V und N auseinander, V in der Richtung RZ' und N in OZ, unter dem Winkel $\gamma + \gamma'$.

Ist γ oder γ' negativ, was dann stattfindet, wenn einer der Strahlen von

der Seite des rechten Winkels auf die Kathetenfläche fällt, so ist in der Gleich. 3) der Unterschied zwischen γ und γ' zu nehmen.

§. 162. In der Fig. 181 ist CFBA der Querschnitt eines sphärischen Glasprisma, O der Mittelpunkt der Krümmung, SO der Hauptstrahl, S ein innerhalb der Brennweite der Linse liegender leuchtender Punkt.



Die Wirkung eines solchen sphärischen Prisma ist im Wesentlichen der einer Planconvexlinse gleich, deren Krümmungshalbmesser OF und deren Dicke FN + NM ist, ein solches Prisma wird somit wegen der sphärischen Fläche die Gegenstände vergrößert zeigen, und wegen der totalen Reflexion an der Hypothenusenfläche wird die Ebene des Bildes auf jene des Gegenstandes senkrecht stehen.

Die dem Hauptstrahle sehr nahe liegenden Strahlen werden demnach durch die totale Reflexion an der Hypothenusenfläche AC so ins Auge gelangen, als kämen sie von einem Punkte V her, der in einer auf die ebene Kathetenfläche AB senkrechten, den Hauptstrahl OS in N schneidenden Geraden liegt.

Die Gleichung für die Bildweite eines solchen sphärischen Prisma abzuleiten, betrachten wir nur solche Strahlen, die an dem Hauptstrahl SO sehr nahe liegen, für solche haben wir statt der Gleichung $\sin. \alpha = n \sin. \beta$ die einfachere $\alpha = n\beta$.

Nun ist $\alpha = SDy = DSO + DOF$, $\beta = EDO = DTO + DOF$, somit $DSO + DOF = n\, DTO + n\, DOF$ oder

$$DSO - n\, DTO = (n - 1)\, DOF \; \ldots . \; 1).$$

Weil diese Winkel klein sind, so kann man $DSO = \frac{DF}{SF}$, $DTF = \frac{DF}{TF}$, $DOF = \frac{DF}{OF}$ setzen, und wenn noch $SF = a$, $FT = k$, $OF = R$ bedeutet, so ist aus 1), nachdem die Werthe der Winkel substituirt worden sind,

$$\frac{1}{a} - \frac{n}{k} = \frac{n-1}{R} \; \ldots . \; 2).$$

Es ist leicht einzusehen, daß durch Brechung an der sphärischen Fläche die Strahlen so auf die Hypothenusenfläche auffallend gemacht werden, als befände

sich der Punkt, von dem sie kommen, in T, nach der Reflexion müssen die Strahlen auf die Ebene AB so auffallen als kämen sie von einem Punkte U her, der in einer auf AB senkrechten, den Hauptstrahl in N schneidenden Geraden liegt, auch muß TN = NU sein, setzt man FN = δ, so ist TN = NU = k + δ.

Die auf AB auffallenden Strahlen erleiden daselbst eine zweite Brechung, vermöge welcher sie von einem in der NU liegenden Punkte V herzukommen scheinen. Denken wir uns das Auge in M, so erblicken wir in V ein deutliches Bild von S, sobald MV der deutlichen Sehweite gleich ist.

Da für die zweite Brechung $n\alpha' = \beta'$ gilt, wenn wieder α' den Einfalls-, β' den Brechungswinkel bezeichnet, überdies α' = IHE = HUM, β' = HVM und HUM $= \frac{HM}{UM}$, HVM $= \frac{HM}{VM}$ ist, so hat man aus der Gleichung $n\alpha' = \beta$ die folgende $\frac{n}{MU} = \frac{1}{MV} \ldots . \; 3)$.

Ohne merklichen Fehler kann man MN = NF = δ setzen, dann ist MU = MN + NU = MN + NT = k + 2δ, und wenn die deutliche Sehweite MV = D gesetzt wird aus 3) nD = k + 2δ oder nD — 2δ = k; mit diesem Werthe folgt aus 2)

$$\frac{1}{a} - \frac{n}{nD - 2\delta} = (n - 1) \cdot \frac{1}{R} \ldots . \; 4),$$

aus welcher sich diejenige Distanz a des Objektes S bestimmen läßt, die nothwendig ist, um ein deutliches Bild in der Sehweite D zu Stande zu bringen.

Da AB = 2 NM = 2δ ist, so kann man in der Gleichung 4) die Breite AB = b der ebenen Kathetenfläche oder was auf dasselbe hinauskömmt, die Oeffnung der Linse CFB einführen, und hat dann zur Bestimmung von a die Gleichung

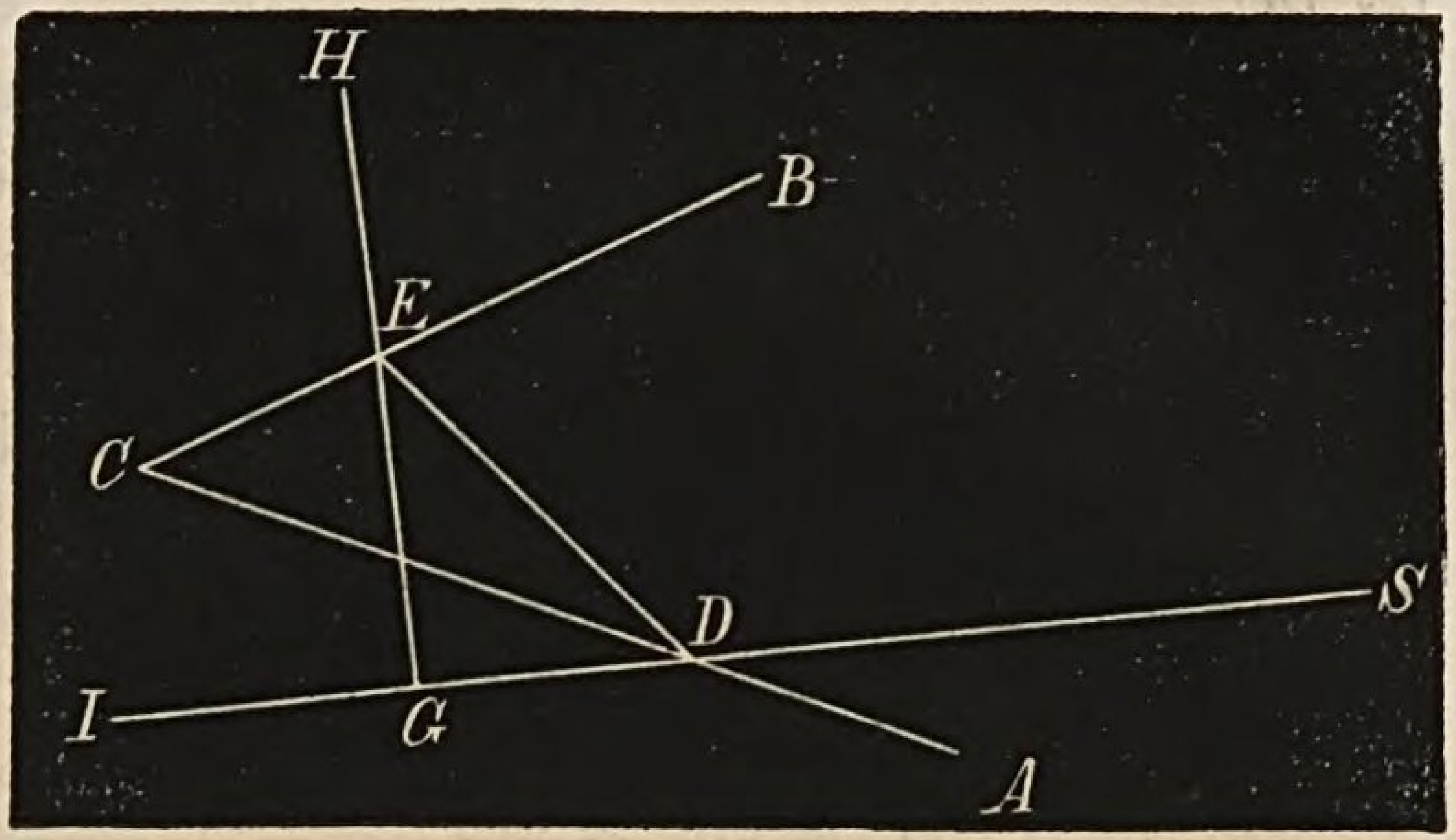
$$\frac{1}{a} = \frac{n}{nD - b} + \frac{n - 1}{R} \ldots . \; 5).$$

Z. B. Das Prisma sei aus gemeinem Glase, so ist $n = \frac{3}{2}$, ferner sei D = 10, b = R = 0·5 Zoll, so ist a = 0·906 Zoll; wird D = 8 Zoll angenommen, die übrigen Daten beibehalten, so ist a = 0·885 Zoll.

§. 163. Die Linien AC, BC, Fig. 182 (siehe die erste Zeichnung auf der nächsten Seite), stellen den Querschnitt zweier Spiegelebenen vor, die unter einem Winkel von 45 Graden gegen einander geneigt sind, vom Punkte S der Geraden SI fällt auf den ersten Spiegel der Strahl SD unter dem Winkel SDA = α auf, er wird somit unter demselben Winkel reflektirt; die Richtung des zurückgeworfenen Strahles sei DE, so ist für den zweiten Spiegel BED = CEG, wenn EG die Richtung des zweimal reflektirten Strahles ist. Weil SDA = EDC = CDG, daher EDG = 2α, BED als äußerer Winkel des Dreieckes CED gleich 45 + α, daher auch CEG = 45 + α ist, so ist GED = 90 — 2α und mit Rücksicht auf die Größe des Winkels EDG = 2α, folgt EGD = 90^0 . . . . 1).

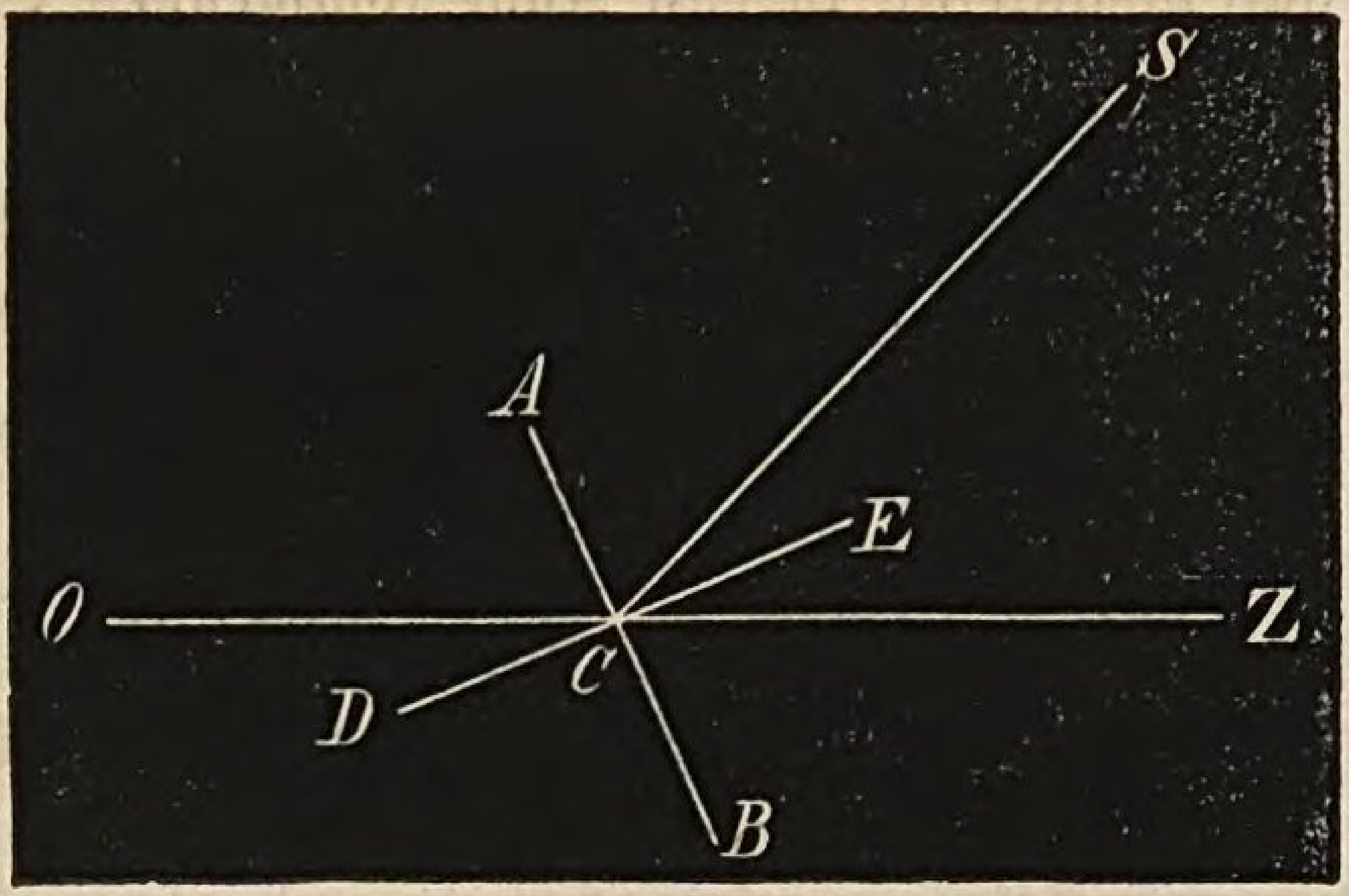
Sind also zwei Spiegelebenen gegen einander unter einem Winkel von 45 Graden geneigt, und fällt von irgend einem Punkte ein Strahl auf den einen Spiegel auf, so macht derselbe nach der Reflexion an beiden Spiegelflächen mit seiner ursprünglichen Richtung einen rechten Winkel.

Fig. 182.



Wird allgemein der Winkel ACB $= \varphi$ gesetzt, so ist EGD $= 2\varphi$.

§. 164. In der Fig. 183 sind AB und DE zwei aufeinander senkrecht stehende, sich jedoch nur in ihren Rändern in C berührende Spiegelflächen, die spiegelnde Ebene DE gegen O, jene AB gegen Z gewendet.

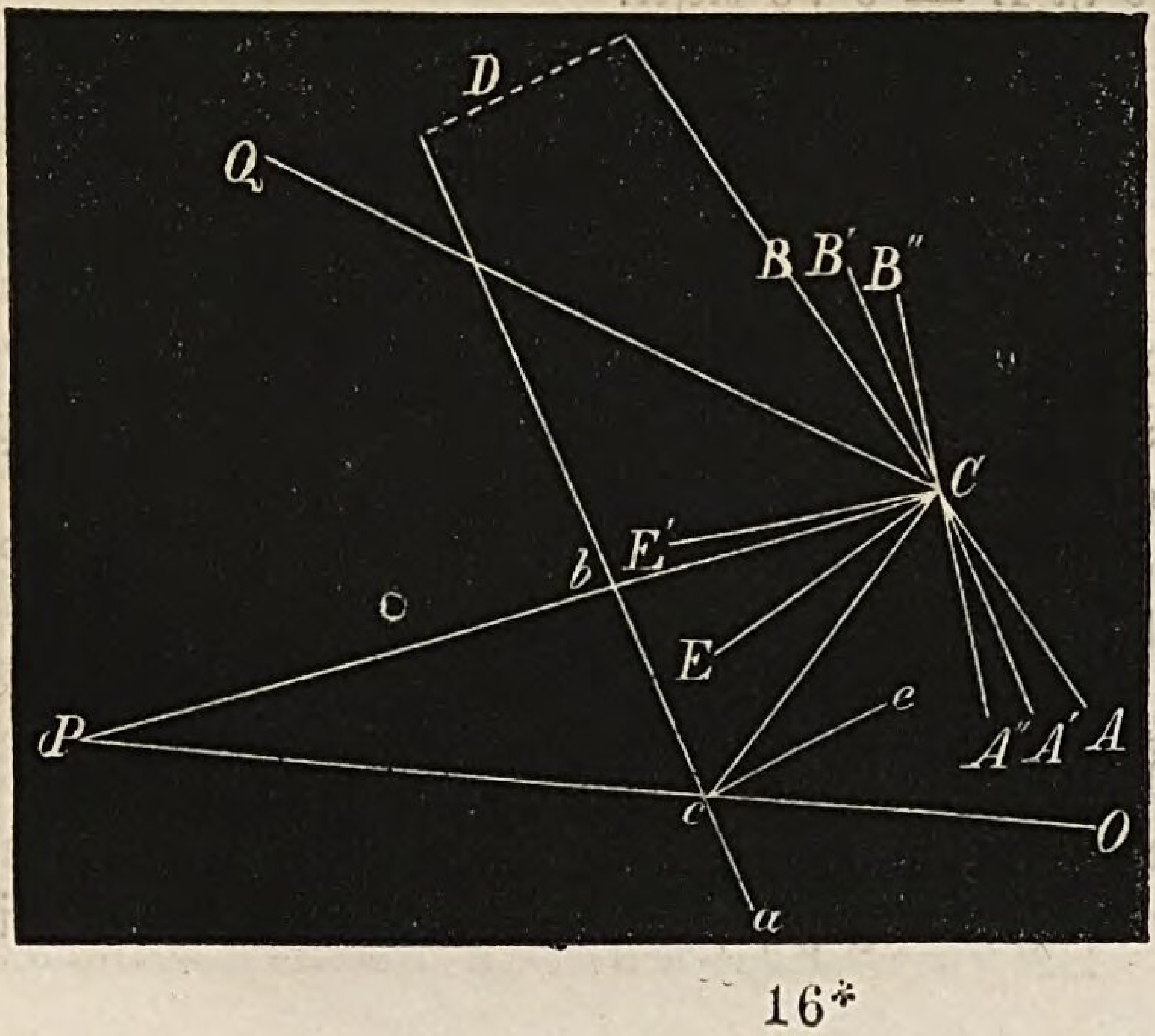


Da die Ebenen senkrecht auf einander stehen, so liegt das Einfallsloth für den einen Spiegel in der Ebene des zweiten.

Der von dem leuchtenden Punkte S kommende Strahl SC fällt somit auf den Spiegel DE unter dem Winkel SCA auf und wird, weil SCA = ACO ist nach O, von AB dagegen, da derselbe unter dem Winkel SCE auffällt, wenn SCE = ECZ ist, nach Z reflektirt.

Nun ist OCD = SCE = ECZ, daher liegen die Punkte O, C, Z immer in einer geraden Linie.

§. 165. Denken wir uns auf dieselbe horizontale Ebene POCQ, Fig. 184, zwei ebene Glasspiegel AB und ab senkrecht gestellt, von welchen AB ganz, ab nur zur Hälfte belegt ist, und nehmen wir an, der von P auf ab auffallende Strahl gehe durch die obere durchsichtige Hälfte in der Richtung PO, der von P auf AB auffallende Strahl PC aber werde in C nach c und von da nach O reflektirt, so wird



das Auge in O von demselben Gegenstande P die Strahlen doppelt erhalten, nämlich direkt über c und dann nach einer zweimaligen Reflexion des Strahles PC.

Werden die beiden Spiegelebenen AB und ab verlängert, bis sie sich schneiden, und sind DC, Dc die Schnitte dieser mit der horizontalen Ebene, auf welcher sie senkrecht stehen, so ist cDC $=$ D der Neigungswinkel beider Spiegel.

Bezeichnen wir die Einfallslothe auf die Spiegel mit ce und CE, setzen die Winkel Oce $=$ ecC $= \beta$; cCE $=$ ECP $= \gamma$, so ist acO $=$ bcC $= 90 - \beta$, ACc $=$ cCP $= 90 - \gamma$; und weil ACc der äußere Winkel des Dreieckes CcD ist, so folgt $\beta = \gamma + D \ldots . 1)$.

Ferner ist CcO der äußere Winkel von cCP, daher $P = 2 (\beta - \gamma)$ und wegen 1) $P = 2D \ldots . 2)$.

Bei dieser Lage beider Spiegel ist also ihr Neigungswinkel D halb so groß als der Winkel P, welchen die von demselben Objekte auf beide Spiegel fallenden und gleichzeitig in das Auge kommenden Strahlen bilden.

Zieht man durch C die A'B' mit ab parallel, und bezeichnet den Winkel ACA' mit e, so ist $e = D = \frac{P}{2} \ldots . 3)$, daher wegen 1) $e = \beta - \gamma \ldots . 4)$, und wenn $Pc = L$, $cC = d$ gesetzt wird, so bekommt man aus dem Dreiecke PcC

$$\text{tang. } 2e = \frac{d \sin. 2\beta}{L + d \cos. 2\beta} \ldots . 5).$$

Sind die Spiegel parallel, so ist $e = o$, daher Gleichung 4) $\beta = \gamma$ und Gleich. 2) $P = o$, und da d so auch β konstante Größen sind, so ist vermöge Gleich. 4) $L = \infty$, mit der Abnahme dieses Werthes nimmt der Winkel P zu.

Um über L eine genäherte Angabe zu erhalten, nehmen wir die Daten von zwei Instrumenten als Beispiel.

Bei dem einen ist $d = \frac{1}{24}$ Klft., $\beta = 10^0$, lassen wir $P = 2e = 5$ Minuten bedeuten, so ist $L = 165'37$ Klftr.

Bei dem zweiten ist $d = \frac{1}{18}$ Klft., $\beta = 30^0$, soll $P = 1$ Minute sein, so ist $L = 9{\cdot}76$ Klftr.

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, daß in der Praxis sehr häufig die von demselben Objekte kommenden Strahlen als parallel betrachtet werden können.

§. 166. Bleibt bei der vorhergehenden Anordnung das Auge in O, Fig. 184 (siehe die Zeichnung auf der vorigen Seite), und der Spiegel ab unverändert, wird dagegen der Spiegel AB in die Lage A"B" gedreht, und gelangen die Strahlen vom Objekte Q nach zweimaliger Reflexion in das Auge, was nur dann geschehen kann, wenn QCB" $=$ A"Cc ist, so wird das Auge in c zwei verschiedene Objekte in der Deckung sehen, nämlich P direkt und Q durch zweimalige Reflexion.

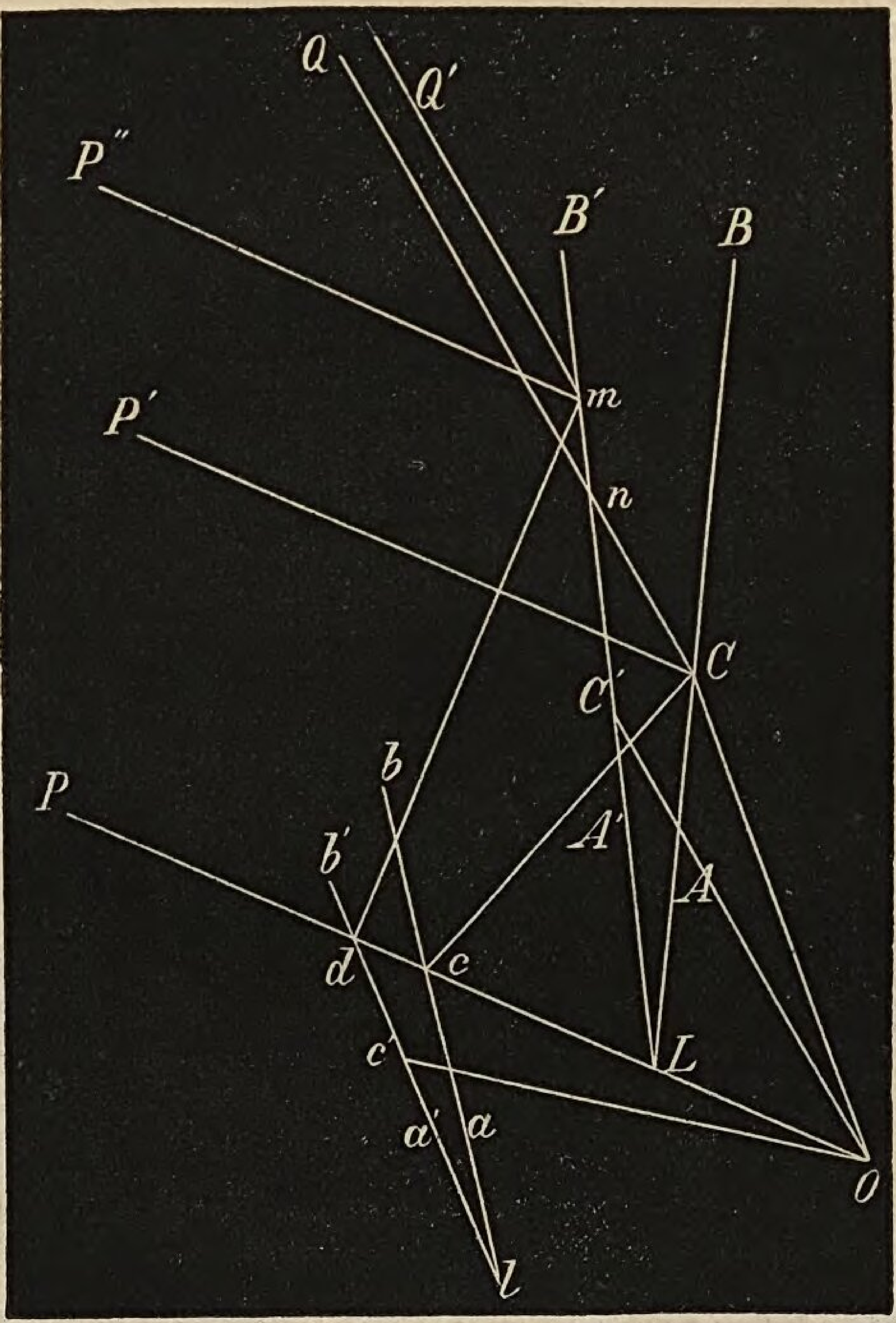
Der Winkel, welchen die Strahlen von P und Q in C bilden, ist noch ein Mal so groß als der Winkel ACA", um welchen der Spiegel AB gedreht werden mußte, damit, nachdem das Signal P direkt und durch Reflexion sichtbar war, auch jenes Q gesehen werden könne. Denn es ist QCc $= 180 - 2$ A"Cc

PCc = 180 — 2 ACc, daher QCc — PCc = 2 (ACc — A"Cc), oder QCP = 2 ACA"; setzen wir QCP = a, ACA" = α, so ist wieder

$$a = 2\alpha \ldots . 1).$$

Streng genommen ist der Scheitel des Winkels in dem Durchschnitte der Strahlen OP und CQ.

§. 167. Ist die Limbusebene, auf welcher die Spiegel senkrecht stehen, horizontal, und erscheinen die beiden Objekte in der Deckung, so wird bei einer hinreichend großen Entfernung der letzteren, sobald nämlich die auffallenden Strahlen als parallel angenommen werden können, die gegenseitige Deckung der Bilder nicht geändert, wenn auch die Limbusebene um den Augpunkt in der horizontalen Richtung beliebig verstellt wird.



Dies nachzuweisen sei in der Fig. 185 O das Auge, P das direkt, Q das durch Reflexion gesehene Objekt, beide mit O in einer horizontalen Ebene, AB der größere Spiegel, das Objekt Q mit P bereits in der Deckung und α der Winkel, unter welchem die Spiegel gegen einander geneigt sind; ferner seien die von demselben Objekte P auf beide Spiegel fallenden Strahlen Pc und P'C parallel, daher Gleich. 1) §. 165 $\beta = \gamma$, so ist Oca = bcC = 90 — β, cCA = QCB = 90 — ($\alpha + \beta$).

Wird nun die Ebene QCc um O gedreht, aber so, daß sie horizontal bleibt, und kommt sodann C nach C', c nach c', AB in die Lage A'B', ab nach a'b', so wird ein Strahl von P nach O durch den unbelegten Theil des Spiegels ab bei d durchgehen, ein anderer, dessen Richtung wir von O aus verfolgen wollen, wird auf den belegten Theil desselben Spiegels unter dem Winkel Oda' auffallen, und unter demselben Winkel nach m reflektirt werden, kommt daselbst unter dem Winkel dmA' an und geht dann in irgend einer Richtung mQ' sobald dmA' = B'mQ' ist.

Sind L und l die Durchschnitte der Spiegel in beiden Lagen, und wird der Winkel, um welchen die Limbusebene gedreht worden ist, mit z bezeichnet, so ist COC' = BLB' = cOc' = blb' = z; weil ferner lcO der äußere Winkel des Dreieckes ldc ist, so ist ldO = 90 — (β + z)

$$dmL = Q'mB' = 90 - (\alpha + \beta + z) \ldots . 1).$$

Der Strahl QC trifft den Spiegel A'B' in n, QnL ist der äußere Winkel des Dreieckes nCL, daher QnL = nCP' + P'Cc + cC'L + CLn, also vermöge der vorhergehenden Sätze QnL = 90 + (α + β + z), somit

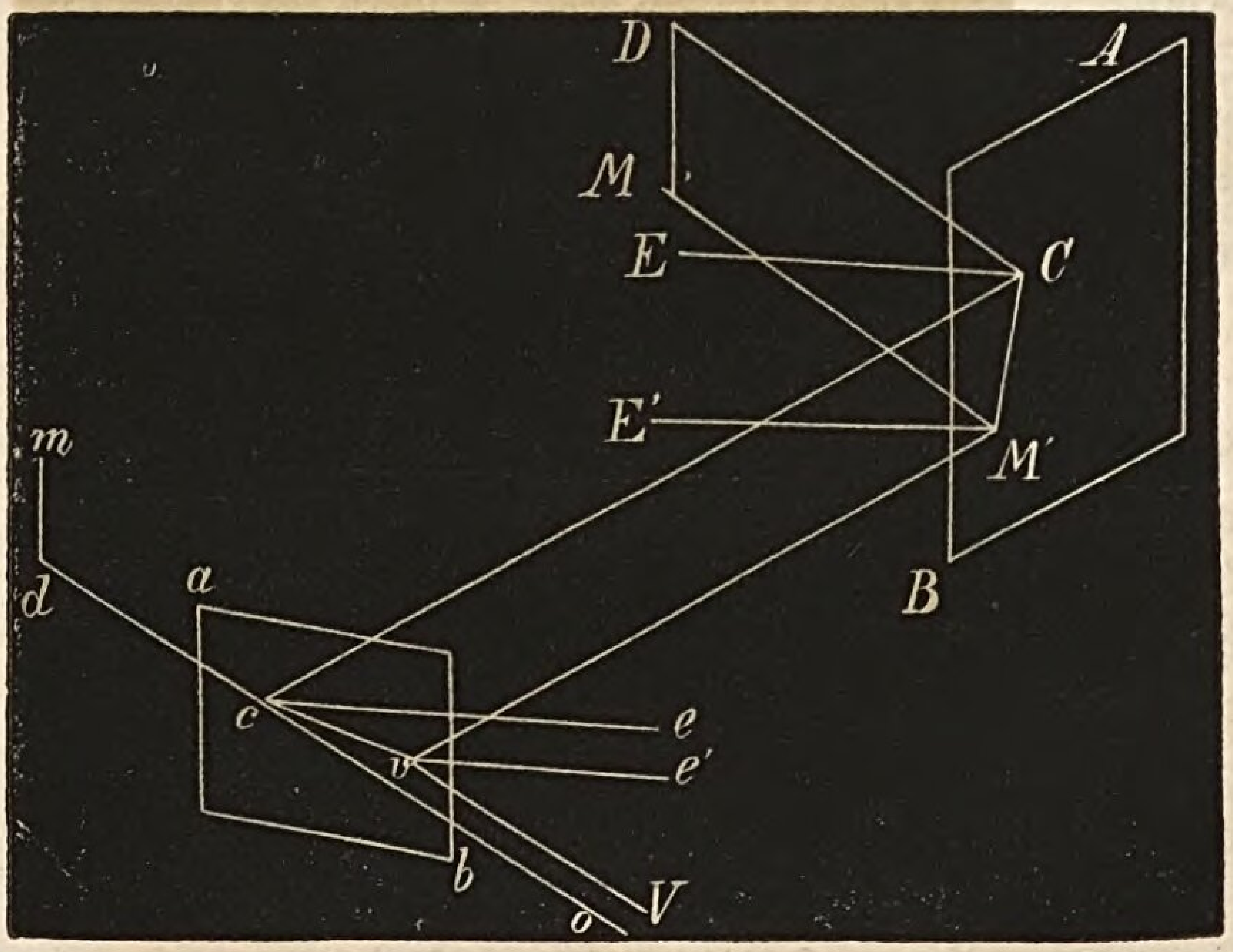
$$QnB' = 90 - (\alpha + \beta + z) \ldots . 2).$$

Die Gleichungen 1) und 2) sagen somit aus, daß Q'm mit Qn parallel ist, man wird also auch nach der Drehung der ganzen Ebene die Objekte in der Deckung aber in d sehen. Wird noch ein Strahl P''m parallel mit PO gezogen, so ist Q'mP'' = QCP' = 2α, also der in dieser Stellung gemessene Winkel fehlerfrei.

Die Größe des Winkels z unterliegt bei parallelen Strahlen vom theoretischen Standpunkte keiner Beschränkung, allein in der Wirklichkeit darf die direkte Visur nicht außerhalb des halbbelegten Spiegels fallen, und da die Breite desselben zwischen 0·5 und 0·7 Zoll, die Entfernung des Auges von demselben Spiegel zwischen 3 und 6 Zoll variirt, so kann z nicht viel mehr als einen Grad betragen.

Der Beweis ist allerdings nur so lange richtig als die von P kommenden Strahlen unter sich parallel sind, allein aus den im §. 165 gegebenen Beispielen ist ersichtlich, daß in sehr vielen Fällen die anvisirten Signale schon in einer solchen Entfernung stehen, aus welcher die kommenden Strahlen als parallel betrachtet werden können.

§. 168. In der Fig. 186 sind dm und MD zwei vertikal stehende Objekte; od ist die direkte Visur, die Limbusebene, auf welcher die Spiegel ab, AB senkrecht stehen, ist der Ebene OdD parallel, diese aber gegen den Horizont geneigt; unter diesen Umständen wird das Bild des Objektes MD mit dem direkt gesehenen dm einen Winkel bilden.



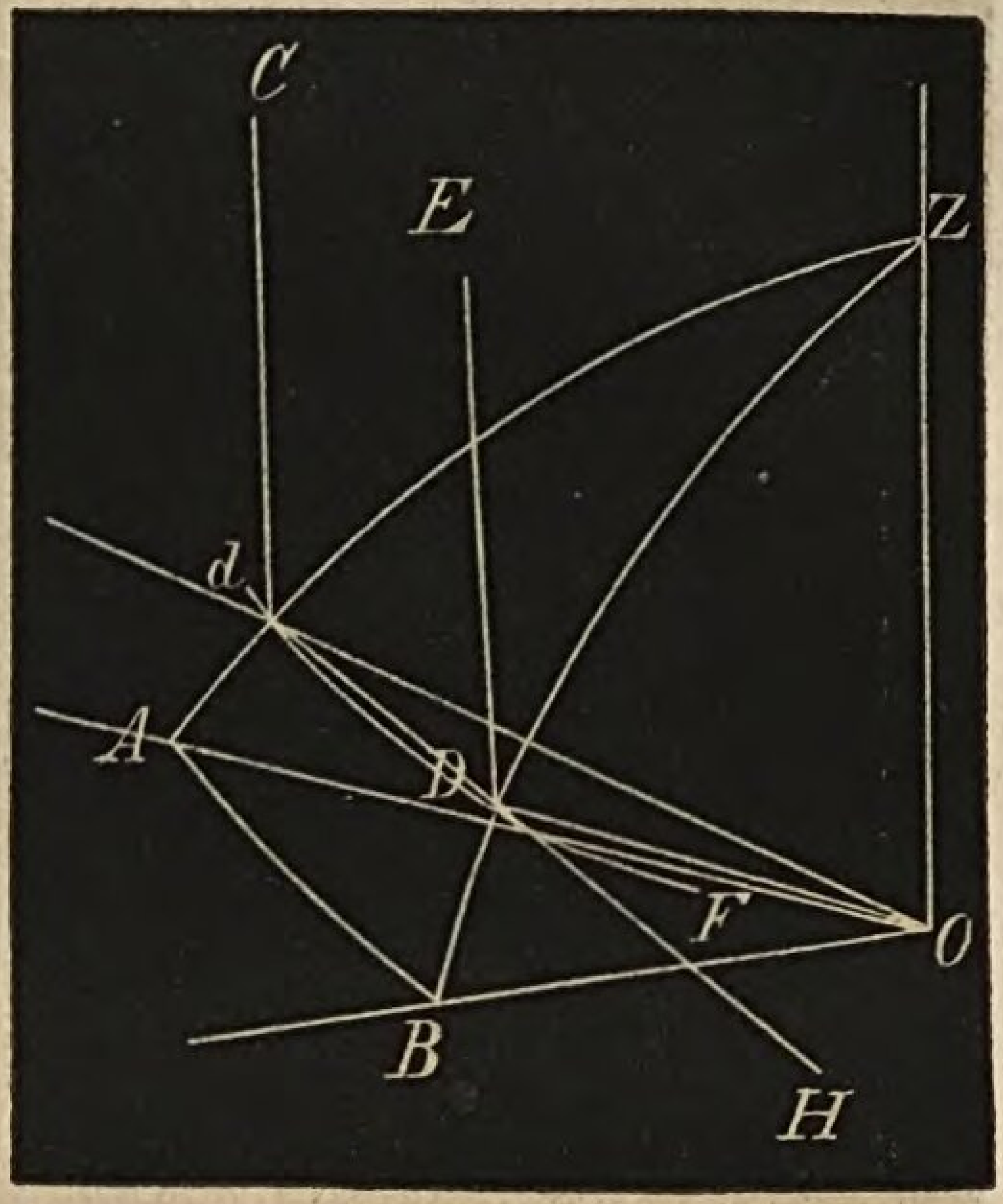
Da die Spiegel auf die Limbusebene senkrecht stehen, so sind die Einfallslothe CE, ce mit dieser parallel; ist noch die Richtung des auffallenden Strahles DC mit dem Limbus parallel, so liegt auch der reflektirte Theil Cco, somit der ganze zurückgelegte Weg in einer mit dem Limbus parallelen Ebene. Dasselbe gilt auch von allen übrigen aus DM kommenden Strahlen.

Allein da die Ebene AB gegen den Horizont geneigt ist, so wird der Schnitt zwischen dieser und der vertikalen Ebene MDM'C eine gegen den Horizont geneigte Linie sein, und da dieses Bild M'C als Objekt für den kleinen Spiegel dient, so wird auch cv auf eine horizontale Ebene schief stehen.

Der Beobachter in o sieht daher direkt dm vertikal und zugleich cv das Bild des ebenfalls vertikalen Objektes DM, beide aber bilden, sobald der Limbus nicht horizontal ist, einen Winkel, den wir mit γ bezeichnen wollen.

Um diesen zu bestimmen, seien in der Fig. 187 d, D jene zwei Punkte, welche zur Berührung gebracht werden sollen, O das Auge des Beobachters, dDO die Limbusebene, AOB der Horizont durch O, dC eine vertikale Linie, DE gegen diese unter dem Winkel γ geneigt, DH die Verlängerung von dD, so ist γ = EDH — CdH, oder wenn wir EDH = α, CdH = β setzen

$$\gamma = \alpha - \beta \; . \; . \; . \; . \; 1);$$



endlich denke man sich in dem Punkte O die Vertikale ZO errichtet durch ZOd, ZOD Ebenen gelegt und diese durch eine aus O beschriebene Kugelfläche geschnitten. Werden die Winkel dOA = h, DOB = h′ gesetzt, so ist in dem sphärischen Dreiecke ZdD, Zd = 90 — h; ZD = 90 — h′, dZD = γ der zwischen beiden zur Berührung gebrachten Punkten gemessene Winkel, ferner ist näherungsweise ZdD = CdH = β; ZDF = EDH = α, daher nach den Neper'schen Analogien

$$\text{cotg.}\left(\frac{ZDd + ZdD}{2}\right) = \frac{\cos.\left(\frac{Zd + ZD}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{Zd - ZD}{2}\right)} \text{tang.} \frac{dZD}{2}$$

oder wenn die Werthe dieser Größen substituirt worden sind

$$\text{tang.}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\sin.\left(\frac{h' + h}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{h' - h}{2}\right)} \text{tang.} \frac{Z}{2} \; . \; . \; . \; . \; 2).$$

Aus demselben Dreiecke folgt $\cos. Z = \frac{\cos. \alpha - \sin. h \sin. h'}{\cos. h \cos. h'}$ und aus diesem Ausdrucke

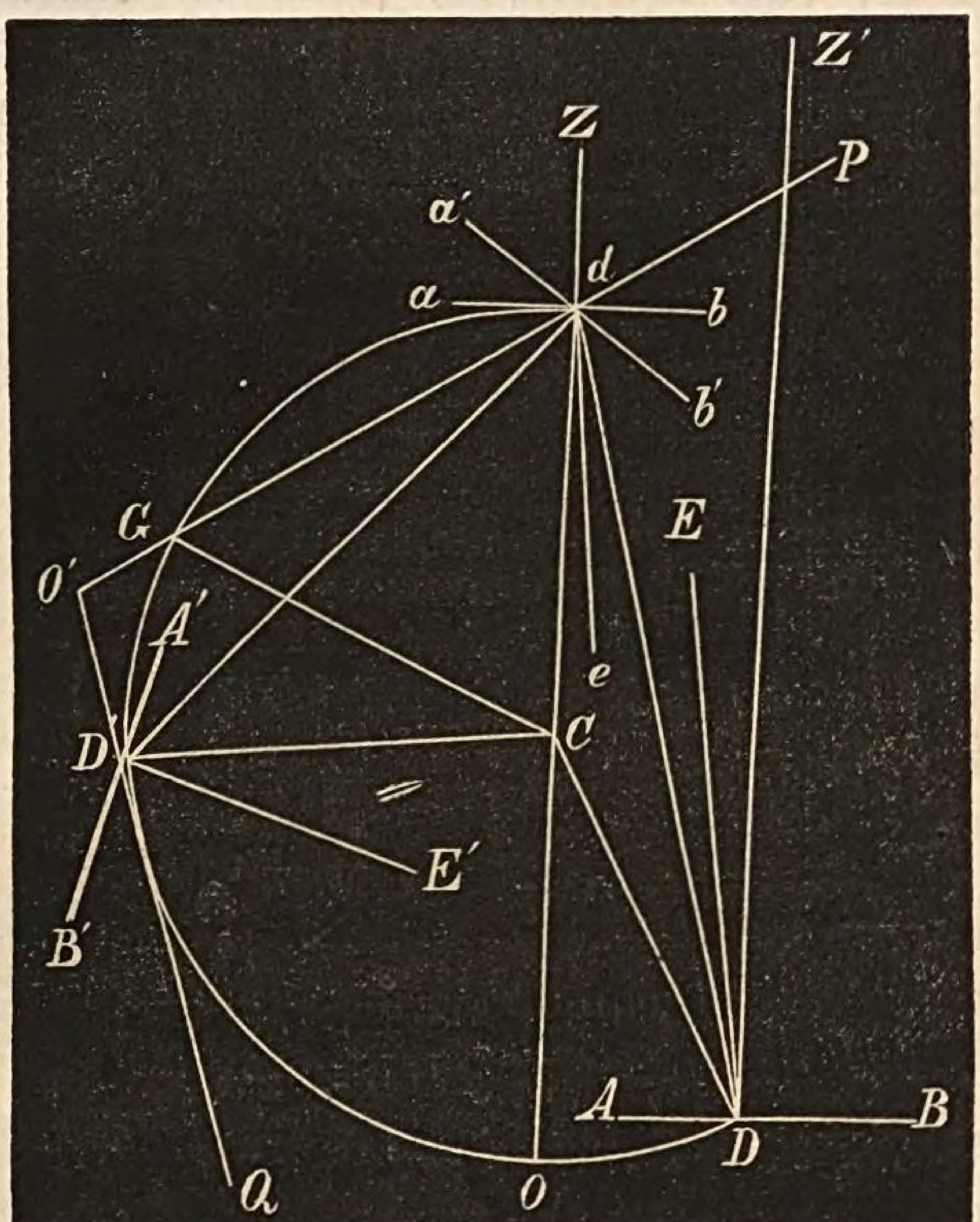
$$\text{tang.} \frac{Z}{2} = \sqrt{\frac{\sin.\left(\frac{\alpha + h' - h}{2}\right) \sin.\left(\frac{\alpha + h - h'}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{\alpha + h' + h}{2}\right) \cos.\left(\frac{\alpha - h' - h}{2}\right)}},$$

daher ist mit Rücksicht auf die Gleichung 1)

$$\text{tg.} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin.\left(\frac{h' + h}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{h' - h}{2}\right)} \sqrt{\frac{\sin.\left(\frac{\alpha + h' - h}{2}\right) \sin.\left(\frac{\alpha + h - h'}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{\alpha + h' + h}{2}\right) \cos.\left(\frac{\alpha - h' - h}{2}\right)}} \; . \; . \; . \; 3).$$

Bedeutet h = 5°, h′ = 10°, α = 60°, so ist γ = 8° 41′ 37″.

§. 169. In der Fig. 188 ist dD'D ein Kreisbogen, C dessen Mittelpunkt, ab ein halbbelegter auf die Kreisebene senkrecht stehender Glasspiegel, mittelst der Sehne dO um d beweglich, in dieser bei O stets das Auge; AB ist der ganz belegte Spiegel um den Punkt C drehbar, zugleich aber auch von der Bewegung der Sehne dO und zwar der Art abhängig, daß der Bogen zwischen der Sehne und dem Mittelpunkte D des Spiegels AB, daher auch der Winkel OCD stets eine konstante Größe bleibt.



Betrachten wir nun die Stellung beider Spiegel beim Auffallen paralleler Strahlen. Der Strahl ZO geht durch den unbelegten Theil des Spiegels und gelangt direkt in das Auge O, der mit dem ersteren parallele Lichtstrahl Z'D fällt auf den Spiegel AB, wird daselbst, wenn Z'DE = EDd, ist somit DE das Einfallsloth, nach d reflektirt, kommt daselbst unter dem Winkel Dde und wenn Dde = edO voraus gesetzt, ebenfalls in O an.

Weil Z'D parallel mit dO ist, so ist OdD = dDZ', aber OdD = $\frac{1}{2}$ OCD, dDE = $\frac{1}{2}$ dDZ', somit dDE = edD = eDO = $\frac{1}{4}$ OCD; und

$$CDE = \frac{3}{4}\ OCD \;....\; 1).$$

Also muß bei parallelen Strahlen der Spiegel ab so gestellt sein, daß der Winkel zwischen seinem Einfallslothe und der Sehne dO, $\frac{1}{4}$ des konstanten Winkels OCD und jener AB so, daß der Winkel zwischen dem Einfallslothe und dem zu seinem Mittelpunkte gezogenen Halbmesser $\frac{3}{4}$ desselben Winkels beträgt. Auch ist ersichtlich, daß bei dieser Stellung beide Spiegel parallel sind.

Aendern wir nun die Stellung der Spiegel, bringen wir die Sehne dO in die Richtung dO', dadurch den Spiegel in die Lage a'b', den andern in A'B', so ist nach dem oben Erwähnten der Bogen GD' = OD, somit auch der Winkel GCD' = OCD und O'dD' = $\frac{1}{2}$ GCD'. Das Auge in O' wird durch den unbelegten Theil des Spiegels a'b' ein Objekt P und wenn D'E' das Einfallsloth auf A'B' und QD'E' = E'D'd, ferner b'dD' = O'da' ist, zugleich in der Richtung O'd die Strahlen vom Objekte Q erhalten, somit beide in der Deckung sehen.

Nun ist GdD' = $\frac{1}{2}$ GCD' = $\frac{1}{2}$ OCD .... 2).

D'dC = dD'C = $\frac{1}{2}$ D'CO ferner wegen 1) CD'E' = $\frac{3}{4}$ OCD, somit dD'E' = $\frac{1}{2}$ D'CO + $\frac{3}{4}$ OCD und dD'Q = D'CO + $\frac{3}{2}$ OCD. Aber der Winkel dD'Q ist der äußere des Dreieckes O'D'd, daher

$D'O'd + D'dO' = D'CO + \frac{3}{2} OCD$ od. $QO'd = D'CO + \frac{3}{2} OCD - D'dO'$ also $QO'd = D'CO + OCD$, somit $QO'd = OCG \ldots . 3)$.

Somit entspricht der Bogen zwischen der ersten und zweiten Stellung des beweglichen Spiegels dem Winkel, welchen die auf die Mitte beider Spiegel direkt auffallenden Strahlen bilden.

Untersuchung der Fehler, welche bei der Winkelmessung durch die Spiegel veranlaßt werden können.

§. 170. Vom theoretischen Standpunkte haben wir die Spiegel als mathematische Ebenen betrachtet, die sie in der Wirklichkeit nicht sind, und überdies mehrere Voraussetzungen gemacht, die, wenn sie nicht stattfinden, auf die Genauigkeit des Resultates einen Einfluß ausüben werden.

Es wurde nämlich stillschweigend angenommen:

1) daß die Grenzflächen eines Spiegels eben und
2) einander parallel seien;
3) daß jeder Spiegel auf die Limbusebene senkrecht stehe,
4) eine Drehung des Spiegels um die Achse der Alhidade stattfinde,
5) die reflektirende Ebene unveränderlich bleibe, und daß
6) die Strahlen mit der Limbusebene parallel in das Auge kommen.

Wir wollen nun den Einfluß, welchen jeder dieser Punkte auf das Resultat ausübt, etwas näher untersuchen.

Der Einfluß, wenn die Flächen eines Spiegels nicht eben sind.

§. 171. Sind die Flächen eines Spiegels nicht rein und eben, so hat dieser Umstand in sofern einen Einfluß, als ein großer Theil der auffallenden Strahlen zerstreut wird, somit verloren geht, ferner die direkt oder durch Reflex gesehenen Objekte nicht scharf begrenzt erscheinen.

Die Reinheit der Flächen eines unbelegten Glases kann dadurch geprüft werden, daß man durch dasselbe auf einen ohngefähr 50 Klft. entfernten aber gut beleuchteten Stab visirt, das Glas etwa 24 Zoll vom Auge entfernt hält, und die vom Stabe kommenden Strahlen unter möglichst großem Winkel auf das Glas fallen läßt.

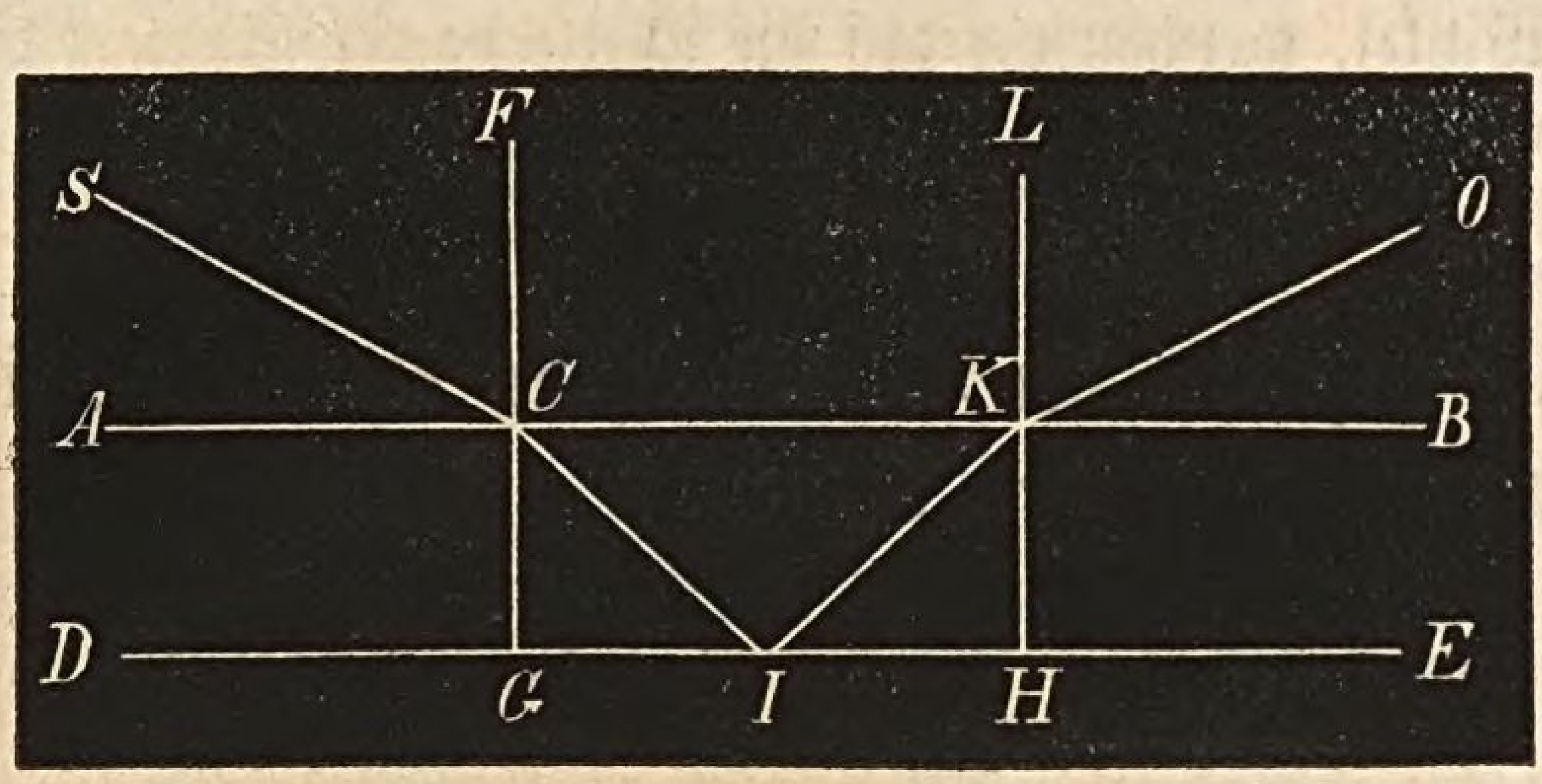
Sieht man den Stab deutlich und ohne Verzerrung, so sind die Flächen des Glases eben.

Bei einem Spiegel betrachtet man das von einem entfernten Objekte nach dem Reflexe entstandene Bild, indem man den Spiegel ebenfalls in einiger Entfernung vom Auge hält, auch hier darf das Bild nicht verzerrt erscheinen.

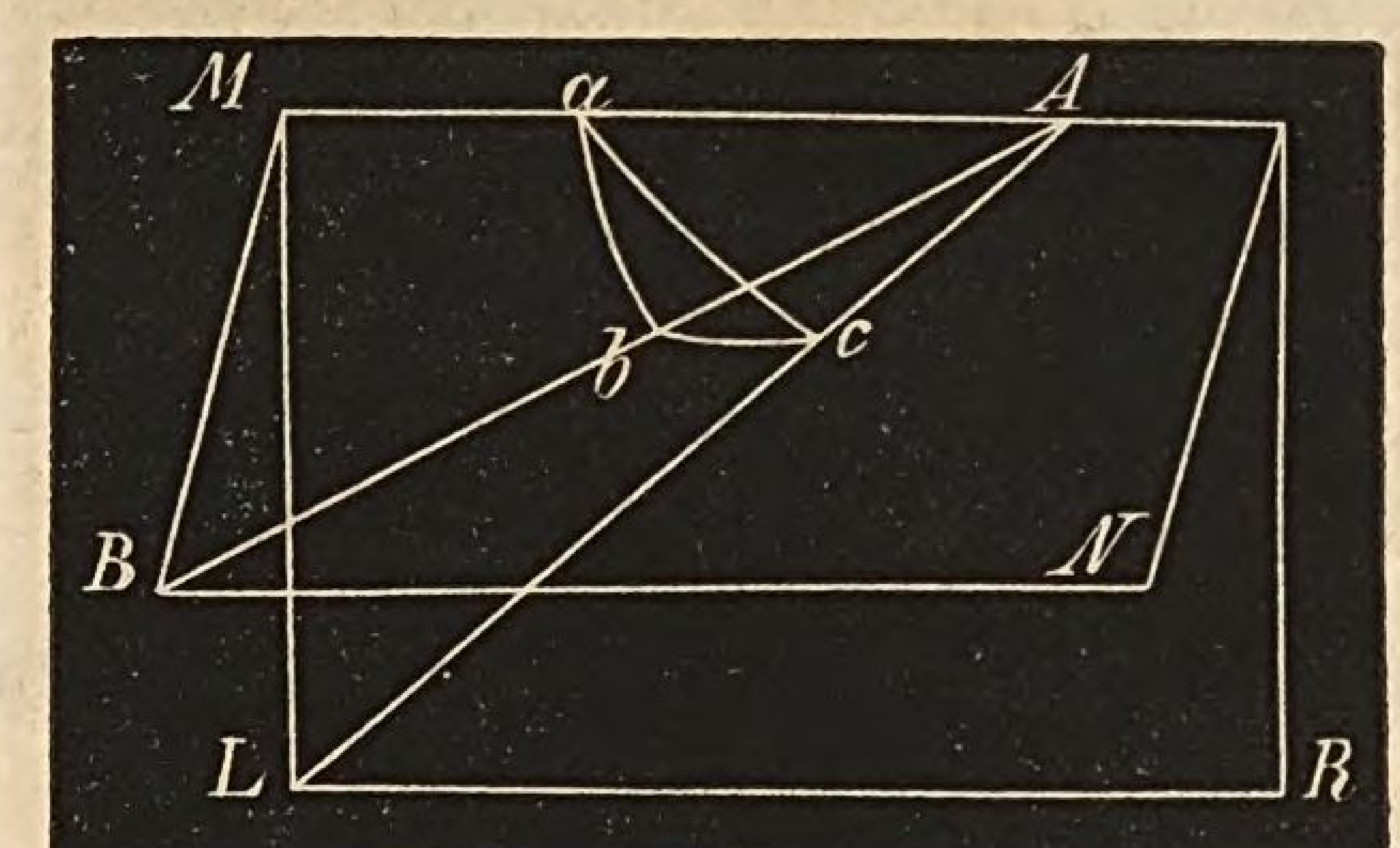
Bei einer merklichen Unklarheit des Bildes müßte der Spiegel durch einen besseren ersetzt werden.

Fehler, wenn die Glasebenen nicht parallel sind.

§. 172. Sind Fig. 189 die Ebenen AB, DE parallel, DE die belegte Seite, so wird der von S unter dem Winkel SCF auffallende Strahl nach CI gebrochen, und da nach dem Gesetze der Reflexion der Winkel CIG=KIH, somit auch GCI = IKH und der letztere der Einfallswinkel nach der Reflexion an die Ebene AB ist, so bildet auch der aus dem Glase austretende Strahl KO mit seinem Einfallslothe KL denselben Winkel, unter dem er auf die erste Fläche aufgefallen ist, es ist somit SCF = LKO.



Sind jedoch Fig. 190 LMR und BMN die beiden Flächen eines Spiegels, diese unter dem Winkel BML = γ geneigt, BAL der Durchschnitt beider Flächen mit der Einfallsebene, diese auf die obere Fläche MN senkrecht, der Neigungswinkel zwischen den Ebenen BML und BAL, nämlich MBA = ε und der Winkel BAL = A, so denken wir uns aus A mit dem Halbmesser Eins eine Kugel beschrieben, welche die Ebenen MN, LAM und LAB schneidet, und bekommen dadurch das sphärische Dreieck abc, in welchem

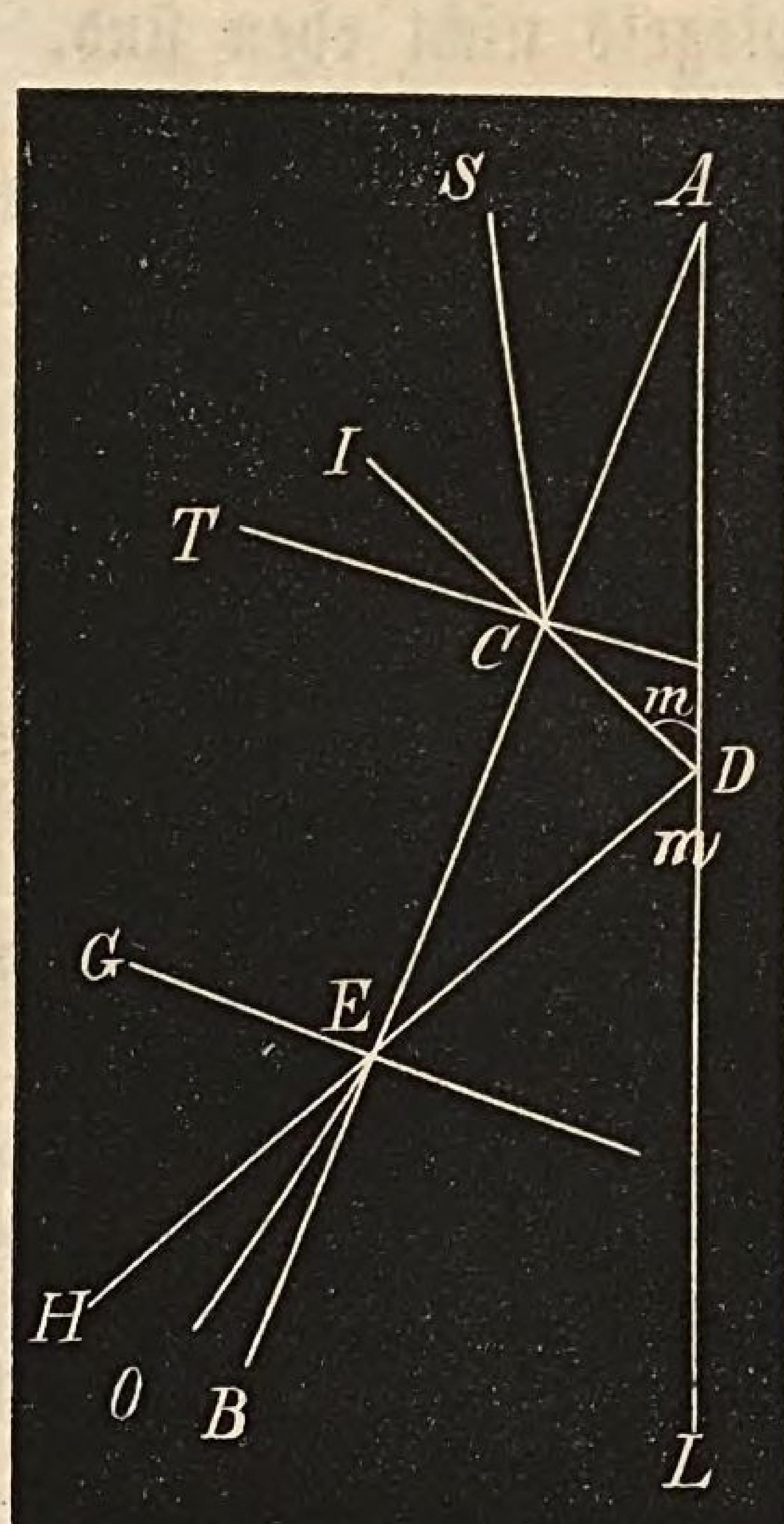


$$bc = A,\ bac = \gamma,\ ab = 90 - \varepsilon,$$

acb ein rechter Winkel ist; aus diesem Dreiecke folgt cos. ε = cotg. γ tg. A, also

$$\text{tang. } A = \cos.\ \varepsilon\ \text{tg. } \gamma \ldots .\ 1)$$

und weil A so auch γ sehr kleine Winkel sind, so kann man die Tangenten dem Sinus, ja selbst dem Bogen gleich setzen.



Zur Erklärung der ferneren Rechnung wird es besser sein, wenn wir in Fig. 191 das Dreieck BAL in die Ebene des Papiers umlegen; S ist dann der Punkt, von dem der Strahl SC auffällt, CT das Einfallsloth, somit SCT = α der Einfallswinkel, der Strahl wird beim Eintritte in das Glas zum Einfallslothe gebrochen, und wenn der Brechungswinkel TCI = β heißt, so ist sin. α = n sin. β . . . . 2).

Der gebrochene Strahl wird an der spiegelnden Ebene AL unter demselben Winkel m reflektirt, unter dem er aufgefallen ist, nach der Reflektion an die Ebene AB mit dem Einfallslothe GE den Winkel GEH $= \alpha'$ bilden und wird beim Austritte nach O gebrochen, daher ist, wenn der Brechungswinkel GEO $= \beta'$ gesetzt wird, $\sin. \beta' = n, \sin. \alpha' \ldots .$ 3).

Ferner ist ACI $= 90 - \beta$, und zugleich der äußere Winkel des Dreieckes CDA, daher $90 - \beta = A + m$; der Winkel EDL $= m$ ist der äußere des Dreieckes EDA, somit $m = 90 - \alpha' + A$; aus diesen Gleichungen folgt $\alpha' - \beta = 2\,A \ldots .$ 4).

Der Fehler wegen der nicht parallelen Begrenzung des Spiegels ist ferner $\beta' - \alpha = x \ldots .$ 5).

Um x zu bestimmen, folgt aus 2) und 3)

$$\sin. \beta' - \sin. \alpha = n\,(\sin. \alpha' - \sin. \beta);$$

werden diese Unterschiede in Produkte aufgelöst, so erhält man

$$\sin. \left(\frac{\beta' - \alpha}{2}\right) \cos. \left(\frac{\beta' + \alpha}{2}\right) = n \sin. \left(\frac{\alpha' - \beta}{2}\right) \cos. \left(\frac{\alpha' + \beta}{2}\right),$$ also

mit Rücksicht auf die Gleichung 4) und 5)

$$\sin. \frac{x}{2} \cos. \left(\frac{2\,\alpha + x}{2}\right) = n \sin. A \cos. (\beta + A) \ldots . 6).$$

Wegen der Kleinheit der Winkel x und A kann $\sin. \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, $\sin. A = A$ gesetzt, ferner x gegen 2α, A gegen β vernachlässigt werden, dadurch verwandelt sich die Gleichung 6) in $x \cos. \alpha = 2\,n\,A \cos. \beta$, und da aus 2)

$$\cos. \beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}}{n}$$ folgt, so ist $$x = \frac{2\,A \sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}}{\cos. \alpha};$$

für kleine Winkel A und γ bekommt man aus 1) $A = \gamma \cos. \varepsilon$, daher ist der in Sekunden ausgedrückte Fehler $\beta' - \alpha$ oder

$$x'' = \frac{2\,\gamma'' \cos. \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}}{\cos. \alpha} \ldots . 7).$$

Durch eine dieser ganz analogen Rechnung findet man, daß beim Durchgange eines Lichtstrahles durch ein prismatisches Glasstück der Fehler nur die Hälfte des eben gefundenen beträgt, α' und β' sind dann der Einfalls- und Brechungswinkel an der zweiten Ebene.

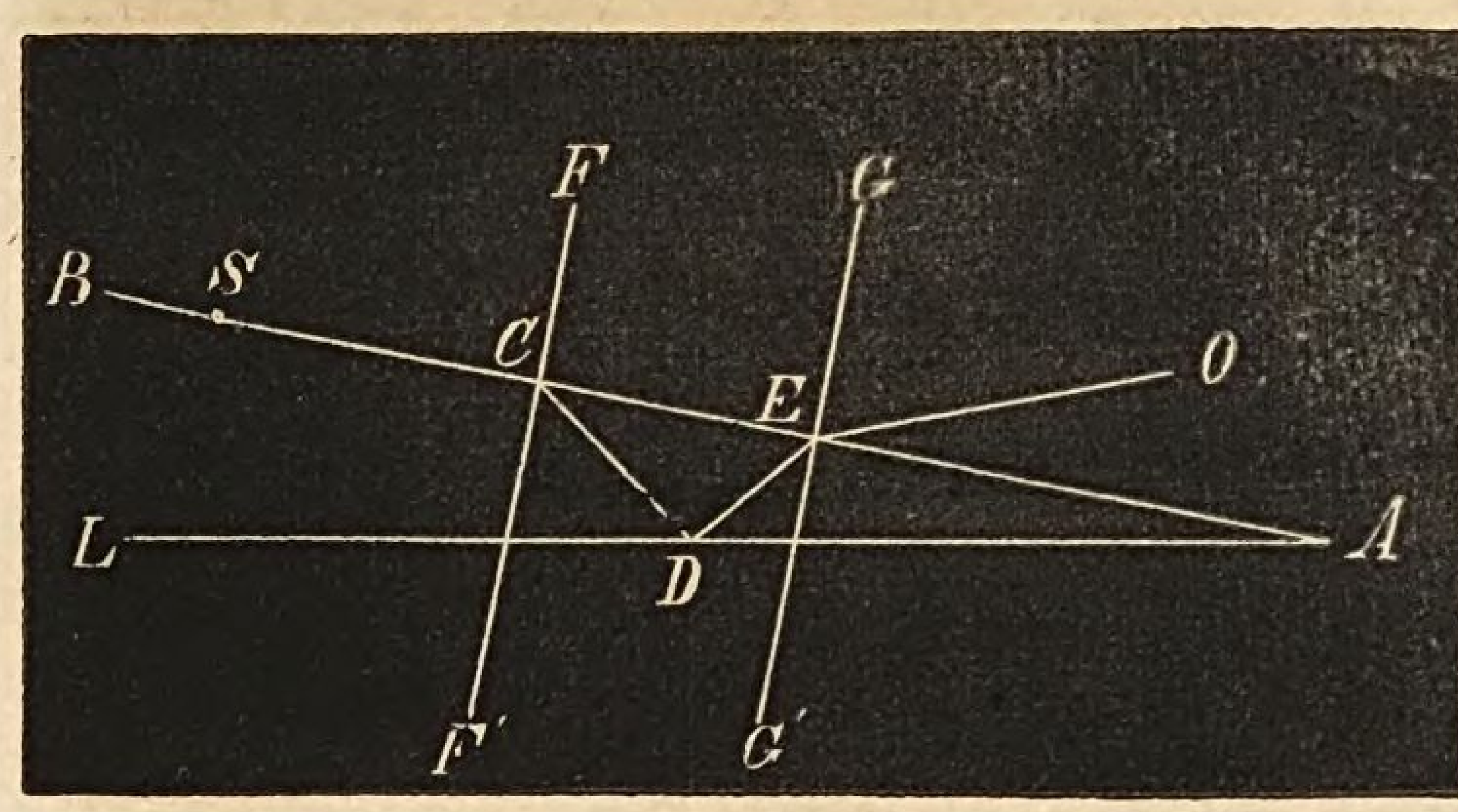
Da in der Gleich. 7) n immer größer als die Einheit ist, somit $n^2 - \sin.^2 \alpha$ nicht Null werden kann, so folgt, daß x nur dann verschwindet, wenn entweder $\gamma = 0$ oder $\varepsilon = 90^0$ wird, d. h. wenn entweder die Grenzflächen des Glases parallel sind oder wenn die Einfallsebene mit dem Durchschnitte der Grenzflächen parallel ist.

Läßt man bei demselben α und γ die Lage der Einfallsebenen also ε variabel sein, so wird für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 180^0$ der Fehler ein Maximum, für $\varepsilon > 90$ aber $< 270^0$ aber negativ; die Punkte S und A liegen sodann zu verschiedenen Seiten des Einfallslothes. Nimmt man in 7) blos α veränderlich, so beträgt

für $\alpha = 0$ der Fehler $2\gamma n \cos. \varepsilon$ und wenn nach $\varepsilon = 0$ ist, $2\gamma n$. Der Fehler nimmt mit dem Wachsen des Einfallswinkels zu, und wird für $\alpha = 90$ unendlich groß.

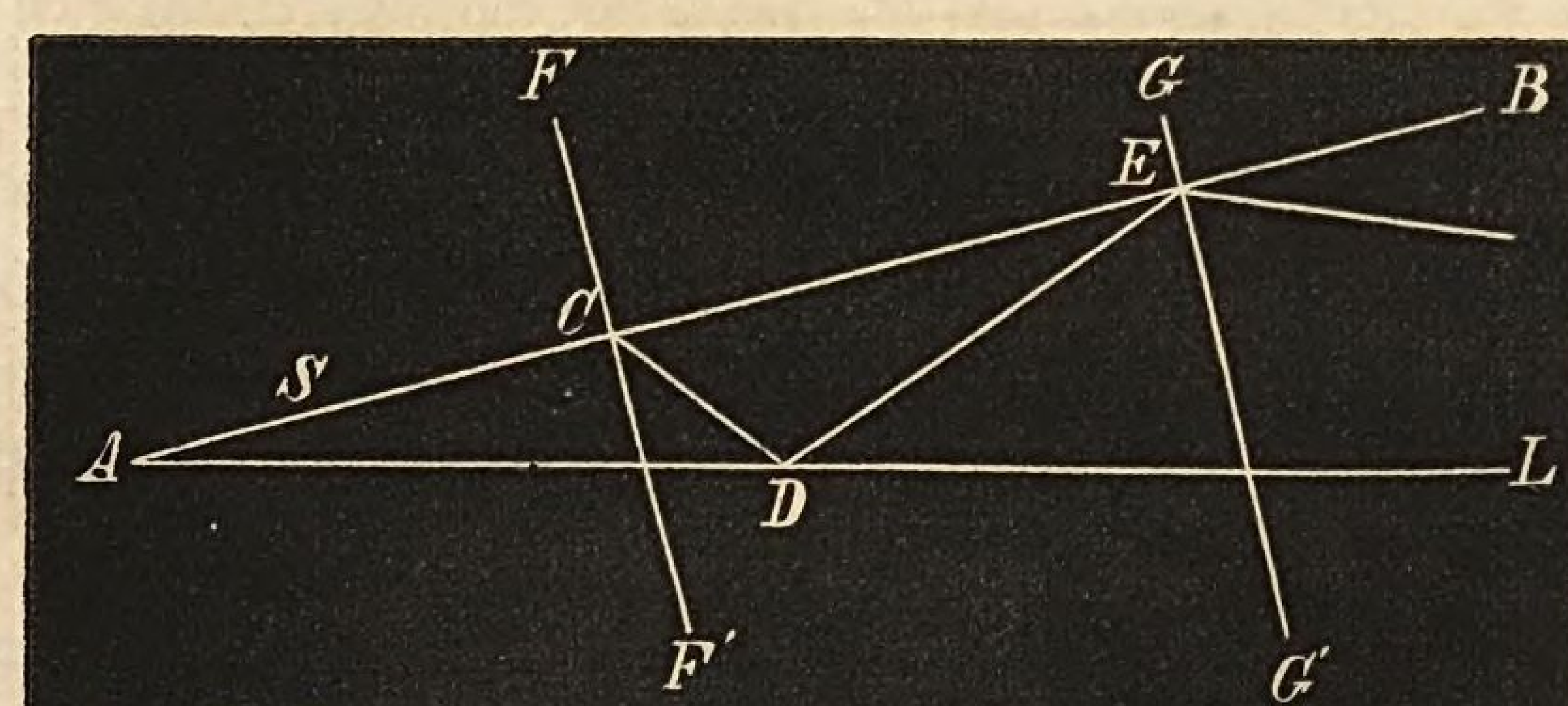
Um den Werth $x = \infty$ zu bestimmen, muß man zu der Formel 6) zurück gehen; aus dieser folgt, wenn $\alpha = 90$ ist $- \sin.^2 \frac{x}{2} = n \sin. A \cos. (\beta + A)$ und wenn noch aus 1) der Werth für sin. A in diese Gleichung gesetzt und A gegen β vernachlässigt wird, bekommt man $- \sin.^2 \frac{x}{2} = n \sin. \gamma, \cos. \varepsilon, \cos. \beta \ldots 8)$.

Diese Gleichung giebt für x nur dann reele Werthe, wenn das Glied rechter Hand des Gleichheitszeichens negativ wird, was wieder nur dadurch möglich wird, daß $\varepsilon > 90$ und $< 270^0$ bedeute, es kommt daher auf die Stellung des leuchtenden Punktes an, ob für $\alpha = 90$ von der belegten Fläche reflektirtes Licht durch die obere Glasfläche herauskommt oder nicht.



Das eben Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, sei in Fig. 192 $\varepsilon = 180^0$, der Winkel BAL $= \gamma = 30''$, $\alpha = 90^0$, $n = \frac{3}{2}$, so ist der Brechungswinkel DCF' $= \beta = 41^0 48' 35'' 4$, CDL $=$ EDA $= 48^0 11' 53''$, DEG' $= \alpha' = 41^0 47' 37''$ und GEO $= \beta' = 88^0 32' 16''$, der Strahl tritt somit durch die obere Ebene aus dem Glase heraus.

Ist dagegen Fig. 193 $\varepsilon = 0$, CAL $= 30''$, $\alpha = 90^0$, so ist wieder $\beta = 41^0 48' 35'' 4$, CDA $= 48^0 10' 54'' 6$, DEG' $= \alpha' = 41^0 49' 35'' 4$, aber sin. β schon größer als die Einheit, der Strahl erleidet somit bei E eine totale Reflexion. Aus der Gleich. 7) folgt für $\varepsilon = 0$, $\gamma = 30''$ $\alpha = 60^0$, $n = \frac{3}{2}$, $x = 2' 27''$, und wenn $\varepsilon = 30^0$ ist, γ, α, n ihre Werthe beibehalten, so ist



$$x = 2' 7'' \cdot 3;$$

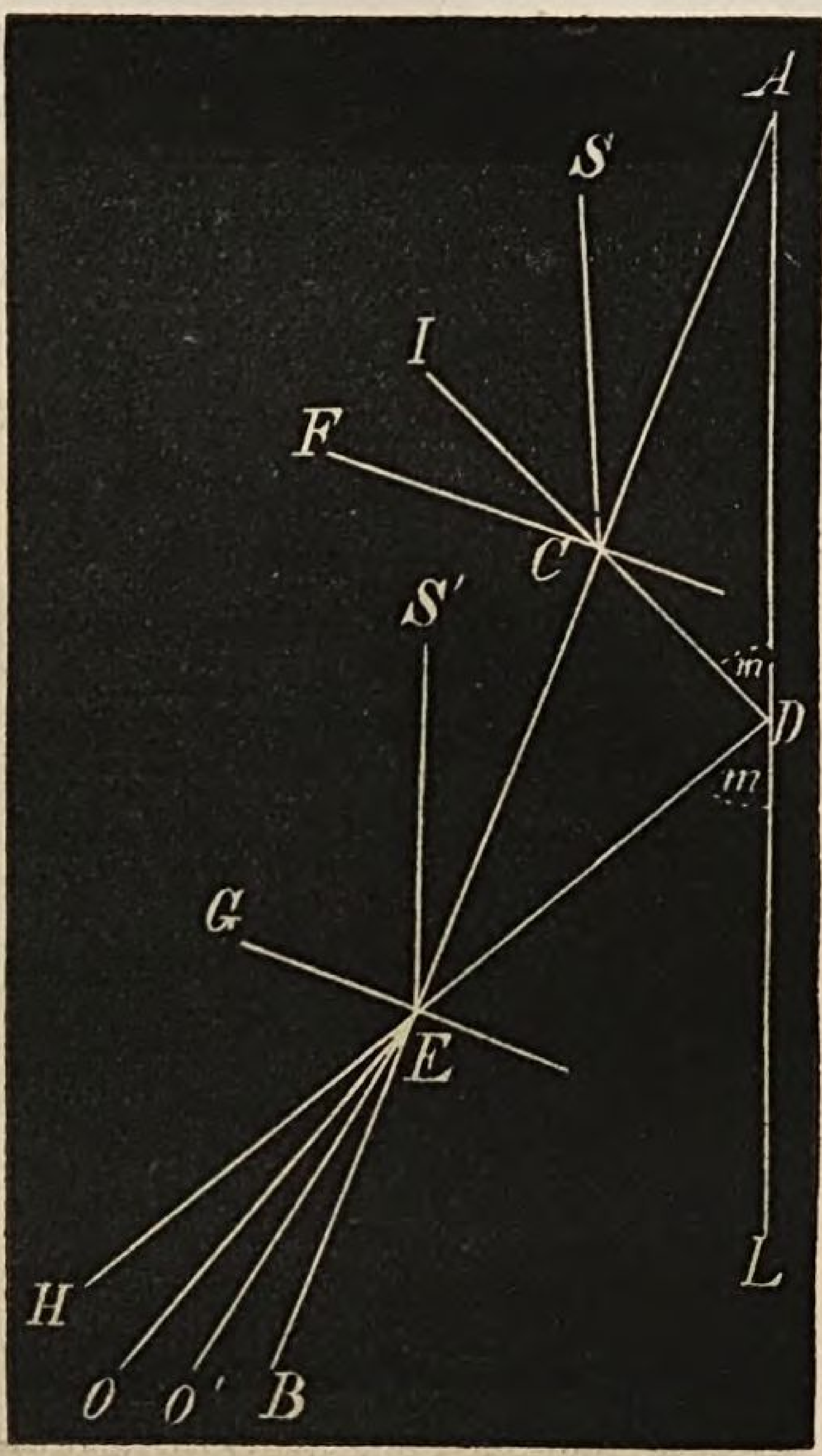
wird endlich $\varepsilon = 30^0$, $\gamma = 30''$, $n = \frac{3}{2}$, $\alpha = 15^0$ angenommen, so ist $x = 1' 19'' \cdot 5$, also immer bedeutend.

Noch ein zweiter Uebelstand, den die nicht parallele Begrenzung der Gläser hervorbringt, ist zu erwähnen.

Ist Fig. 194 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) SCDEO der Weg, den ein Strahl zurücklegt, bevor er in das Auge O gelangt, so

wird außer diesem noch ein zweiter mit ihm paralleler Strahl S'E in E auffallen, und sogleich von der Ebene AB reflektirt werden, der Beobachter sieht daher in E zwei Bilder EO und O'E, die zwar von ungleicher Lichtstärke, aber dennoch, und besonders mit einem Fernrohre, recht gut wahrzunehmen sind; diese Erscheinung bei einer nicht parallelen Begrenzung wird immer stattfinden, da die Distanz, von welcher die Lichtstrahlen auffallen, in der Gleichung 7) nicht vorkommt, somit keinen Einfluß hat.

Bei den Angaben, wie sie in dem ersten der obigen Beispiele angenommen worden sind, stehen diese Bilder um einen Winkel von 2′ 27″ ab, decken sich also nicht.



Mittel um zu prüfen ob ein Glas von parallelen Ebenen begrenzt ist.

§. 173. Will der Mechaniker untersuchen, ob die Ebenen eines Glases parallel sind, so bedient er sich hiezu des Sphärometers, das ist eines Instrumentes, mittelst dessen er den Abstand beider Flächen an jeder Stelle sehr genau bestimmen kann.

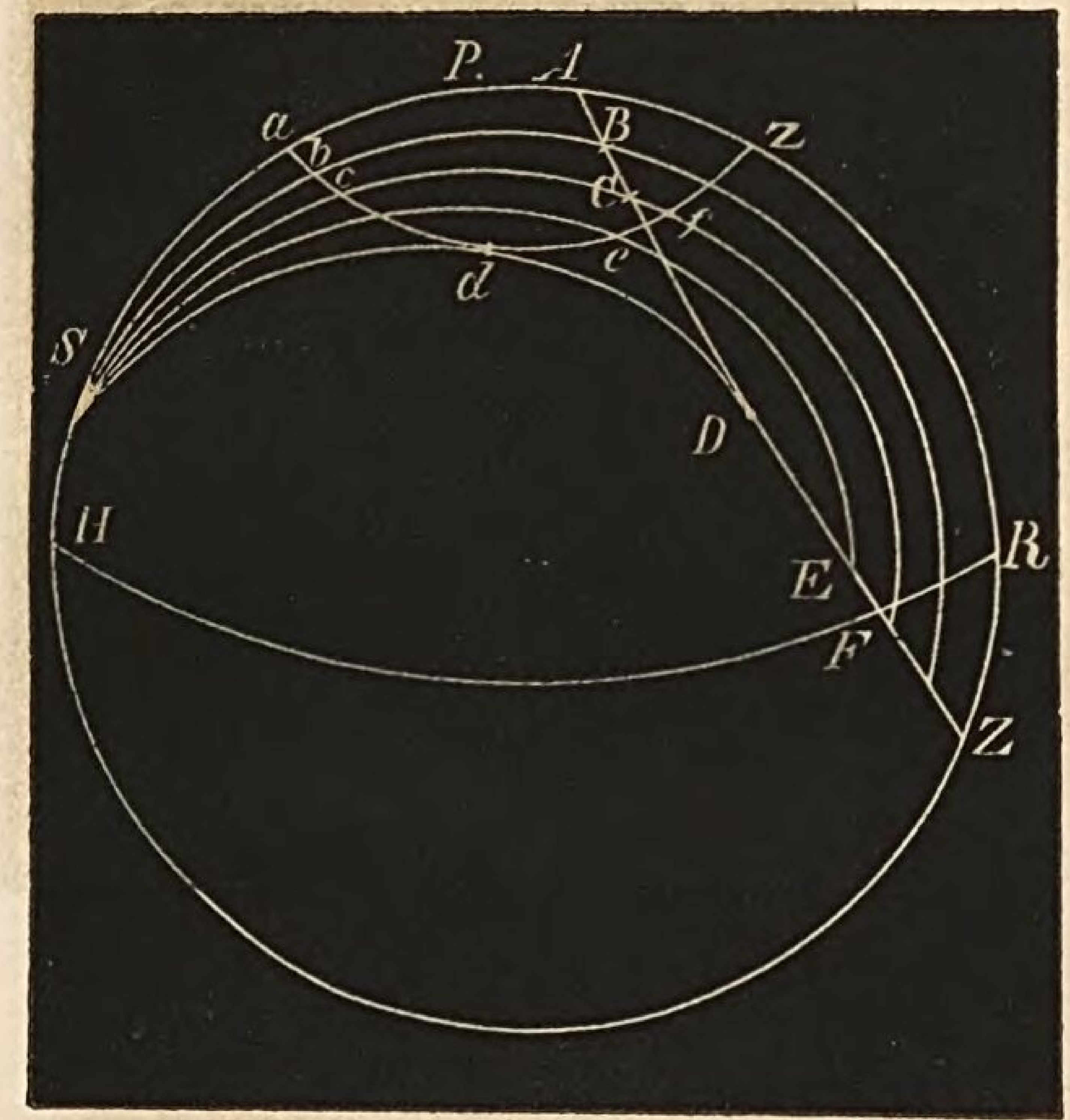
Der Geometer kann die besagte Untersuchung beim unbelegten Glase auf eine zweifache Art vornehmen.

1. Art. Man pointirt das Fadenkreuz eines Fernrohrs auf einen scharf schiefbegrenzten und gut beleuchteten Punkt und bringt das Glas vor das Objektiv, so daß die Strahlen ziemlich scharf auffallen.

Ist das Glas von parallelen Ebenen begrenzt, so wird eine sehr kleine Ausweichung des pointirten Punktes vom Fadenkreuze eintreten und während der Drehung des Glases um eine auf die Ebenen senkrecht gedachte Achse konstant bleiben. Sind dagegen die Ebenen gegen einander geneigt, so wird während der Drehung die Ausweichung des Objektes von dem Fadenkreuze zweimal das Maximum und eben so oft das Minimum erreichen, man kann somit auf diese Art auch die Ebene ausmitteln, in welcher der Neigungswinkel liegt.

2. Art. Man legt das Glasstück auf eine nahe horizontale Ebene, oder besser auf drei fixe Spitzen, visirt durch ein Fernrohr auf ein an der vorderen Ebene sichtbares Bild eines kleinen gut begrenzten Objektes und läßt das Glas auf den Spitzen um die ganze Peripherie drehen. Bleibt das Bild an derselben Stelle, so ist das Glas parallel begrenzt, sind dagegen die Glasebenen gegen einander unter einen Winkel γ geneigt, so wird bei der Drehung das an der

oberen Ebene errichtete Einfallsloth eine nach aufwärts gekehrte Kegelfläche beschreiben; die Achse des Kegels steht auf die untere fixe Ebene senkrecht, der Scheitel liegt in der oberen Ebene und der Winkel am Scheitel des Kegels ist $= 2\gamma$. Wegen der Bewegung des Einfallslothes wird sich auch die Einfallsebene, somit auch das an der oberen Ebene durch Reflex entstandene Bild ändern, dies letztere daher im Fernrohre eine krumme in sich zurückkehrende Linie beschreiben.



Die Bahn, welche das Bild durchläuft, wollen wir in Fig. 195 versinnlichen; die Kugelfläche ist aus dem Scheitel des Kegels beschrieben und schneidet die fixe Ebene in HR, die Achse des Kegels in P das Einfallsloth während der Drehung in der Kreislinie abcdef ... z und den einfallenden Strahl in S. Die Maße der Einfallswinkel während der Drehung des Glasstückes sind offenbar Sa, Sb, Sc, Sf, ... Sz, sind also SaA, AbB, ScC, BD .... die Schnitte der Einfallsebene mit der Kugelfläche und ist Sa = aA, Sb = bB, Sc = cC, Sf = fF, Sz = zZ, so sind A, B, C, ... Z die entsprechenden Punkte, in welchen der reflektirte Strahl die Kugelfläche trifft, also ist ABCD ... Z die vordere Hälfte, A der höchste, Z der niedrigste Punkt der Bahn, welche das Bild im Fernrohre beschreibt. Der Winkel, unter welchem der höchste und der tiefste Punkt vom Mittelpunkte der Kugel erscheint, wird durch den Bogen AZ gemessen, und weil

$AZ = SZ - SA = 2\,Sz - 2\,Sa = 2\,(Sz - Sa) = 2\,az$ und $az = 2\gamma$

ist, so ist $AZ = 4\gamma$, also erscheint der Fehler in der Neigung der Glasflächen viermal vergrößert in der Bewegung des Bildes und kann somit nicht nur leicht erkannt, ja sogar gemessen werden.

Beim belegten Glase, bei einem Spiegel also, kann man wieder auf eine zweifache Art die Neigung der Glasflächen prüfen.

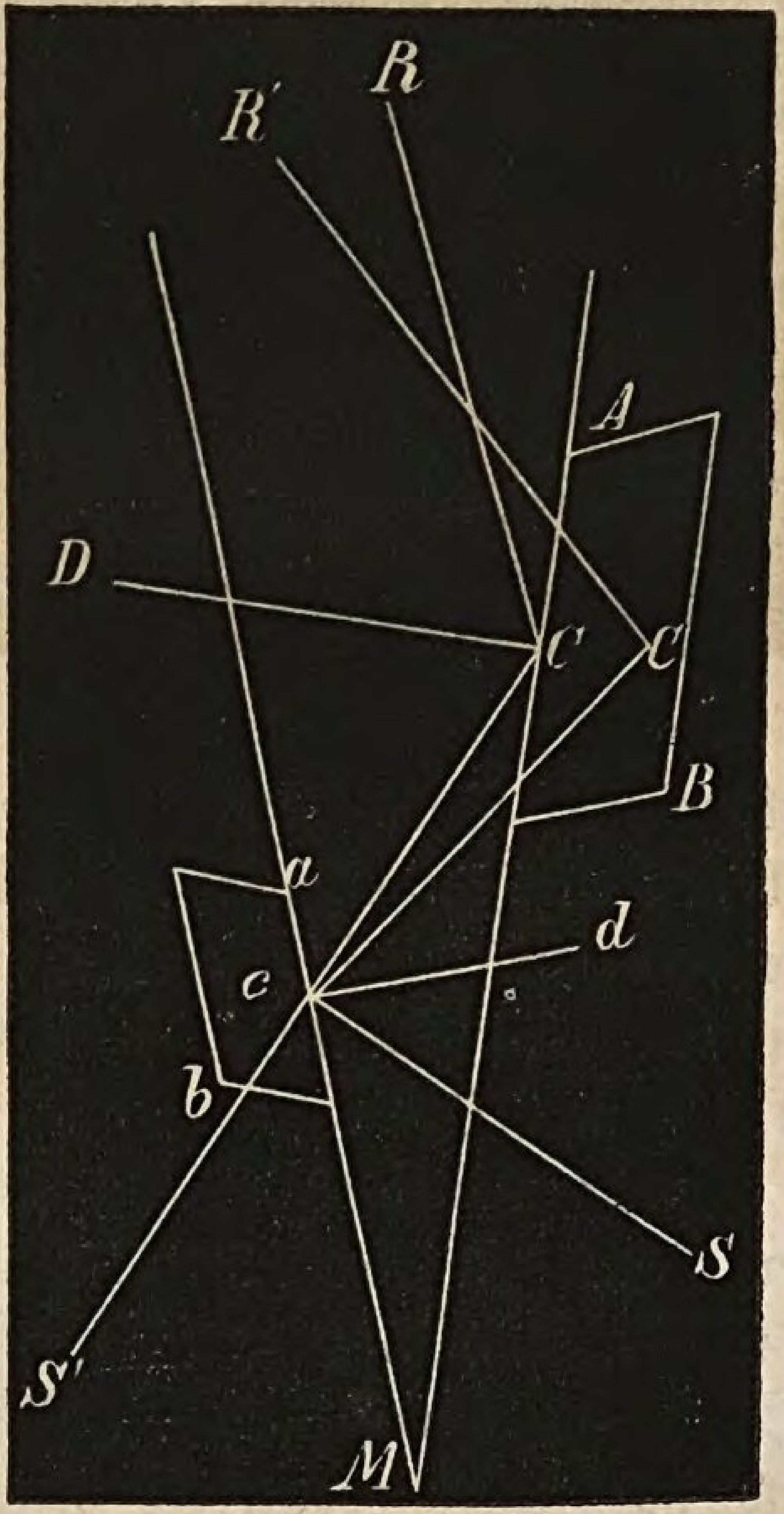
1. Art. Nach dieser bleibt das ganze eben erklärte Verfahren bis auf den Umstand dasselbe, daß die vordere unbelegte Ebene des Spiegels fixirt werden muß, was dadurch geschieht, daß man die drei Spitzen nach abwärts gekehrt befestigt und den Spiegel mit der unbelegten Seite an diese anliegend unterstützt. Das durch Reflex entstandene Bild wird auch hier bei der Drehung des Spiegels dieselbe Bahn beschreiben.

2. Art. Man lasse von einem hellen scharf begrenzten und entfernten Objekte, am besten von einem Fixstern, auf den Spiegel Strahlen fallen und halte diesen in einer sehr geneigten Lage gegen das Auge. Erscheint das Objekt doppelt, so sind die Flächen des Spiegels nicht parallel, und das minder lebhafte Bild ist durch den Reflex von der obern unbelegten Fläche entstanden.

Untersuchung des Fehlers, wenn die Spiegel auf die Limbusebene nicht senkrecht stehen.

§. 174. Wie wollen hier den Fall annehmen, daß bei einem Winkelmesser zwei ebene Glasspiegel vorkommen; der Fehler, welcher bei Instrumenten, die nur einen Spiegel haben, wegen der geneigten Stellung desselben entsteht, erscheint dann als ein spezieller Fall.

Es sei, Fig. 196, cd das Einfallsloth auf den Spiegel ab, CD auf den Spiegel AB, beide Lothe mit dem Punkte S, von welchem der Strahl auf den Spiegel ab fällt, in einer Ebene, demnach beide Spiegel auf die Ebene ScC senkrecht.



Wird der Einfallswinkel Scd = β gesetzt, so kommt der Strahl Sc nach der ersten Reflexion in C an, sobald Scd = dcC ist, und zwar unter dem Einfallswinkel cCD, welcher wieder dem Reflexionswinkel DCR gleich ist; der Strahl hat also den Weg ScCR zurückgelegt.

Werden die beiden Spiegel verlängert bis sie sich schneiden und sind aM, AM die Schnitte der verlängerten Spiegel mit der Ebene ScC, so ist aMA = α ihr Neigungswinkel, der Winkel cCM beträgt 90 — ($\alpha + \beta$), somit cCD = $\alpha + \beta$, und wenn cCR = 2w gesetzt wird, $2w = 2(\alpha + \beta)$ . . . . 1).

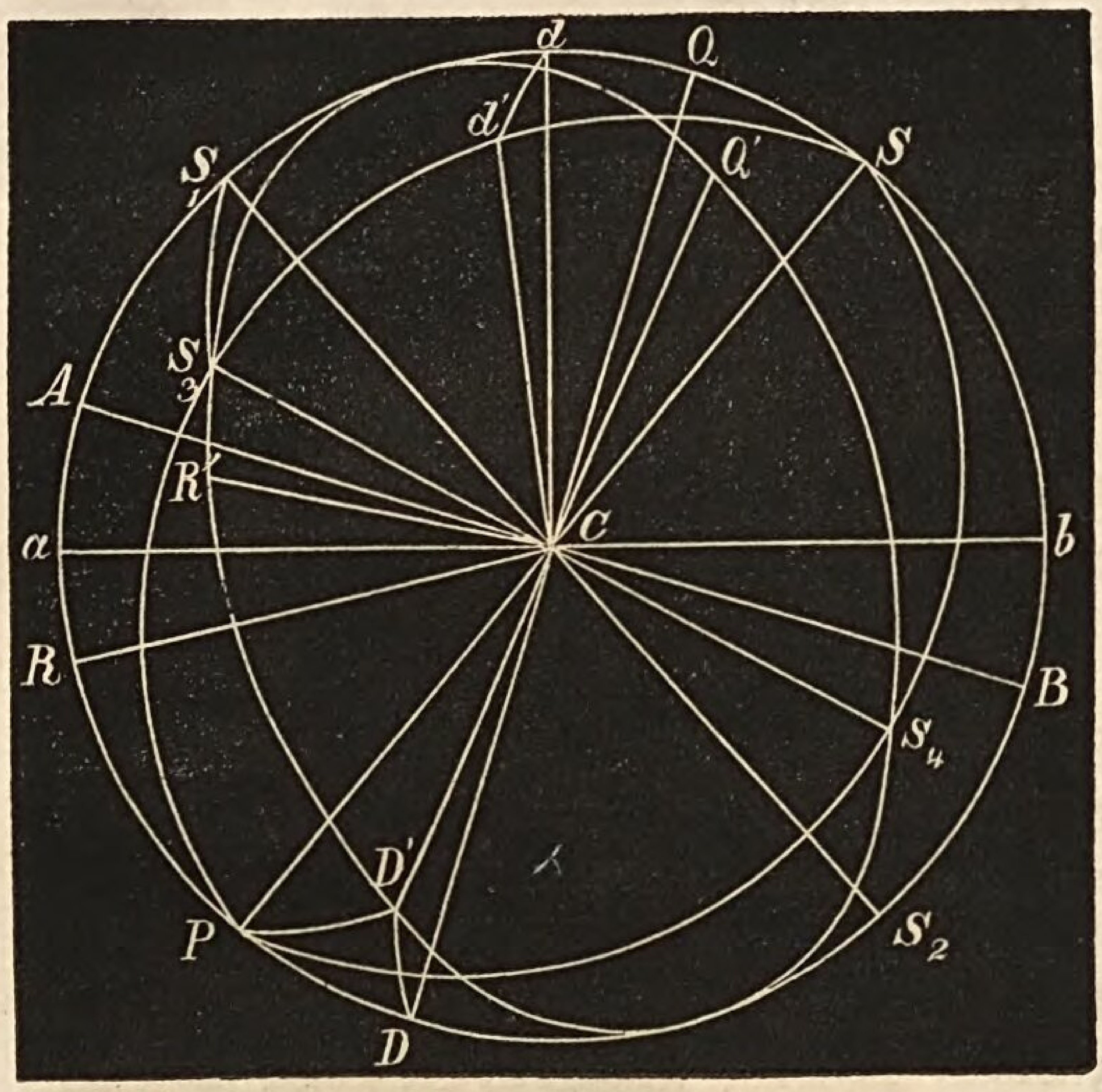
Nehmen wir nun an, beide Spiegel werden aus der vertikalen Stellung gebracht, in Folge dessen nun der Strahl Sc den Weg ScC'R' nimmt, auch sei cC'R' = 2w', so ist der wegen der unrichtigen Stellung beider Spiegel in der Messung eines Winkels begangene Fehler $2w - 2w' = x$ . . . . 2).

Des Folgenden wegen müssen wir auf den Umstand aufmerksam machen, daß die Einfallslöthe beider Spiegel eine entgegengesetzte Richtung haben, und daß der Strahl cC auf AB so auffällt, als käme er von einem Punkte S_1 her, der eben so weit hinter dem Spiegel ab liegt, als S vor demselben ist.

Zur Erklärung der folgenden Rechnung nehmen wir die Fig. 197 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) zur Hülfe.

In dieser ist adB die Ebene, auf welcher vorerst die Spiegel ab und AB senkrecht gestellt angenommen werden; Cd ist das Einfallsloth auf ab, CD auf AB; CQ die Verlängerung von CD, somit dQ = α der Neigungswinkel beider Spiegel; S der Punkt, von welchem der Strahl auf ab unter dem Einfallswinkel Sd = β auffällt, S_1 C der reflektirte Strahl, somit $SS_1 = 2\beta$. Wird S_1 C nach S_2 verlängert, so ist S_2 der Punkt, von welchem die Strahlen auf dem

Fig. 197.



Spiegel AB aufzufallen scheinen, der Einfallswinkel $S_2 D$ ist gleich dem Reflexionswinkel DR, somit $S_2 R = 2w$; ist ferner CP die Verlängerung von SC, so ist

$PS_2 = SS_1 = 2\beta$,
$PD = QS = (\beta - \alpha)$,
daher $S_2 D = (\alpha + \beta)$ und
$S_2 R = 2w = 2(\alpha + \beta)$,
also wieder die Gleichung 1).

Kommt der Spiegel ab aus der angenommenen Stellung, so tritt das Einfallsloth aus der Ebene SAB heraus, ist nun d'C dasselbe nach der Verstellung des Spiegels, so ist, da S seinen Ort nicht geändert hat, Sd' $= \beta'$ der gegenwärtige Einfallswinkel. Denken wir uns durch SCd' die Ebene Sd'PS_4 gelegt und die sämmtlichen Ebenen durch eine Kugel geschnitten, welche aus C mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben ist, so liegt der reflektirte Strahl in der letzt genannten Ebene, und wenn Sd' $=$ d'S_3, so ist CS_3 die Richtung des reflektirten Strahles und es ist $SS_3 = 2\beta'$.

Für den Spiegel AB ist die Verlängerung des Strahles S_3 C nämlich S_4 der Punkt von dem die Strahlen aufzufallen scheinen, und bei der senkrechten Stellung des Spiegels ist S_4 D der Einfallswinkel.

Wird jedoch das Einfallsloth CD, somit auch der Spiegel AB verstellt, und hat jenes sodann die Richtung CD', so ist S_4 D' der Einfallswinkel, der reflektirte Strahl liegt in der durch S_4CD' gelegten Ebene, diese ist S_3D'S_4 und wenn S_4D' $=$D'R' vorausgesetzt und mit w' bezeichnet wird, so ist S_4R' $= 2w'$, daher S_2R — S_4R', also $2w - 2w' = x$ der gesuchte Unterschied.

Betrachten wir in dem Dreiecke Sdd' die Seite dd' $= \gamma$, Sd $= \beta$, den Winkel Sdd' $=$ E als gegeben, und bezeichnen wir den Winkel dSd' mit m, so ist dieser und Sd' $= \beta'$ zu bestimmen; man hat

$$\cos.\ \beta' = \cos.\ \beta \cos.\ \gamma + \sin.\ \beta \sin.\ \gamma \cos.\ E \;.\;.\;.\;.\; 3),$$

$$\text{tang. } m = \frac{\sin.\ E \sin.\ \gamma}{\cos.\ \gamma \sin.\ \beta - \cos.\ \beta \sin.\ \gamma \cos.\ E} \;.\;.\;.\;.\; 4)\,{}^{*}).$$

In dem Dreiecke PDD' ist DP $= (\beta - \alpha)$; nehmen wir noch DD' $= \delta$, den Winkel PDD' $=$ E' als gegeben an, setzen PD' $=$ r, den Winkel DPD' $=$ n, so ist

*) Die Formel, nach welcher diese Gleichung aufgestellt ist, findet man in der Anmerkung Seite 97 abgeleitet.

$$\cos. r = \cos. (\beta - \alpha) \cos. \delta + \sin. (\beta - \alpha) \sin. \delta \cos. E' \; \ldots . 5),$$

$$\tang. n = \frac{\sin. E' \sin. \delta}{\cos. \delta \sin. (\beta - \alpha) - \cos. (\beta - \alpha) \sin. \delta \cos. E'} \; \ldots . 6).$$

In dem Dreiecke S_4PD' ist $PD' = r$, $S_4P = 2\beta'$, $S_4PD' = n + m$ und $S_4D' = w'$, daher

$$\cos. w' = \cos. 2\beta' \cos. r + \sin. 2\beta' \sin. r \cos. (n + m) \; \ldots . 7).$$

Wollte man noch den gegenwärtigen Neigungswinkel beider Spiegel bestimmen, was wir jedoch unterlassen, so setze man den Winkel $PS_4D' = s$, dann ist

$$\tang. s = \frac{\sin. (n + m) \sin. r}{\cos. r \sin. 2\beta' + \cos. 2\beta' \sin. r \cos. (n + m)} \; \ldots . 8),$$

und dann hat man, wenn noch $D'C$ nach Q' verlängert wird, in dem Dreiecke $S_3d'Q'$ die Stücke $S_3d' = \beta'$, $S_3Q' = w'$, $d'S_3Q' = s$, somit, wenn $d'Q' = \alpha'$ gesetzt wird

$$\cos. \alpha' = \cos. \beta' \cos. w' + \sin. \beta' \sin. w' \cos. s \; \ldots . 9),$$

in dieser Gleichung ist α' der Neigungswinkel beider Spiegel.

Wir wollen hier einige nach diesen Gleichungen gerechnete Beispiele beifügen, wobei β stets 20^0, $E = E'$ mit 85^0 angenommen worden sind.

α	γ	δ	x
60	+ 10′	+ 10′	+ 1′ 37″5
60	— 11′	— 10′	— 1′ 58″
0	— 10′	— 10′	— 2′ 26″6
0	+ 10′	— 10′	+ 5′ 9″
0	— 10′	+ 10′	— 5′ 8″
20	— 10′	+ 10′	— 2′ 5″2

Nun wäre w' Gleich. 7) durch die als gegeben angenommenen Größen α, β, γ, δ, E, E' auszudrücken, allein der vollständige Ausdruck wird sehr komplizirt; zu unserem Zwecke reicht es hin die Abhängigkeit des Fehlers von den eben genannten Größen nur durch einen genäherten Ausdruck ersichtlich zu machen, was allerdings angeht, weil γ und δ immer als kleine Bögen vorausgesetzt werden können.

Zu diesem Zwecke setzen wir $\beta - \beta' = u$, so bekommen wir aus Gleich. 3) nach einer leichten Reduktion, wobei $\sin. u = u$, $\cos. u = 1$, $\cos. \gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$, $\sin. \gamma = \gamma$ gesetzt worden ist, mit hinreichender Schärfe $u = \gamma \cos. E - \frac{\gamma^2}{2} \cotg. \beta$, somit ist

$$\beta' = \beta - \gamma'' \cos. E + \frac{\gamma''^2}{2} \sin. 1'' \cotg. \beta \; \ldots . 10).$$

Die Gleichung 4) übergeht bei dieser Voraussetzung in

$$m = \frac{\gamma'' \sin. E}{\sin. \beta} \; \ldots . 11).$$

Bei den Gleichungen 5) und 6) muß man jedoch auf den Umstand ob α größer oder kleiner als β ist, Rücksicht nehmen. Setzen wir im Allgemeinen $r - (\beta - \alpha) = u$, wobei unter $(\beta - \alpha)$ stets der positive Unterschied verstanden wird, so bekommen wir aus 5)

$$r = (\beta - \alpha) - \delta'' \cos. E' + \frac{\delta''^2 \sin. 1''}{2} \operatorname{cotg.} (\beta - \alpha) \; .\;.\;.\;.\; 12) \text{ oder}$$

$$r = (\alpha - \beta) + \delta'' \cos. E' + \frac{\delta''^2 \sin. 1''}{2} \operatorname{cotg.} (\alpha - \beta) \; .\;.\;.\;.\; 13)$$

die erste dieser Gleichungen wenn $\beta > \alpha$, die letztere wenn $\alpha > \beta$ ist.

Aus 6) erhalten wir

$$n = \frac{\delta'' \sin. E'}{\sin. (\beta - \alpha)} \; .\;.\;.\;.\; 14).$$

Diese Gleichung giebt jedoch das Resultat nur so lange mit hinreichender Schärfe als $(\beta - \alpha)$ wenigstens einen Grad beträgt; wird z. B. $\beta - \alpha = 1^0$, $\delta = 10'$, $E = 80^0$ angenommen, so folgt aus 6) $n = 56' \, 35''$, aus 14) $n = 56' 25'' 7$; wird dagegen $(\beta - \alpha) = 30', \delta = 10', E = 80^0$ gesetzt, so giebt die Gleichung 6) $n = 19^0 \, 12' \, 37'' 7$, jene 14) aber $n = 18^0 48' 31'' 3$, in diesem Falle differiren die Resultate schon um 24 Minuten.

Ist $\alpha > \beta$, so wird in 6) tang. n negativ, dann ist

$$n = 180 - \frac{\delta'' \sin. E'}{\sin. (\alpha - \beta)} \; .\;.\;.\;.\; 15);$$

endlich ist wegen 1) und 2)

$$w' = (\alpha + \beta) - \frac{x}{2} \; .\;.\;.\;.\; 16).$$

Ein Weg, auf welchem man für x einen genäherten Ausdruck erhalten kann, ist folgender:

In dem Falle als $\beta > \alpha$ ist, sind m und n sehr spitze Winkel, man kann somit $\cos. (m + n) = + 1$ setzen, dann übergeht die Gleichung 7) in $\cos. w' = \cos. (2\beta' - r)$, also ist $w' = 2\beta' - r$; werden in dieser Gleichung die Werthe aus 16), 10) und 12) gesetzt, so bekommt man

$$x'' = 4\gamma'' \cos. E - 2\delta'' \cos. E' - 2\gamma''^2 \sin. 1'' \operatorname{cotg.} \beta + 2\delta''^2 \sin. 1'' \operatorname{cotg.} (\beta - \alpha) \ldots I).$$

Ist jedoch $\alpha > \beta$, so ist Gleichung 15) n nahe an 180^0, m ein kleiner Winkel, man kann somit $\cos. (n + m) = - 1$ setzen, dann übergeht die Gleichung 7) in $\cos. w' = \cos. (2\beta' + r)$, somit ist $w' = 2\beta' + r$, und aus diesem Ausdrucke folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 16), 10) und 13) wieder die Gleichung I).

Für $\beta = \alpha$ wird x in der Gleichung I) unendlich groß, diesen Umstand werden wir später besprechen.

Will man jedoch auch den Einfluß der Winkel m und n berücksichtigen, so setze man die Werthe entweder aus 10), 11), 12), 14) und 16), oder aus 10), 11), 13), 15) und 16) in 7); bei der Entwicklung der Ausdrücke kann man offenbar wieder alle Glieder vernachlässigen, in welchen die Summe der Exponenten

von γ und δ mehr als zwei Einheiten beträgt, zugleich $\cos.\frac{x}{2} = 1$, $\sin.\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ setzen, so bekommt man für die Fälle β größer oder kleiner als α folgende Gleichung:

$$x'' = 4\gamma''\cos.E - 2\delta''\cos.E' + \frac{4\gamma''\delta''\sin.1''}{\sin.(\alpha+\beta)}\left\{\cos.(\alpha+\beta)\cos.E\cos.E' - \cos.\beta\sin.E\sin.E'\right\}$$

$$-2\gamma''^2\sin.1''\left\{2\,\mathrm{cotg.}(\alpha+\beta)\cos.^2E + \mathrm{cotg.}\beta - \frac{\sin.^2E\sin.(\alpha-\beta)\,\mathrm{cotg.}\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}\right\}$$

$$-\delta''^2\sin.1''\left\{\mathrm{cotg.}(\alpha+\beta)\cos.^2E' + \mathrm{cotg.}(\alpha-\beta) - \frac{\sin.^2E'\sin.2\beta}{s.(\alpha-\beta)s.(\alpha+\beta)}\right\}\ldots\ldots \text{II)}.$$

Wird $\alpha = 0$ gesetzt, so übergeht diese Gleichung in

$$x'' = 4\gamma''\cos.E - 2\delta''\cos.E' - \mathrm{cotg.}\beta\sin.1''\left\{4\gamma''^2 + 2\gamma''^2\cos.E + \delta''^2\sin.^2E' - 4\gamma''\delta''\cos.(E+E')\right\}\ldots\ldots \text{III)}.$$

Auch die Gleichung II) wird unbrauchbar, x wird nämlich unendlich groß, sobald $\alpha = \beta$ wird; für diesen Fall bekommen wir aus 5) $r = \delta$, aus 6) $n = 180 - E'$; β' und m behalten ihre Werthe; mit Rücksicht auf die Bedeutung von r und n folgt aus 7) noch eine der vorhergehenden analogen Reduktion

$$x'' = 4\gamma''\cos.E - 2\delta''\cos.E' + \sin.1''\left\{4\gamma''\delta''\,\mathrm{cotg.}\,2\beta\cos.E\cos.E' - \frac{2\gamma\delta''\sin.E''\sin.E'}{\sin.\beta}\right.$$

$$\left. - 2\gamma''^2\mathrm{cotg.}\beta - 4\gamma''^2\mathrm{cotg.}2\beta\cos.^2E - \delta''^2\mathrm{cotg.}\,2\beta\right\}\ldots\ldots \text{IV.}$$

Nun wird es erklärlich, warum der Weg, auf welchem wir die Gleichung I) erhalten haben, nicht auch auf den Fall $\alpha = \beta$ anwendbar ist.

Sind jedoch E und E' rechte Winkel, so werden die Ausdrücke viel einfacher, und II), III) und IV. übergeht der Ordnung nach in

$$x'' = -\frac{\sin.1''}{\sin.(\alpha+\beta)}\left\{4\gamma''\delta''\cos.\beta + 4\gamma''^2\cos.\alpha\cos.\beta + \delta''^2\cos.(\alpha+\beta)\right\}\ldots\ldots \text{V)}^{*)},$$

$$x'' = -\mathrm{cotg.}\beta\sin.1''\left\{2\gamma'' + \delta''\right\}^2\ldots\ldots \text{VI)},$$

$$x'' = -\frac{\sin.1''}{\sin.2\beta}\left\{4\gamma''\delta''\cos.\beta + 4\gamma''^2\cos.^2\beta + \delta''^2\cos.2\beta\right\}\ldots\ldots \text{VII)}.$$

Diese letzte Gleichung hätten wir auch aus V) erhalten können. Die Umstaltung der sämmtlichen Gleichungen für den Fall als γ oder δ Null oder nur eine der Größen E, E', 90^0 betragen sollte, unterliegt keiner Schwierigkeit.

Der Winkel β kann nicht Null sein, denn dann würde ein Strahl, dessen Bahn wir in der entgegengesetzten Richtung also vom Auge aus verfolgen wollen,

---

*) Diese Gleichung habe ich auf einem andern aber weitläufigeren Wege erhalten, wie in der ersten Auflage meiner praktischen Geometrie ersichtlich ist.

auf den halbbelegten Spiegel senkrecht auffallen und würde in sich selbst zurück, also nicht auf den zweiten Spiegel reflektirt werden; β ist überdies ein konstanter Winkel und beträgt bei einigen Instrumenten mit zwei Spiegeln 20 bis 30, bei andern nur 10 Grade; weil ferner $2\,w = 2\,(\alpha + \beta)$ immer kleiner als 180^0, also $\alpha + \beta < 90$ sein muß, so ist auch α ein spitzer Winkel, die möglichen Werthe desselben sind gewöhnlich von Null bis 60 Grade; in V) ist also $\cos.\,(\alpha + \beta)$ stets positiv. Endlich wollen wir noch erwähnen, daß γ und δ negativ zu betrachten sind, sobald das entsprechende Einfallsloth unterhalb der Limbusebenen liegt, und daß die ersten zwei Glieder in den Gleichungen I) bis IV) über die folgenden der Art vorherrschend sind, daß die Werthe der übrigen Glieder nahezu unberücksichtigt bleiben können; bei diesem Umstande also kann der Fehler sehr nahe als blos von γ, δ, E, E′ abhängig betrachtet und die Abhängigkeit nach diesen zwei Gliedern beurtheilt werden; unter dieser Voraussetzung folgt

1) daß so lange E und E′ spitze Winkel sind, der Fehler viel größer ausfällt, wenn γ und δ ungleich bezeichnet sind, und daß x mit γ eine gleiche, mit δ eine entgegengesetzte Bezeichnung erhält;

2) daß der absolute Werth des Fehlers nahe derselbe bleibt, so lange γ und δ gleich bezeichnet, also beide positiv oder beide negativ sind; dies bestätigen auch die oben angeführten Beispiele. Sind jedoch E und E′ rechte Winkel, so wird der Fehler bedeutend geringer, wie die nachfolgenden Beispiele, bei denen $\beta = 30^0$ angenommen worden ist, zeigen.

α	γ	δ	x
0	+ 10′	+ 10′	— 27″2
60	+ 10′	+ 10′	— 1″7
0	0	± 10′	— 3″0
0	± 10′	0	— 6″0

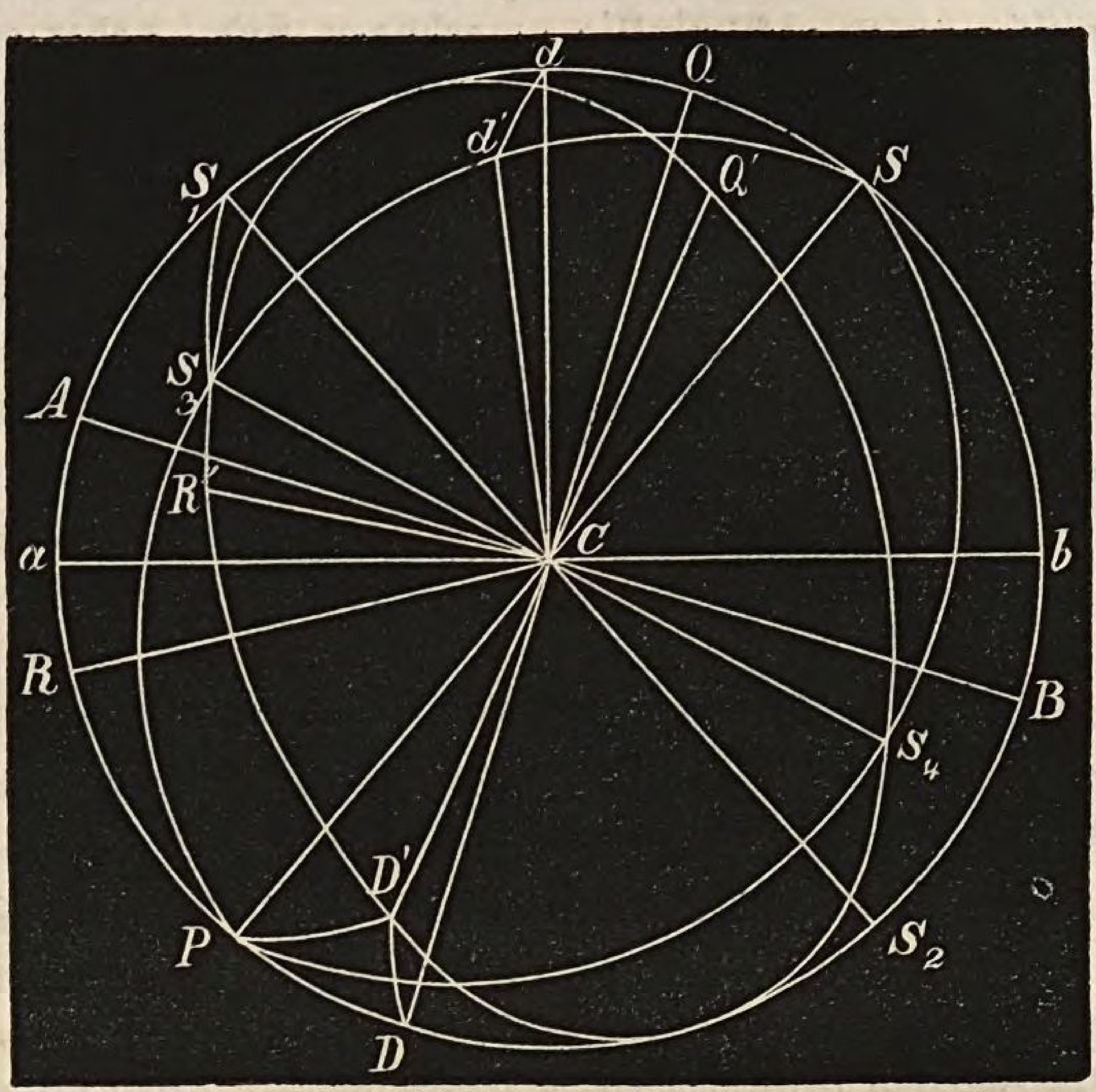
In dem Falle jedoch, wenn $E = E' = 90^0$ ist, verursacht die unrichtige Stellung des unbeweglichen Spiegels einen größeren Fehler als die des beweglichen; ferner haben gleich bezeichnete Werthe von γ und δ einen größeren Fehler zur Folge als ungleich bezeichnete. Bei gleichen aber ungleich bezeichneten Werthen von γ und δ kann in V) der Ausdruck innerhalb der Klammern auch Null werden, wenn nämlich $\cos.\,\alpha = \dfrac{20 \pm \text{tang.}\,\beta \sqrt{\text{tang.}^2\beta + 9}}{25 + \text{tang.}^2\,\beta}$ wird, läßt man $\beta = 30^0$ bedeuten, so ist $\alpha = 30^0\;47'\;4''$ oder auch $43^0\;57'\;29''$.

Wir haben nun noch den Fehler zu bestimmen, welcher durch die geneigte Stellung eine Spiegels entsteht.

Dieser Fehler beträgt, wie aus der Fig. 197 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) ersichtlich ist, $2\,\beta - 2\,\beta' = x \ldots 17)$,

woraus $\beta' = \beta - \dfrac{x}{2}$ folgt; wird dieser Werth in die Gleichung 3) substituirt und auf den Umstand Rücksicht genommen, daß γ ein kleiner Bogen ist, so bekommt man $x'' = 2\,\gamma''\,\cos.\,E - \gamma''^2\,\sin.\,1''\,\text{cotg.}\,\beta \ldots 18)$.

Fig. 197.



Da in diesem Falle der Spiegel beweglich ist, somit β alle möglichen Werthe von 0 bis 90^0 erhalten kann, so ist die Gleich. 18)

$$\text{für } \beta = o,$$

also für senkrecht auffallende Strahlen nicht brauchbar, x wird nämlich unendlich groß. In dem Falle als $\beta = o$ wird, folgt aus 4)

$$m = 180 - E,$$

wendet man nun auf das Dreieck Sdd' unter der Annahme, daß β nicht Null aber m bekannt ist, eine der Neper'schen Gleichungen, so bekommt man

$$\text{tg.}\left(\frac{\beta' - \gamma}{2}\right) = \frac{\sin.\left(\frac{E - m}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{E + m}{2}\right)} \text{ tg. } \tfrac{1}{2}\,\beta,$$

aber $\frac{E - m}{2} = -(90 - E)$, $\frac{E + m}{2} = 90$; $\beta = o$; E kann also welchen Werth immer haben, so ist $\text{tg.}\left(\frac{\beta' - \gamma}{2}\right) = o$ also $\beta' = \gamma$ und die Gleichung 17) übergeht in $x = -2\gamma \ldots 19)$.

Wird $E = 90^0$ so bekommt man 18) die folgende:

$$x'' = -\gamma''^{\,2} \sin. 1'' \text{ cotg. } \beta \ldots 20).$$

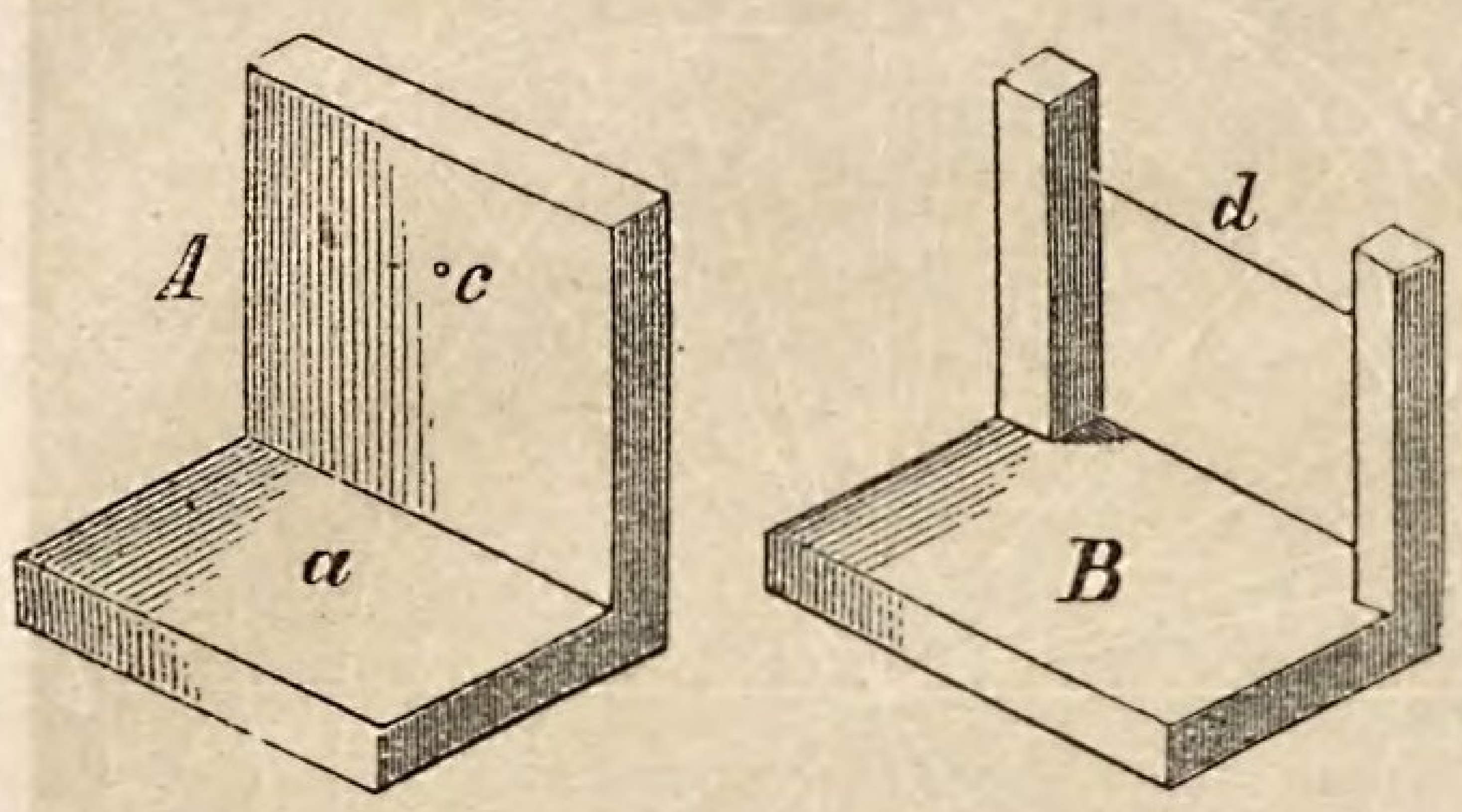
Dieser Ausdruck wird für $\beta = 90$ Null, was ganz natürlich ist, denn unter dieser Annahme folgt aus 3) $\beta' = 90$, daher aus 17) $x =$ Null.

Läßt man $E = 85^0$, $\gamma = 10'$, $\beta = 5^0$ bedeuten, so folgt aus 18) $x = 1'\,34''\,6$, bei demselben Werthe von E und γ aber $\beta = 80^0$ wird $x = 1'\,44''\,3$. Aus 20) folgt für $\beta = 5^0$, $\gamma = 10'$; $x = -20''$, und für $\beta = 80$ bei demselben γ, $x = -0''\,3$; aus 19) folgt für $\gamma = 10'$, $x = -20'$, dieser letztere Fehler ist also sehr bedeutend.

Mittel um zu untersuchen, ob ein Spiegel auf die Limbusebene senkrecht steht.

§. 175. Kommt bei einem Winkelmesser nur ein Spiegel vor, und will der Geometer untersuchen, ob dieser auf dem Limbus senkrecht ist, so kann er dasselbe Mittel anwenden, dessen sich der Mechaniker zu diesem Zwecke bedient.

Man verschafft sich zwei kleine messingene Diopter A und B Fig. 198, welche unten rechtwinklig umgebogen sind, daher auf jeder Ebene senkrecht stehen.



Das Diopter A hat bei c eine kleine Okularöffnung, jenes B ist in der vertikalen Ebene durchbrochen und trägt in gleicher Höhe mit c, also parallel mit der Grundfläche, einen dünnen Objektivfaden d.

Vor jedem Gebrauche der Diopter muß ihre Richtigkeit und zwar dadurch geprüft werden, daß man beide auf eine ebene Glasplatte mit ihren Rückseiten aneinander stellt, und nachsieht, ob diese Seiten genau aufeinander passen, ferner ob der Objektivfaden genau durch die Mitte der Okularöffnung geht.

Bei der Untersuchung der vertikalen Stellung des Spiegels legt man das Instrument auf einen Tisch, das Diopter A am Rande des Limbus, den Fuß a gegen den Spiegel gewendet, und dreht diesen so, daß der Beobachter bei dem Visiren von c auf dem Spiegel das Bild der Okularöffnung sieht.

Ist dies erreicht, so wird das Diopter B möglichst nahe an den Spiegel gesetzt, der Faden mit diesem nach dem Augenmaße parallel und abermals durch c auf den Spiegel gesehen. Erscheinen nun die Okularöffnung, der Objektivfaden und ihre Bilder genau in der Deckung, so ist der Spiegel auf die Visirlinie senkrecht, und da diese vermöge der Einrichtung der Diopter mit der Limbusebene parallel ist, so steht der Spiegel auf dem Limbus senkrecht.

Ist man von der Richtigkeit der Diopter überzeugt und bemerkt man ein Ausweichen der Bilder mit ihren Objekten, so ist der Spiegel gegen den Beobachter geneigt, wenn die Bilder der Okularöffnung und des Fadens unterhalb des letzteren erscheinen.

Nach der eingetretenen Deckung der Bilder mit ihren Objekten ist es nicht überflüssig, eine nochmalige Prüfung der Diopter und zwar auf die Art vorzunehmen, daß man beide verkehrt aufsetzt, und abermals vom Okulare gegen den Spiegel visirt; sollte nun ein Unterschied bemerkt werden, so ist der Faden mit dem Okulare nicht gleich hoch.

Eine schärfere Methode, die senkrechte Stellung des Spiegels zu prüfen, werden wir später (beim Spiegelsextanten) angeben.

Sind bei einem Instrumente zwei Glasspiegel, so wird vorerst der größere ganz belegte vertikal und sodann der kleinere mit ihm parallel gestellt; wie dies erkannt und durch welche Schrauben die Neigung der Spiegel geändert werden kann, wird bei jedem Instrumente besonders angegeben werden.

Untersuchung des Fehlers, wenn der Spiegel nicht centrisch gestellt ist.

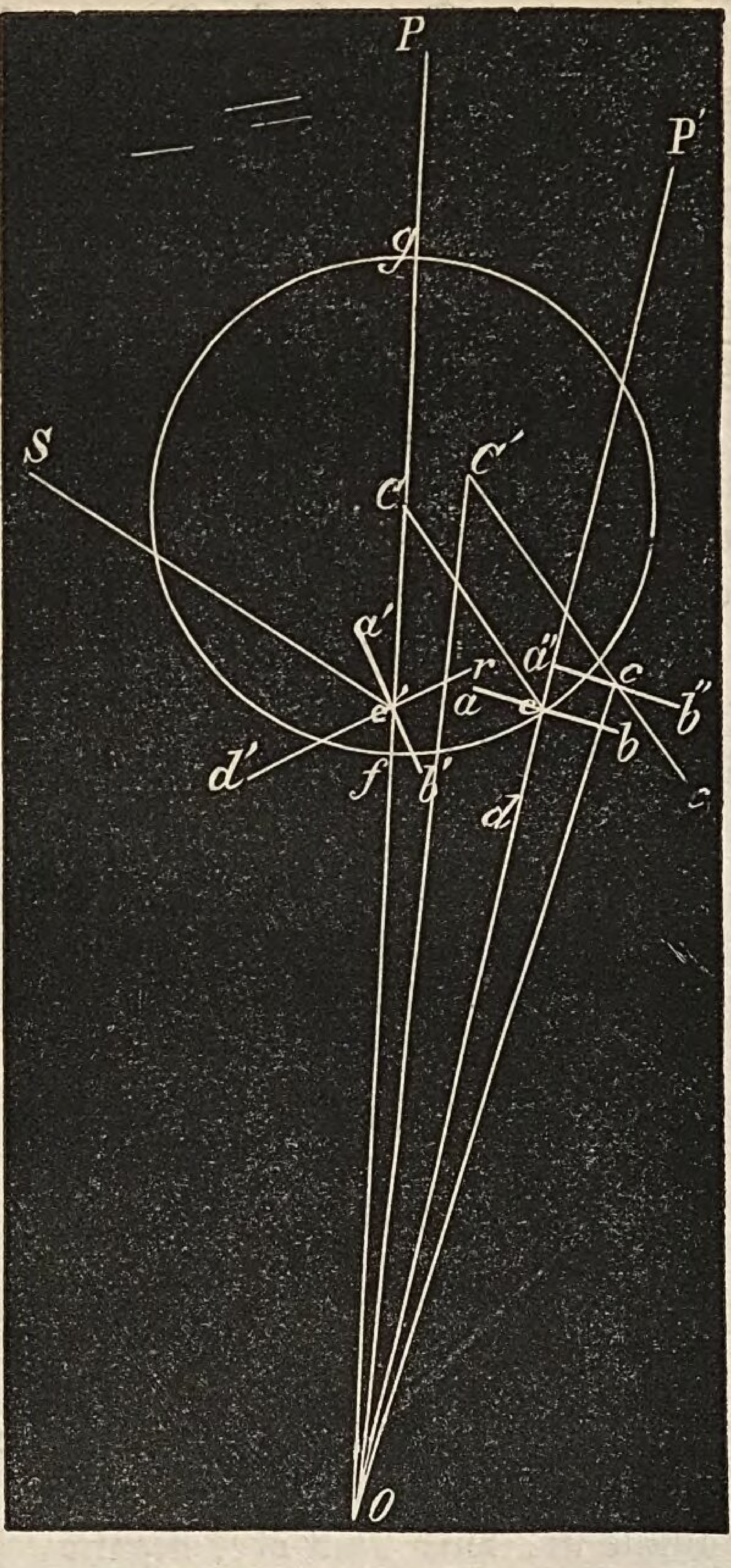
§. 176. Bei einem Instrumente, an welchem blos ein Spiegel vorkommt, ist von demselben nur die eine, gewöhnlich die untere Hälfte mit Amalgam belegt, die obere durchsichtig; auch ist am Glase seiner ganzen Höhe nach eine Linie,

sogenannte **Spiegellinie** gezogen, diese und ein Punkt des Okulars bestimmen die Visirebene.

Ist nun der Spiegel beweglich, so soll die Spiegellinie genau über dem Drehungspunkte der Alhidade stehen, ist dies nicht der Fall, so ist der Spiegel excentrisch gestellt, und der Einfluß dieser Excentricität nun zu untersuchen.

Es sei Fig. 199 C der Drehungspunkt der Alhidade und vor der Hand auch der Spiegellinie, O das Auge, so bleibt bei einer Drehung des Spiegels die Visirebene OC stets auf dasselbe Signal P eingestellt; sobald, wie es hier vorausgesetzt wird, der Spiegel auf dem Limbus senkrecht steht.

Die Gerade, welche einen Punkt des Okulars mit dem Drehungspunkte der Alhidade verbindet, wollen wir die Centrallinie nennen. Ist aber ab der Spiegel in der vertikalen Stellung, c die Spiegellinie, cd das Einfallsloth, der Spiegel somit auf die Linie OP′ senkrecht, so wird man von O über c nach P′ sehen, allein die Visur soll das Signal P treffen, man wird daher das ganze Instrument um den Augpunkt O so drehen, daß Oc in die Richtung OP kommt, wobei dann offenbar die Centrallinie außerhalb der Visirebene liegt.



Verbindet man C mit c, so ist Cca ein konstanter Winkel, welchen wir mit γ bezeichnen, und wenn nach OCc = n, COc = n′ Cc = e, OC = d gesetzt wird, so ist $n + n' = 90 - \gamma \ldots 1)$.

Ferner $\text{tang. } n' = \dfrac{e \sin. n}{d - e \cos. n}$ und weil e im Vergleiche mit d eine sehr kleine Größe ist, so kann e cos. n vernachlässigt werden, und weil n′ ein sehr kleiner Winkel ist, so ist mit hinreichender Schärfe

$$n' = \frac{e \sin. n}{d} \quad \ldots 2).$$

Wir haben erwähnt, daß γ ein konstanter Winkel ist, dies ist nur in sofern richtig, als er sich während der Drehung des Spiegels nicht ändert, aber er kann bei demselben Instrumente einen der zwischen + 90 und − 90 Graden liegenden Werth haben, ist nämlich + 90°, wenn die anfängliche Position des Spiegels in f; − 90° wenn sie in g ist, und Null wenn ab in der von C auf OP′ gefällten Senkrechten liegt. Ist $\gamma = 90°$, so ist Gleich. 1) $n + n' = o$, also n und n′ für sich Null; ist dagegen $\gamma = -90°$, so ist $n + n' = 180°$, aber dann beträgt, wie aus der Figur ersichtlich ist, n allein 180°, somit ist n′ wieder Null.

In dem Falle als $\gamma = o$ ist, beträgt $n + n' = 90^0$, das Dreieck, in welchem diese Winkel vorkommen, ist rechtwinklig, daher ist

$$n' = \frac{e}{d} \text{ und } \cos. n = \frac{e}{d}.$$

Will man aber noch ein zweites Signal z. B. S mit P in der Deckung sehen, so wird ab, daher auch das ganze Instrument und zwar so gedreht werden müssen, daß die Spiegellinie in der Richtung OP bleibt.

Es sei nun a'b' die Stellung des Spiegels, bei welcher von O über die Spiegellinie c' das Signal P direkt und S durch Reflektion ebenfalls in c' gesehen wird, so muß, weil Cca konstant ist, der Punkt C nach C' und zwar der Art verrückt werden, daß C'c'a' = Cca, C'c' = Cc bleibt, die ursprüngliche Position des Spiegels in Bezug auf die Centrallinie wird a"b", der Winkel OC'c" = n, C'Oc" = n' sein.

Das Einfallsloth dr hat während der Drehung den Winkel d'c'O zurückgelegt, man wird also diesen für den Winkel betrachten, um welchen der Spiegel gedreht worden ist, während es eigentlich c"C'c' ist; bezeichnet man c"C'c' mit α, d'c'O mit α', so ist $\alpha' - \alpha = x$ der durch die excentrische Stellung des Spiegels begangene Fehler.

Wird nach c'C'O = m, c'OC' = m' gesetzt, so ist α' = Pc'C' + C'c'r aber Pc'C' = m + m'; C'c'a' = γ, daher C'c'r = 90 − γ, somit $\alpha' = m + m' + 90 - \gamma$ und wegen 1) $\alpha' = m + m' + n + n'$; nun zeigt die Figur, daß $\alpha = m + n$ ist, somit ist $x = m' + n'$ . . . . 3).

Aus dem Dreiecke C'c'O findet man, wenn wieder auf den Umstand daß e und m' klein sind, Rücksicht genommen wird, $m' = \frac{e \sin. m}{d}$; wird dieser Werth und jener aus 2) in 3) substituirt, und die Summe in ein Produkt aufgelöst, so bekommt man für den in Sekunden ausgedrückten Fehler folgende Gleichung:

$$x'' = \frac{2e}{d \sin. 1''} \sin. \left(\frac{m+n}{2}\right) \cos. \left(\frac{m-n}{2}\right) \; . \; . \; . \; . \; 4).$$

Setzt man hier α statt $m + n$, somit $\alpha - m$ statt $m - n$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in $x'' = \frac{2e}{d \sin. 1''} \sin. \frac{\alpha}{2} \cos. \left(n - \frac{\alpha}{2}\right)$ und ist, das Zeichen ausgenommen mit jenem 3) §. 80 identisch.

Der Winkel n bestimmt die Position der Spiegellinie am Anfange der Bewegung, m dagegen die Position in jedem Momente während der Drehung; dieser Winkel ist nur so lange positiv, als die Spiegellinie auf der linken Seite der Centrallinie ist, wird Null oder negativ, je nachdem c entweder in der Centrallinie selbst oder auf der rechten Seite derselben liegt.

Vom theoretischen Standpunkte betrachtet kann der Ausdruck 4) Null werden (von $e = o$ oder $d = \infty$ abgesehen), wenn

$$1^{\text{stens}} \; \frac{m+n}{2} = o \text{ oder } 2^{\text{tens}} \; \frac{m-n}{2} = 90 \text{ ist.}$$

Die erste Annahme findet statt wenn entweder $m = o$ und $n = o$ ist, dann steht wie bereits erwähnt wurde die Spiegellinie in f; oder wenn $m = - n$ ist, dann steht die Spiegellinie in irgend einem Punkte der Peripherie gf, hat aber in keinem dieser Fälle eine Bewegung begonnen.

Aus der zweiten Annahme folgt $m = 180 + n$, die Spiegellinie hat zwar eine Bewegung gemacht, ist aber bei jedem Werthe von n in g stehen geblieben.

Der Fehler wird, e, m und n konstant vorausgesetzt, desto kleiner je größer d ist, aus diesem Grunde soll das Okulardiopter nicht zu nahe am Spiegel stehen und erhält bei demselben e und d den größten Werth, wenn $m = n$ und $\frac{m + n}{2} = 90$, also $m = n = 90^0$ wird, allein dies setzt voraus, daß ab eine beiderseits spiegelnde Ebene sei; in der Praxis kann jedoch $m = n$ höchstens 90^0, somit $\frac{m + n}{2}$ nur 45 Grade betragen, mit diesen Werthen $m = n$, $\frac{m + n}{2} = 45^0$ übergeht die Gleich. 4) in $x'' = 291702{\cdot}5 \frac{e}{d} \ldots . 5)$.

Der Ausdruck 4) kann auch negativ werden und zwar wenn m negativ und größer als n wird.

Lassen wir $e = 0{\cdot}02$, $d = 6$ Zoll, $\frac{m + n}{2} = 45^0$, $m = n$ bedeuten, so folgt aus 5) $x = 16' 12'' 3$, ist dagegen $n = o$, $m = 30^0$, $e = 0{\cdot}02$, $d = 6$ Zoll, so ist $x = 5' 43'' 8$, also immer sehr bedeutend, und da sowohl der Fehler wegen der Excentricität der Alhidade, als auch jener wegen der excentrischen Stellung des Spiegels in gleichem Sinne, nämlich beide positiv oder negativ auftreten können, so ist leicht beurtheilt, welchen Glauben die Angaben dergleichen Meßinstrumente, wenn sie nicht sehr fleißig konstruirt und rektificirt sind, verdienen.

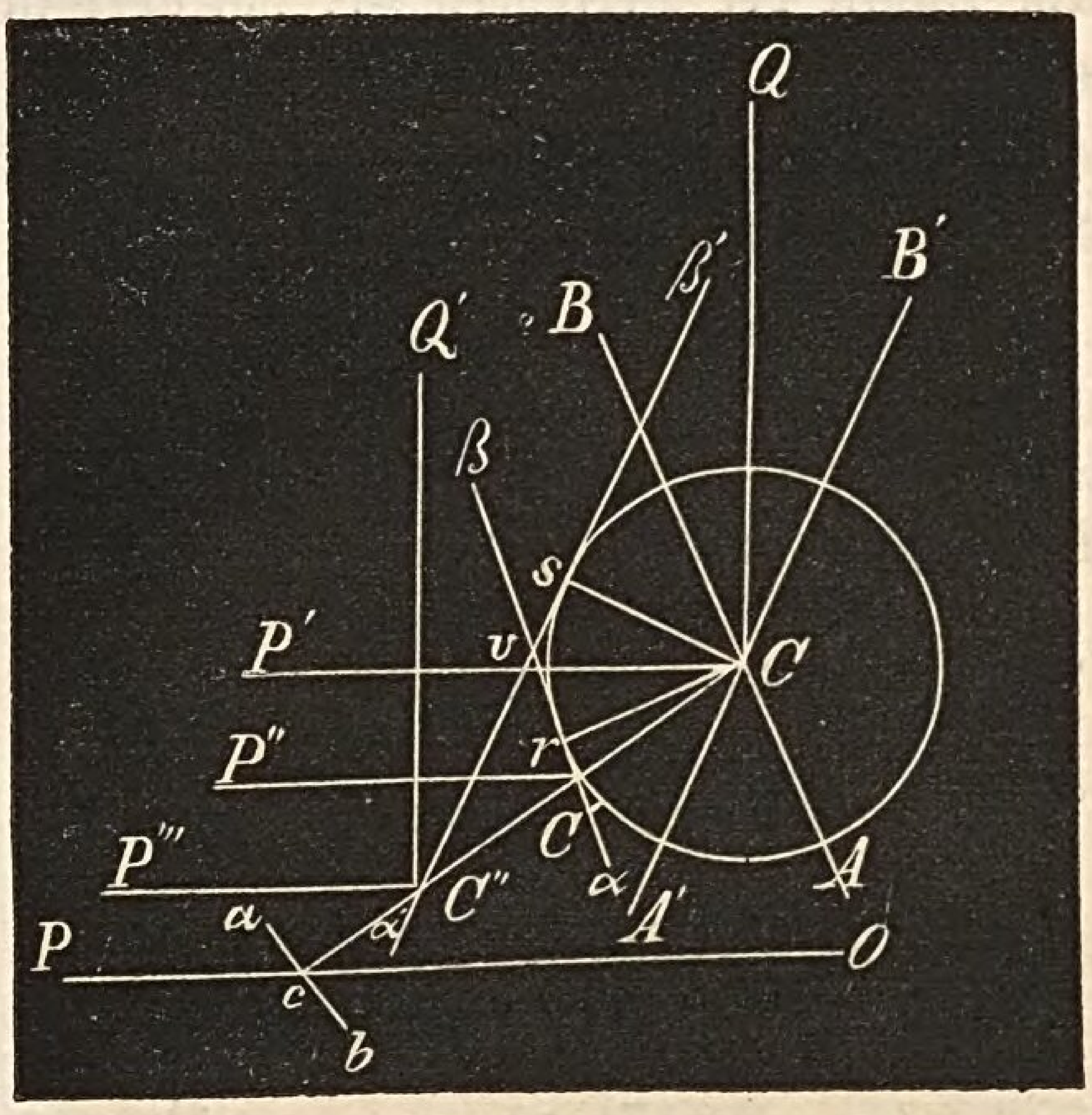
2. Beispiel. Lassen wir $e = 0{\cdot}02$, $d = 6$ Zoll, $n = o$, m einmal $+ 45^0$, das anderemal $- 45^0$ betragen, so ist $x = \pm 9' 8'' 3$.

In diesem Falle steht der Spiegel auf die Centrallinie senkrecht und zwar im Punkte f, die durch Reflex gesehenen Objekte bilden mit jener gleiche Winkel, aber ein mit diesem Fehler behaftetes Instrument giebt den einen um 9 Minuten zu groß, den andern um dieselbe Größe zu klein an.

Gäbe es ein sicheres Mittel, die Excentricität der Alhidade zu beseitigen, so wäre der Fehler wegen der excentrischen Stellung des Spiegels, wie das zweite Beispiel zeigt, leicht ausgemittelt; doch diese zwei Fehler sind sehr große Uebelstände bei solchen Instrumenten, die nur einen aber beweglichen Spiegel haben.

Ganz anders verhält sich die Sache, wenn bei einem Instrument zwei Glasspiegel vorkommen, weil dann an keinem von beiden eine Spiegellinie vorkommt.

Nehmen wir vorerst an, Fig. 200 sei ab der halbbelegte unbewegliche Spiegel, O das Auge, C der Drehungspunkt der Alhidade und des ganz belegten Spiegels AB; OP jener Strahl, der von P auf den unbelegten, dagegen P'C jener, der auf den zweiten Spiegel fällt, von da nach c und endlich nach O reflektirt wird; P so weit entfernt, daß die auf beide Spiegel fallende Strahlen als parallel betrachtet werden können; P'CQ der zu messende Winkel.



Bei der Voraussetzung PO parallel mit P'C hat AB um die Strahlen von P direkt und durch Reflexion in O zu erhalten, eine mit ab parallele Stellung und wird nach A'B' gedreht, wenn man die Strahlen von Q nach O leiten will.

Ist dagegen der bewegliche Spiegel excentrisch gestellt, und die Excentricität gleich dem Halbmesser Cr, so wird man um von P direkt und durch Reflexion in O Strahlen zu erhalten, dem Spiegel eine solche Lage ertheilen müssen, daß er mit ab parallel wird, diese Stellung sei $\alpha\beta$ und r der Brechungspunkt des Kreises, C' der Punkt, in welchem $\alpha\beta$ von cC getroffen wird.

In dieser Stellung wird der mit PO parallele Strahl P''C' nach O reflektirt, und es ist ganz dasselbe, als wenn der Spiegel $\alpha\beta$ in C selbst stünde.

Ist aber $\alpha\beta$ mit ab mithin auch mit AB einmal parallel, so wird er auch bei jeder Drehung der Alhidade mit AB parallel bleiben, daher ist $\alpha'\beta'$ parallel mit A'B' die zweite Stellung des erwähnten Spiegels in der Lage nämlich, wo die Strahlen von Q nach O geleitet werden; und ist C'' der Punkt, wo $\alpha'\beta'$ von cC getroffen wird, s der Berührungspunkt des Kreises, so wird der mit QC parallele Strahl Q'C'' nach O reflektirt, und wenn noch ein mit PO paralleler Strahl P'''C'' gezogen wird, der Winkel Q'C''P''' = QCP sein.

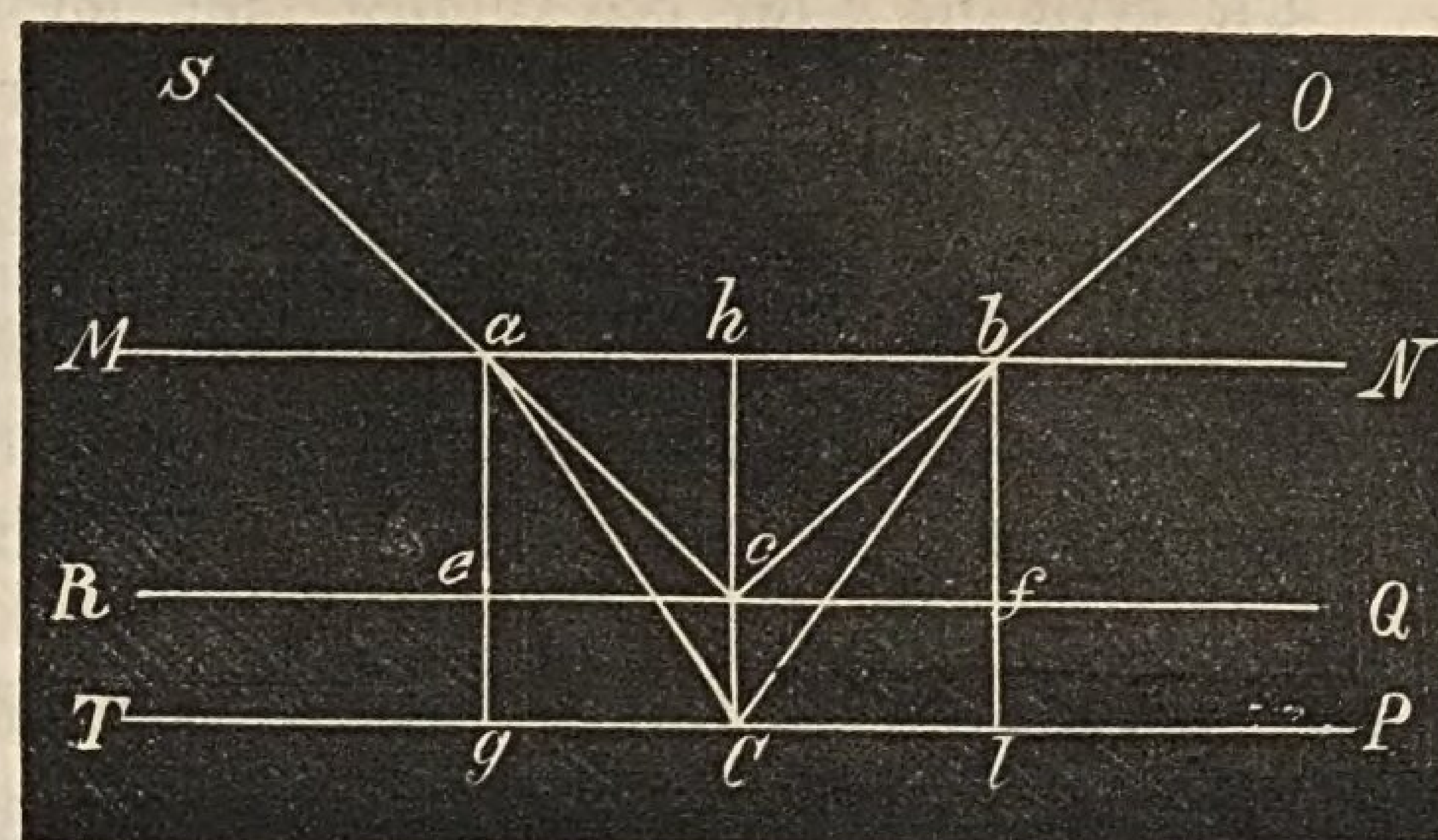
Die Alhidade hat während der Drehung den Winkel r Cs = m der Spiegel $\alpha v \alpha' = n$ zurückgelegt, allein weil Crv und Csv rechte Winkel sind, so ist $svr + m = 2R$ zugleich auch $svr + n = 2R$, daher $m = n$, also sind sowohl der Spiegel als die Alhidade um gleiche Winkel bewegt worden.

Dies Letztere hätten wir auch a priori sagen können, weil der Spiegel keine eigene von der Alhidade unabhängige Bewegung hat.

Wir sehen somit, daß eine excentrische Stellung des ganz belegten Spiegels, wenn dieser beweglich, der halbbelegte dagegen fix ist, keinen Fehler verursacht, und daß es somit nicht gleichgültig ist, ob bei einem Winkelmesser ein oder zwei Glasspiegel vorkommen.

Untersuchung des Fehlers, wenn die reflektirende Ebene keine konstante ist.

§. 177. Nachdem wie die vorhergehende Untersuchung gezeigt hat, die excentrische Stellung eines Spiegels einen bedeutenden Fehler verursachen kann, so ist nothwendig auch die Frage aufzuwerfen, ob denn die rückwärtige belegte Ebene eines Glases auch als die reflektirende zu betrachten sei. Zu diesem Zwecke nehmen wir an Fig. 201 sei MNTP der Durchschnitt eines von parallelen Ebenen begränzten Spiegels, mit der Einfallsebene, TP die belegte Seite, Sa ein auffallender Strahl, der nach aC gebrochen in C reflektirt, bei b aus dem Glase tritt und sodann die Richtung bO nimmt, in O sei das Auge.



Wird bO verlängert bis die ursprüngliche aber ebenfalls verlängerte Richtung des Strahles Sa in c geschnitten wird, so sieht das Auge den von S kommenden Strahl in der Richtung Oc, somit ist eine durch c mit MN parallel gelegte Ebene QR als die eigentliche Reflexionsebene zu betrachten.

Um nun den Abstand des Punktes c von der Ebene MN zu bestimmen, fällen wir von c auf MN die Senkrechte ch, und errichten in a und b die Einfallslothe ag und bl; wird ferner die Dicke des Glases ag = bl = d gesetzt, so ist leicht die Gleichheit der Linien gC, Cl, ah, hb nachgewiesen, also geht die Verlängerung von hc durch C.

Wird der Einfallswinkel gac $= \alpha$, der Brechungswinkel Cag $= \beta$, $\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta} = n$ gesetzt, so folgt aus dem Dreiecke aCc; $aC = \frac{ac \sin.\alpha}{\sin.\beta} = n.\,ac$; aus dem Dreiecke aCh, $aC = \frac{d}{\cos.\beta}$ somit aus beiden Gleichungen $ac = \frac{d}{n \cos.\beta}$; mit diesem Werthe findet man aus dem Dreiecke ach: $ch = \frac{d \cos.\alpha}{n \cos.\beta}$, und weil

$\sin.\beta = \frac{\sin.\alpha}{n}$ daher $\cos.\beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin.^2\alpha}}{n}$ ist, so folgt

$$ch = \frac{d \cos.\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin.^2\alpha}} \quad \ldots . \; 1).$$

Für gemeines Glas, aus welchem gewöhnlich die Spiegel bestehen, ist

$$n = \tfrac{3}{2} \text{ daher } ch = \frac{2\,d \cos.\alpha}{\sqrt{9 - 4 \sin.^2\alpha}} \quad \ldots . \; 2).$$

Die Entfernung der wahren spiegelnden Ebene von der belegten ist somit veränderlich, weil sie von dem Einfallswinkel abhängt; ch erreicht das Maximum, somit cC das Minimum, wenn entweder $\alpha = o$ also der Strahl senkrecht auffällt, oder wenn $n = 1$ wird, und da das letztere nicht eintreffen kann, so tritt das Maximum nur bei $\alpha = o$ ein, dann folgt aus 2) $ch = \frac{2}{3}$ d somit $cC = \frac{1}{3}$ d, für $\alpha = 90$ wird $ch = o$, der Punkt c liegt dann in der Ebene MN.

Aus dieser Untersuchung folgt, daß in dem Falle als bei einem Instrumente nur ein Spiegel vorkommt, dieser aus einem sehr dünnen Glase geschnitten sein soll.

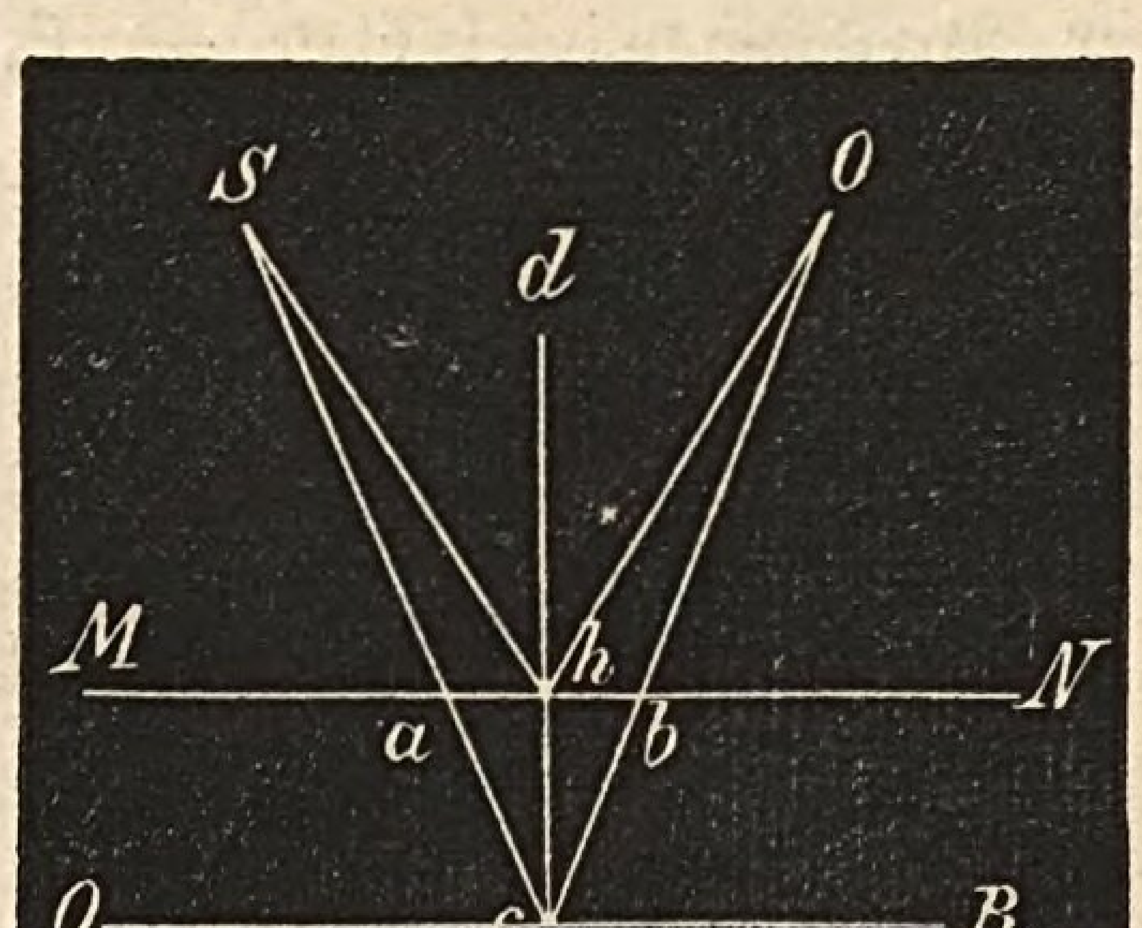
Die geringste Dicke des Glases fand ich bei einem Spiegelinstrumente mit 0·06 Zoll, bei diesem variirt der Abstand der Spiegelebene von der vorderen zwischen Null und 0.04 Zoll, je nachdem $\alpha = 90$ oder Null ist.

Der günstige Umstand, daß wenn $\alpha = o$ somit ch seinen größten Werth erreicht, der Spiegel auf die Visur senkrecht steht, somit der auffallende Strahl jedenfalls in sich selbst zurück reflektirt wird, und bei einer Drehung des Spiegels ch abnimmt, mildert zwar den Fehler, beseitigt ihn aber keineswegs, denn nehmen wir an, die Dicke des Glases sei 0·06 Zoll, so ist bei einem Einfallswinkel von 80^0, $ch = 0·00368$ Zoll; wird in der Gleich. 4) §. 176 $n = o$, $m = 80^0$, $d = 6$, $e = 0·00368$ Zoll gesetzt, so ist $x = 2'4''$, also immer bedeutend.

Bei jenen Instrumenten mit zwei Spiegeln hat offenbar der eben besprochene Fehler keinen Einfluß, hier können und werden dickere Gläser genommen, schon deshalb damit sie während des Schleifens nicht brechen, bei besseren Instrumenten kommen selbst 0·13 Zoll dicke Gläser vor.

Die Erscheinung der doppelten Bilder eines und desselben Gegenstandes, von der bereits im §. 172 die Rede war, kann aber bei einem parallel begränzten Glase auch vorkommen.

Denn wenn Fig. 202 MN die vordere, QR die reflektirende Ebene eines Spiegels und S der Punkt ist, von dem die Strahlen Sh, Sc auffallen, so werden sich diese nach der Reflexion in einem Punkte O vereinigen, der vom Spiegel mit S gleiche Entfernung hat; befindet sich in O das Auge, so wird dieses den Punkt S in der Richtung Oh und Oc also doppelt sehen.



Nach dem oben Bewiesenen ist $hcO = \alpha$,

$$ch = \frac{d \cos. \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}},$$ setzen wir nach $Sh = hO = D$ und den Winkel $hOc = x$,

so ist $$\sin. x = \frac{d \sin. \alpha \cos. \alpha}{D \sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}} \quad \ldots . \; 2).$$

Dieser Ausdruck wird Null wenn entweder $\alpha = o$ oder $\alpha = 90^0$ wird, er muß also zwischen diesen beiden Werthen das Maximum erreichen. Der Werth von α, welcher sin. x zu einem Größten macht, ist durch folgende Gleichung gegeben:

$\sin.^4 \alpha - 2 n^2 \sin.^2 \alpha = - n^2$; von den 4 Wurzeln dieser Gleichung ist nur eine, nämlich $\sin. \alpha = + n \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$ brauchbar, wird $n = \frac{3}{2}$ gesetzt, so ist $\sin. \alpha = + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3}}$ und $\alpha = 49^0 11' 40'' 7$.

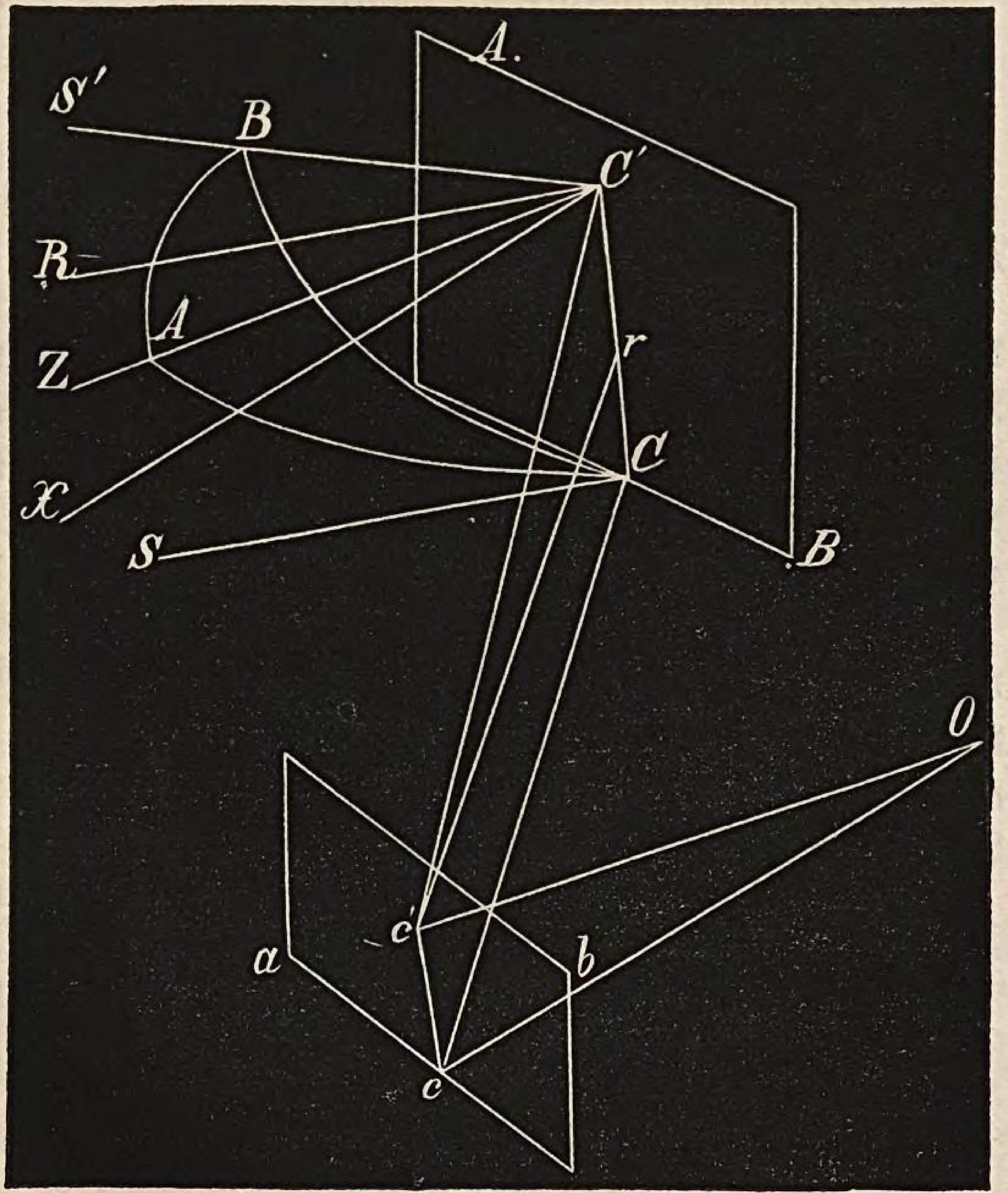
Der Winkel x, unter welchem die Bilder erscheinen, hängt bei parallel begränztem Glase von der Entfernung des Objektes ab, und wird Null, wenn D unendlich groß ist, d. h. die beiden Bilder decken sich.

Aus 2 folgt $D = \frac{d \sin. 2 \alpha}{2 \sin. x \sqrt{n^2 - \sin.^2 \alpha}}$ . . . . 3).

Lassen wir hier $d = 0{\cdot}1$ Zoll, $\alpha = 49^0 11' 40'' 7$, $x = 5''$ bedeuten, so ist $D = 21{\cdot}9$ Klftr.

Untersuchung des Fehlers, wenn die Strahlen nicht parallel mit der Limbusebene in das Auge kommen.

§. 178. In der Fig. 203 sind ab, AB zwei auf dem Limbus senkrecht gestellte Spiegel, S ein Punkt in der Limbusebene, von dem der Strahl SC auf AB kommt, von da nach c und endlich in das Auge O reflektirt werde, der Winkel, welcher die beiden Strahlen Sc und cO bilden, sei α.



In dem Falle als die gegen das Auge kommenden Strahlen durch eine Sammellinse zu einem Bilde vereinigt werden, muß cO die Achse des Fernrohres sein.

Nehmen wir aber an, die Achse des Rohres sei Oc', diese mit Oc in einer vertikalen Ebene, O sei derjenige Punkt, von dem ein Strahl Oc' auf ab fällt, der Winkel

$c'Oc = \gamma$;

so wird der reflektirte Strahl in einer durch cC gelegten vertikalen Ebene liegen, mit cC oder mit der parallelen Linie c'r wieder den Winkel γ bilden,

den Spiegel AB in einem Punkte C′ treffen und von da nach S′ reflektirt werden; auch wird S′C′ mit SC in einer vertikalen Ebene liegen und gegen die mit SC parallele C′R unter dem Winkel γ geneigt sein.

So wie nun ein Strahl von O über c′, C′ nach S′ gelangt ist, so wird auch umgekehrt bei der geneigten Lage des Fernrohrs das Auge direkt von einem Punkte in der Richtung Oc′ und gleichzeitig von S′ durch Reflex Strahlen erhalten, man wird somit den Winkel, welchen die Strahlen S′C′ mit c′O bilden, zu messen wähnen, während das Instrument jenen zwischen Sc und cO giebt.

Ziehen wir C′z mit Oc′; C′x mit Oc parallel, so ist $xC'z = RC'S' = \gamma$, CC′zx liegen in einer, CC′RS′ in einer zweiten Ebene, auch ist $RC'x = \alpha$; setzen wir $S'Cz = \alpha'$ so ist $\alpha' - \alpha = x$ der durch eine geneigte Stellung des Rohres verursachte Fehler.

Denken wir uns aus C′ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser Eins eine Kugel beschrieben, so bekommen wir zwischen den Ebenen CC′z CC′S′ zC′S′ ein Dreieck ABC, in welchem die Seite $AC = BC = 90 + \gamma$, der Winkel $BCA = \alpha$ bekannt, und $BA = \alpha'$ zu bestimmen ist. Mit Rücksicht daß die Seiten mehr als 90^0 betragen, findet man $\cos. \alpha' = \sin.^2 \gamma + \cos.^2 \gamma \cos. \alpha$ oder wenn hier $\alpha' = \alpha - x$ substituirt und weil γ so auch x sehr klein sind, $\cos. x = 1$, $\sin. x = x$, $\sin. \gamma = \gamma$ gesetzt wird, so bekommt man

$$x'' = \gamma''^2 \sin. 1'' \text{ tang. } \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots 1).$$

Der richtige Winkel ist somit

$$\alpha' = \alpha - \gamma''^2 \sin. 1'' \text{ tg. } \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots 2).$$

Ist also das Rohr nach auf- oder abwärts geneigt, so werden alle Winkel zu groß gemessen.

Lassen wir $\gamma = 10'$, $\alpha = 120^0$ bedeuten, so ist $x = 3''$, also unbedeutend. Aus diesem Grunde ist mit Ausnahme weniger Instrumente auf die Korrektion dieses Fehlers kein Bedacht genommen worden, wie aber die Untersuchung, ob das Rohr mit dem Limbus parallel ist, einzuleiten und wenn eine Korrektion nöthig wird, wie diese auszuführen ist, wird später (beim Spiegelsextanten) angegeben werden.

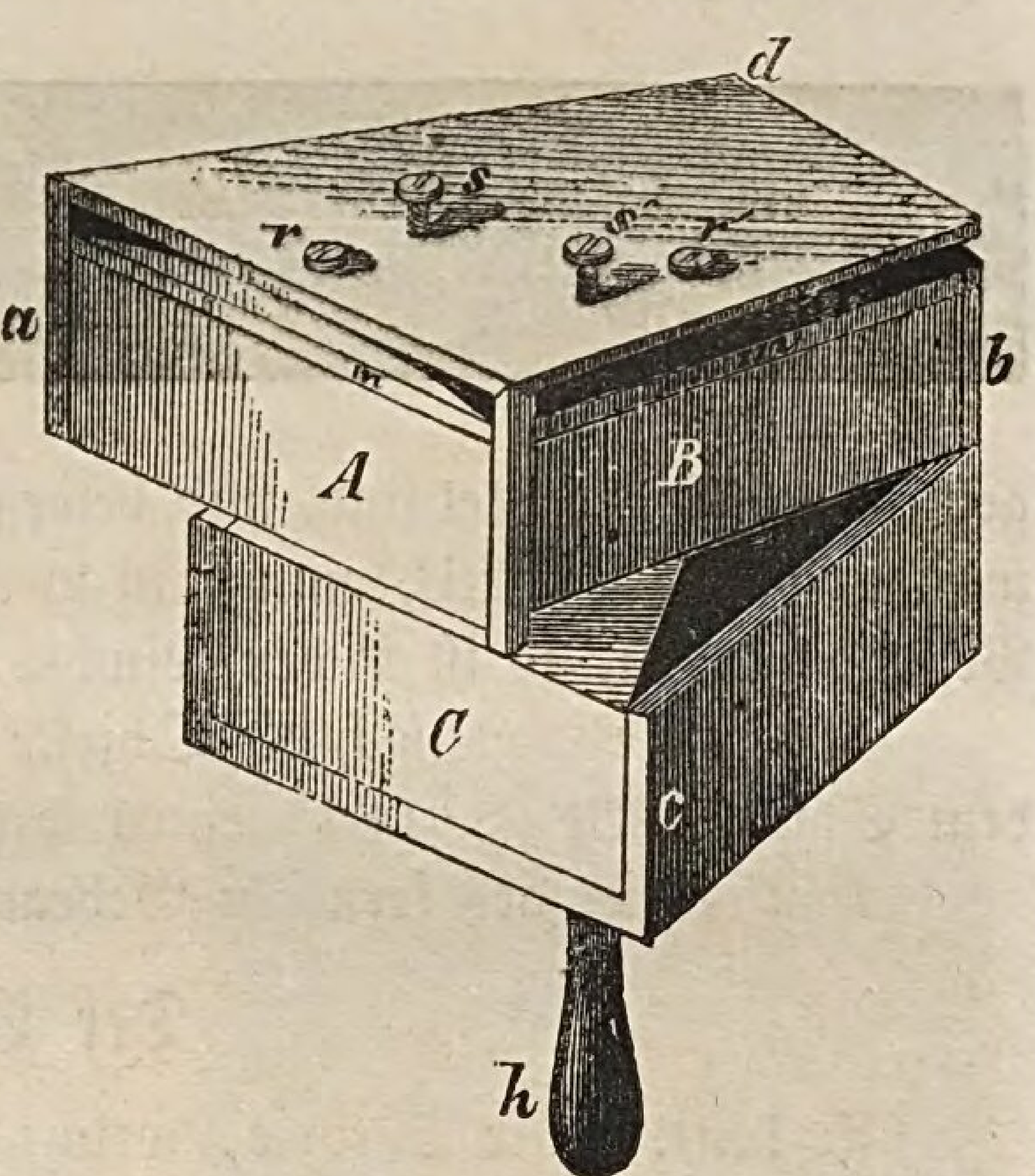
Bei jenen Instrumenten mit einem Spiegel bekommt man den Fehler wegen der geneigten Stellung des Fernrohrs durch dieselbe Gleichung 1) ausgedrückt; denn verlegt man den Augpunkt von O nach c′, so hat man nur einen Spiegel, das sphärische Dreieck bleibt jedoch dasselbe, nur bedeuten dann α und α' die Winkel zwischen den direkt und durch Reflexion in der Deckung gesehenen Objekten.

Fünfter Abschnitt.

Beschreibung, Rektifikation und Gebrauch der Winkelinstrumente mit Spiegeln.

Das Prismenkreuz *).

§. 179. Das kleine Instrument dient Ordynaten zu errichten oder zu fällen, hauptsächlich aber dazu, in den durch zwei unzugängliche Objekte bestimmten Graden einen Punkt einzuschalten, und besteht Fig. 204 aus zwei übereinander liegenden, rechtwinkligen, gleichschenkligen Glasprismen; bei diesem Instrumente kommen also die Sätze §. 158 bis 161 in Anwendung.



Bei dem oberen Glasprisma sind A, B die Kathetenflächen, bei dem unteren ist C die eine, die andere ist nicht sichtbar, die Hypothenusenflächen liegen somit bei dem oberen Prisma zwischen den Linien a und b, bei dem unteren zwischen c und der durch d gehenden Vertikalen.

Die Prismen berühren sich fast, die Kathetenflächen A, C sind in einer Ebene, daher die Hipothenusen unter einem rechten Winkel gegeneinander geneigt; die messingene Fassung ist an den Kathetenflächen ausgeschnitten, das untere Prisma in jene eingekittet, das obere dagegen an ein messingenes gewölbtes Plättchen m befestiget, dieses an die obere Fläche der Fassung durch die Schräubchen rr' angeschraubt, die Schräubchen ss' drücken nur auf das Plättchen und alle viere sind zur Rektifikation des Instrumentes angebracht; h ist die Handhabe.

Wie aus der Theorie bekannt ist, sind die Hypothenusenflächen als spiegelnde Ebenen zu betrachten, und müssen auf eine und dieselbe dritte Ebene zugleich senkrecht stehen. Um dies zu prüfen, braucht man nur zwei parallele Objekte, z. B.

---

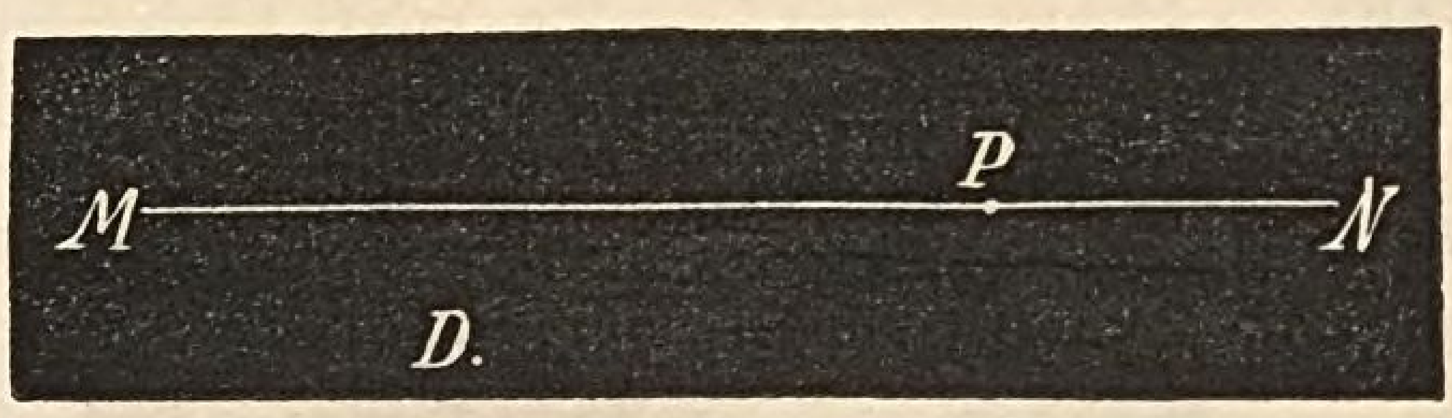
*) Vollständiger als hier findet man das Instrument vom Erfinder selbst in der Schrift: Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes von Prof. Bauernfeind abgehandelt. München, Palm's Hofbuchhandlung. 1851.

zwei vertikale Stäbe, Mauerkanten, Blitzableiterstangen durch die Kantenflächen A, C zu betrachten und sehen ob auch die Bilder vertikal also parallel sind oder nicht.

Bilden diese einen Winkel miteinander, so ist die Ergänzung desselben auf 180⁰ der Fehler, welcher in der Lage der Hypothenusenflächen stattfindet, und muß durch die Schräubchen ss' weggeschafft werden, nachdem. vorher die andern rr' etwas gelüftet worden sind.

Wesentlicher als diese Prüfung ist die des Parallelismus der Kathetenebenen. Man überzeugt sich davon, indem man drei Stäbe in ziemlicher Entfernung in gerader Linie genau vertikal stellt, das Instrument über den mittleren Stab hält und nachsieht, ob sich die Bilder der beiden äußeren Stäbe decken. Ist dies der Fall, und gehen die Bilder auch nicht auseinander, wenn man das Instrument an dem bezeichneten Standpunkte um seine Achse dreht, so sind die Kathetenebenen parallel, folglich die Hypothenusenebenen senkrecht aufeinander. Decken sich aber die Bilder nicht, so lüftet man alle 4 Schräubchen und rückt das Plättchen m durch ein sanftes Drücken an den Köpfen der Schrauben rr', welche deshalb in der oberen Gehäusplatte Schlitze haben.

Soll nun Fig. 205 zwischen zwei gegebenen unzugänglichen Punkten MN ein dritter P in derselben geraden Linie bestimmt werden, so stellt man sich in einem beliebigen Punkte D auf, haltet das Instrument so, daß die beiden Okularebenen AC gegen das Auge, die anderen Kathetenebenen gegen M und N gerichtet sind, und bewege sich so lange vorwärts oder rückwärts, bis man an einen Punkt P kommt, in welchem sich die Bilder von M und N in beiden Prismen decken, so ist P der gesuchte Punkt.

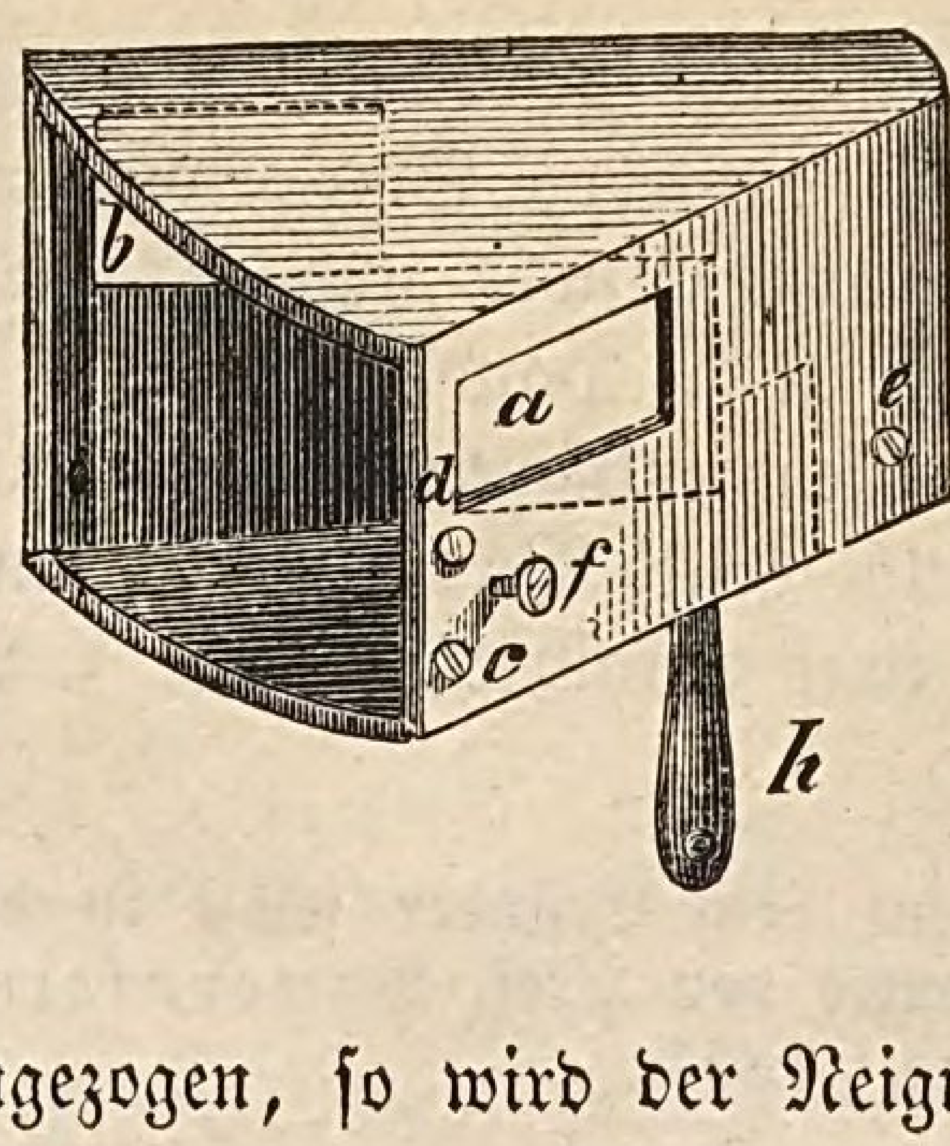


So lange man noch die Objekte MN vor sich hat, werden ihre Bilder mit dem Standpunkte (§. 161) einen spitzen Winkel bilden.

Hinsichtlich des ferneren Gebrauches müssen wir auf das Werk selbst weisen.

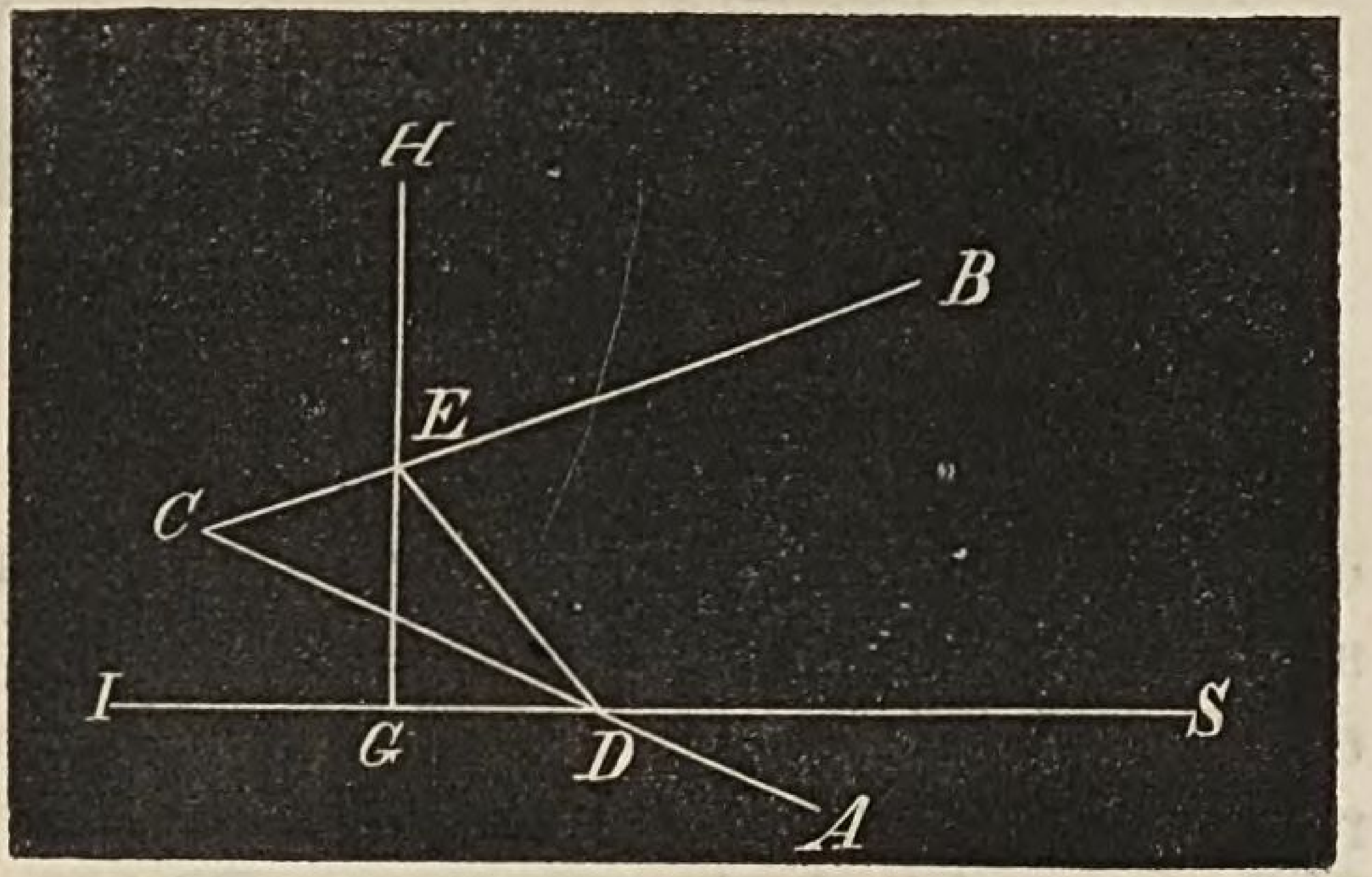
Der Winkelspiegel.

§. 180. Die Theorie, welche diesem Instrumente zu Grunde liegt, ist in §. 163 enthalten. In einem messingenen Gehäuse, Fig. 206, das nach einer Seite ganz offen ist, sind zwei kleine Spiegel, jeder 1" lang und $\frac{3}{4}$" breit, mit den spiegelnden Ebenen gegeneinander unter einen Winkel von 45 Graden geneigt; in den auf die Grundebene senkrecht stehenden Seitenflächen des Gehäuses sind oberhalb der Spiegel zwei rechteckige Oeffnungen a, b ausgeschnitten, c, d, e sind Schräubchen, mit denen der eine Spiegel an das Gehäuse befestigt ist, werden diese gelüftet, jene f, welche sich gegen die Fassung des Spiegels stemmt, angezogen, so wird der Neigungswinkel der Spiegel geändert.



Wie aus der Theorie bekannt ist, beträgt der Winkel zwischen zwei Objekten, von denen das eine durch die Oeffnungen direkt, das andere durch Reflex in dem, dem Auge gegenüber liegenden Spiegel aber mit dem ersten Objekte in einer geraden Linie erscheint, 90 Grade, das Auge des Beobachters ist der Scheitel dieses Winkels.

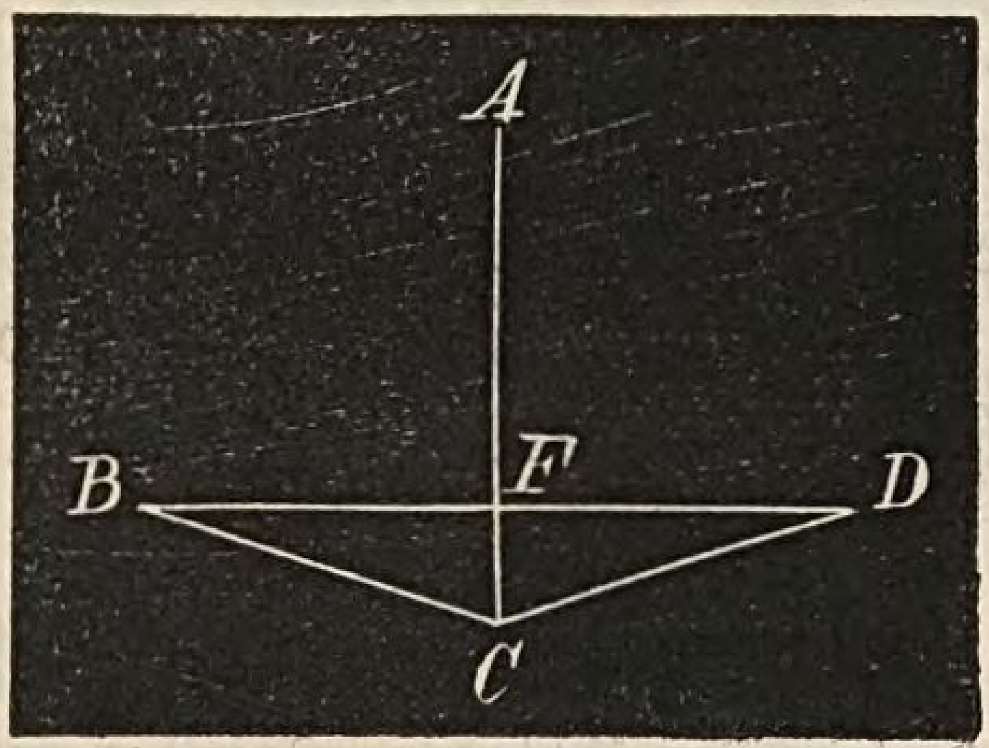
Beim Gebrauche legt man den Winkelspiegel mit dem einen Ausschnitte nahe an das Auge, die offene Seite gegen das Ende der durch einen Stab S Fig. 207 abgesteckten Linie, die Handhabe über den Fußpunkt G der zu errichtenden Senkrechten und wendet das Instrument so weit, bis man das Bild von S in dem gegenüber liegenden Spiegel sieht.



Nun läßt man einen zweiten Stab H vertikal und in jenem Punkte stellen, wo dieser mit dem Bilde S in einer geraden Linie erscheint. Ist das Instrument richtig konstruirt, so steht HG auf SG senkrecht.

Soll dagegen von H auf SI eine senkrechte gefällt werden, so muß durch Versuche, indem man in den Geraden SI vorwärts oder rückwärts geht, jener Punkt G ausgemittelt werden, von welchem aus direkt H und S durch Reflexionin einer geraden Linie erscheinen, dann liegt der Fußpunkt der Senkrechten unterhalb der Spiegel.

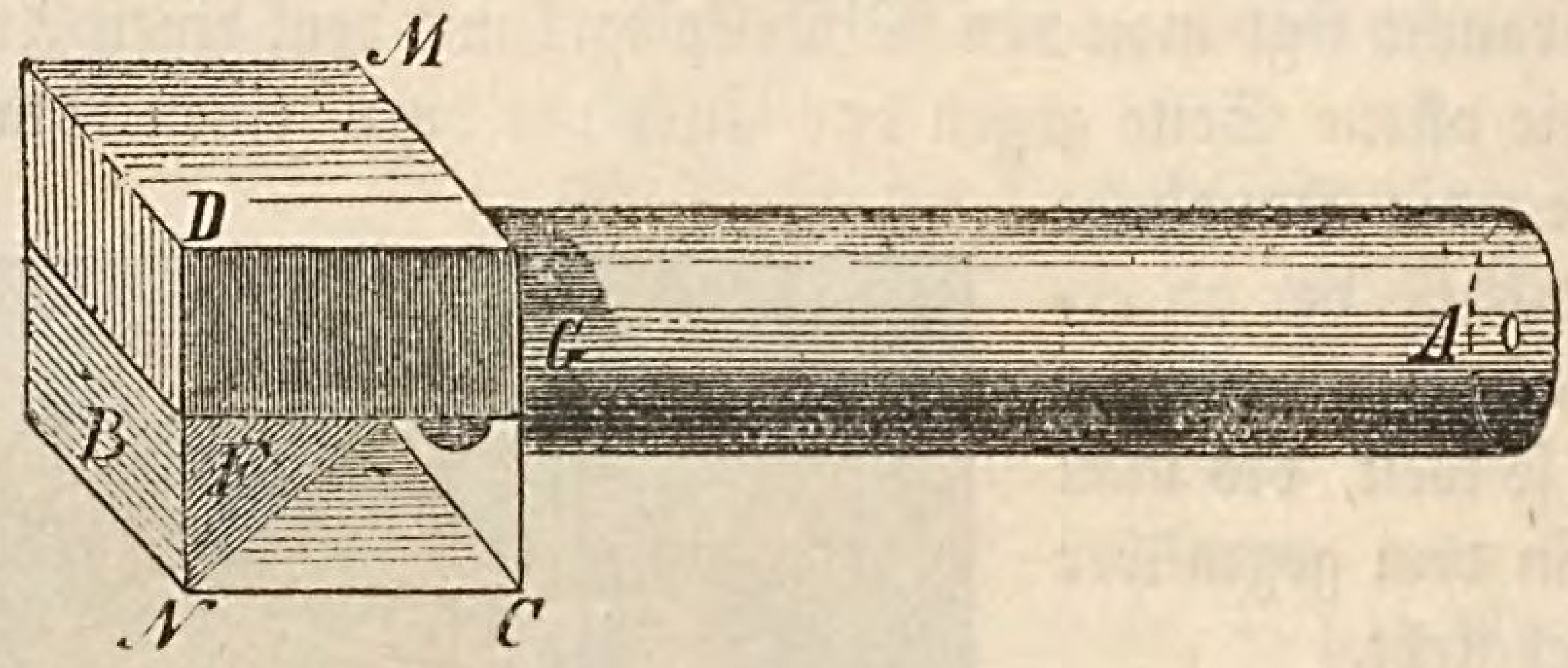
Die Größe des Neigungswinkels der Spiegel zu untersuchen, lasse man Fig. 208 einen Absteckstab A vertikal stellen, den man direkt anvisirt, wobei das Instrument horizontal gehalten werden muß, und läßt einen zweiten Stab B so stellen, daß er mit A in dem Spiegel in einer geraden Linie erscheint; hierauf wendet man das Instrument mit der offenen Seite so, daß man durch die Oeffnung abermals A sieht und läßt auf der anderen Seite einen Stab D in gleicher Entfernung mit B, zudem noch so stellen, daß er mit A in dem Spiegel als eine gerade Linie erscheint. Stellt man endlich unterhalb der Mitte der Spiegel einen StabC, so müssen, wenn das Instrument einen rechten Winkel angiebt, B, C, D in einer Ebene liegen. Bilden diese drei Punkte ein Dreieck, so suche man den Durchschnitt F zwischen DB und AC, dann sind, weil CB = CD, CF gemeinschaftlich und der Winkel BCF = FCD ist, die Dreiecke BCF und FCD kongruent, daher BFC = CFD = 90 Grade.



Stellt man sich also mit dem Instrumente in F auf, und neigt man durch die Schraube f, während die drei übrigen Schräubchen etwas gelüftet sind, den einen Spiegel so, daß das eine Signal, z. B. B mit A in einer vertikalen Linie erscheint, so ist das Instrument hinsichtlich der Neigung der Spiegel rektifizirt; zur Kontrolle untersuche man auch das Uebereintreffen der Stäbe A und D.

Das Katoptrische Winkelrohr.

§. 181. Dieses Instrument ist auf den ersten Satz §. 157 gegründet und besteht Fig. 209 aus einem hohlen, messingenen Würfel MNDC, dessen Kanten



ohngefähr zwei Zoll lang sind, senkrecht auf eine der Ebenen des Würfels ist ein messingenes Rohr AG von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser und 8 Zoll Länge befestigt; das eine Ende bei A ist mit einem Deckel geschlossen und in dessen Mittelpunkte eine runde Okularöffnung, an dem anderen offenen Ende ist im Durchmesser des Rohres parallel mit einer Kante des Würfels ein Faden gespannt, dieser und die Okularöffnung bestimmen die Visirebene.

In der oberen Hälfte der dem Rohre gegenüber gelegenen Ebene B des Würfels ist eine Oeffnung, man kann daher von der Okularöffnung über dem Faden durch diese direkt nach einem Signal visiren; von der Seitenebene DNC ist die untere Hälfte offen, im Innern des Würfels als Diagonalebene ein Spiegel F eingesetzt, dieser von der halben Höhe des Würfels und mit der reflektirenden Ebene gegen das Rohr gewendet; da der Spiegel als Diagonalebene des Würfels gegen die Achse des Rohres, somit gegen die Visur unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist, so bilden die beiden Strahlen, wovon der eine direkt, der andere vom Spiegel reflektirt in das Auge kommen, in der Mitte des Spiegels einen rechten Winkel.

Dieses Instrument wird bei dem Gebrauche frei in der Hand und so gehalten, daß der Objektivfaden daher auf dem Spiegel vertikal ist.

Rektifikation des Winkelrohrs.

§. 182. Soll dieses Instrument zum Gebrauche geeignet sein, so muß

a) die Ebene des Spiegels mit dem Objektivfaden parallel und

b) gegen die Visirebene unter einem Winkel von 45 Graden geneigt sein.

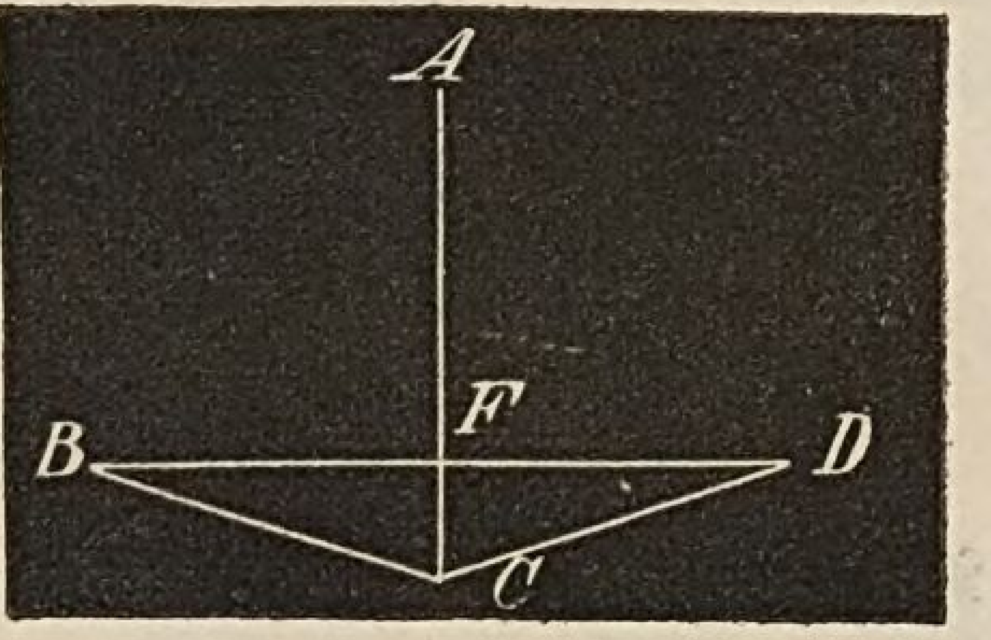
Ad a. Das erstere wird erkannt, wenn man in einer ebenen Gegend einen Stab in einer Entfernung von 40 bis 50 Klftr. vom Beobachter genau vertikal stellt, diesen direkt anvisirt, sodann aber einen Stab ebenfalls scharf vertikal aber so stellt, daß sich der direkt gesehene Stab mit dem durch Reflexion erhaltenen Bilde des zweiten berühre.

Bilden diese beiden im Spiegel einen Winkel und hat sich der Beobachter überzeugt, daß diese Erscheinung nicht etwa der schiefen Haltung des Rohres zugeschrieben werden kann, so ist die nicht parallele Lage des Spiegels mit dem

Objektivfaden die Ursache und muß, falls die erforderliche Schraube nicht vorhanden ist, vom Mechaniker beseitigt werden.

Da aber eine kleine Neigung des Spiegels aus der vertikalen Richtung auf den bemessenen Winkel keinen merklichen Einfluß ausübt, so wird selten ein Instrument so fehlerhaft konstruirt sein, daß man es dem Mechaniker zurückstellen müßte.

Ad b. Diese ist analog mit jener, welche beim Winkelspiegel angegeben worden ist; man visirt nämlich direkt auf einen Stab A Fig. 210 und bringt einen zweiten seitwärts stehenden Stab B mit jenem zur Deckung, ist das geschehen, so wird B eingesteckt, das Rohr um die Achse gewendet und nun ein anderer Stab D in gleicher Entfernung mit B so gestellt, daß er mit A in dem Spiegel als eine gerade Linie erscheint; stellt man endlich in der durch die Mitte des Würfels gehenden Vertikalen einen Stab C, so müssen BCD in einer vertikalen Ebene liegen. Bilden diese drei Punkte ein Dreieck,



und ist F der Durchschnitt zwischen DB und AC, so ist BFC = CFD = 90°, stellt man sich mit dem Instrumente in F auf, und bewegt man mittelst der zugehörigen, aber in der Zeichnung nicht sichtbaren Schraube den Spiegel so, daß die eben gesehenen Signale in der Deckung erscheinen, so ist das Instrument hinsichtlich der richtigen Neigung des Spiegels gegen die Achse des Rohres rektificirt, dann muß auch A mit dem Bilde von D in einer vertikalen Linie erscheinen.

Gebrauch des Winkelrohres.

§. 183. Die Einrichtung dieses Instrumentes zeigt schon, daß es wie der Winkelspiegel bestimmt ist, Senkrechte zu errichten und zu fällen; nur ist die Handhabung des Winkelrohres viel sicherer und die Konstruktion des rechten Winkels viel schärfer als bei dem Winkelspiegel, das Verfahren jedoch bei beiden Instrumenten genau dasselbe.

Die Leichtigkeit, mit welcher mittelst dieses Instrumentes Senkrechte gefällt werden können, macht dasselbe bei der Vermessung der Polygone mittelst Abszissen und Ordynaten fast unentbehrlich. Hat man bei einer kleinen Aufnahme ein Winkelrohr zur Hand, so wählt man die längste Diagonale als Abszissenlinie; läßt in ihrem Endpunkte oder in ihrer Richtung einen Stab stellen, und dann vom Anfangspunkte gegen das Ende hin die Kette ausspannen.

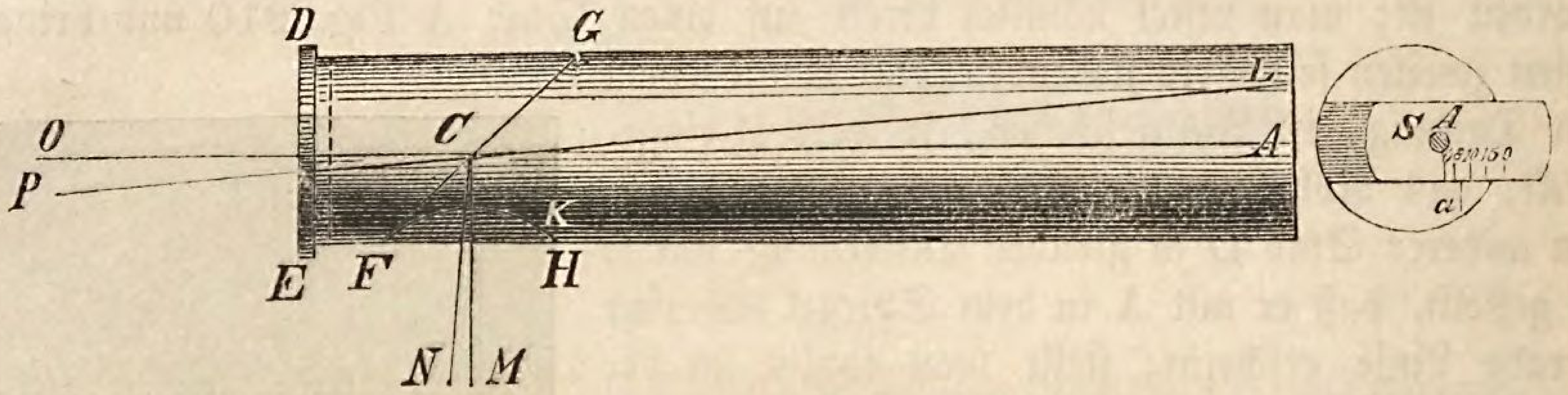
Nun visirt man direkt auf den Stab und geht längs der Kette so weit, bis man den in einem Punkte des Umfanges gestellten zweiten Stab mit dem direkt gesehenen in eine gerade Linie bringt, so ist der Würfel des Instrumentes oberhalb des Fußpunktes der Ordynate; wird diese mit einem Klafterstabe gemessen und die Abszisse an der Kette abgelesen, so ist der Punkt bestimmt. Sollte man eine oder die andere Ordynate nicht direkt messen können, so benützt man eine schon errichtete Ordynate als Abszisse und fällt auf diese die Senkrechte.

Auch bei der Vermessung nach dem Umfange mit dem Meßtische oder mit einem anderen Winkelmesser leistet das Winkelrohr gute Dienste, da man die kur-

zen Umfangslinien vorerst außer Acht läßt, und dann erst, wenn der Umfang bestimmt ist, durch Abszissen und Ordynaten mit diesem in Verbindung bringt.

Das Winkelrohr mit beweglichem Okulare.

§. 184. Dieses Winkelrohr besteht, Fig. 211, aus einem messingenen



Rohre DEA von 8 Zoll Länge und $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser, an dem einen offenen Ende DE ist eine Glasebene unter einem Winkel von 45 Graden gegen die Achse des Rohres eingesetzt, der Schnitt zwischen dieser Ebene und dem Rohre ist daher eine Ellipse, FG ihre große Achse; die kleine Achse ist durch einen in das Glas geschnittenen feinen Strich ersichtlich; das Rohr wird beim Gebrauche so gehalten, daß die große Achse horizontal, somit die kleine in C vertikal ist; in dem Deckel bei A ist eine runde Okularöffnung, durch diese und die kleine Achse ist die Visirebene bestimmt. Die oberhalb FG gelegene Hälfte des Glases ist mit Amalgam belegt, die spiegelnde Ebene gegen die Okularöffnung gewendet; das Rohr hat eine dem Spiegel gegenüber liegende Oeffnung FKH, wobei FH mit FG in einer beim Gebrauche horizontalen Ebene liegt.

Durch die bisher beschriebene Einrichtung erhält das Instrument, im Vergleich zu dem vorhergehenden, ein gefälligeres Aeußere, seine eigentliche Verbesserung aber besteht darin, daß die Okularöffnung mit dem Schieber S und zwar in der durch die große Achse der Ellipse und die des Rohres bestimmten Ebene beweglich ist.

Wird nämlich der mit Null bezeichnete Strich und der Index a in eine gerade Linie gestellt, so ist die Okularöffnung in der Achse des Rohres, daher bildet das durch den unbelegten Theil des Glases anvisirte Objekt Q mit dem durch Reflexion gesehenen M in C einen rechten Winkel. Wird aber die Okularöffnung von A nach L um den Winkel ACL = x verschoben, so bilden die in der Deckung gesehenen Objekte NP einen Winkel α, welcher §. 157 gleich 90—2x ist.

Durch den Winkel x ist daher auch der Winkel α, welchen die gesehenen Objekte im Mittelpunkte der Ellipse bilden, bestimmt, man kann also mit diesem Instrumente außer dem rechten noch andere spitze Winkel konstruiren.

Das Instrument gibt jedoch außer dem rechten Winkel nur noch vier andere an, die wir mit α_1, α_2, α_3, α_4 bezeichnen wollen, deren Cosinuse bezüglich $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{6}$ sind, so daß $\cos. \alpha_1 = \frac{1}{16}$, $\cos. \alpha_2 = \frac{1}{10}$, $\cos. \alpha_3 = \frac{1}{8}$ $\cos. \alpha_4 = \frac{1}{6}$, daher $\alpha_1 = 86^0 10' 39''$; $\alpha_2 = 84^0 15' 39''$; $\alpha_3 = 82^0 49' 9'$ und $\alpha_4 = 80^0 24' 21''$ ist; es ist also eines von jenen Instrumenten, welche die Winkel durch eine trigonometrische Linie angeben.

Sind die mit Zeigern unterschiedenen Winkel α bekannt, so kann man umgekehrt die Werthe von x finden, und werden diese ebenfalls durch Zeiger unterschieden, so ist $x_1 = 1^0 54' 41''$; $x_2 = 2^0 52' 11''$; $x_3 = 3^0 35' 25''$; $x_4 = 4^0 47' 49''$.

An den entsprechenden Stellen des Schiebers sind aber nicht die Werthe von x, auch nicht die Werthe für die Cosinuse der Winkel α, sondern die reziproken Werthe der letzteren, nämlich 15, 10, 8, 6, selbst angegeben und zwar aus einem in der Folge angeführten Grunde.

Wird die Länge CA = I, der Winkel LCA = x gesetzt, so ist LA = I tang. x ..... 1). Aus dieser Gleichung werden, wenn I gemessen, und für x die obigen Werthe angenommen worden sind, die Abstände der mit 15, 10, 8 und 6 von dem mit Null bezeichneten Striche berechnet.

Rektifikation des verbesserten Winkelrohres.

§. 185. Die Voraussetzungen, die man beim Gebrauche hinsichtlich dieses Instrumentes macht, sind:

a) daß die Okularöffnung in einer Linie verschiebbar sei, welche mit der großen Achse der Ellipse in einer Ebene liegt,

b) daß die kleine Achse, somit auch die Ellipse auf diese Ebene senkrecht stehe,

c) daß der Spiegel gegen die Visirebene unter einem Winkel von 45^0 geneigt sei; ferner ist nöthig

d) daß die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von der Okularöffnung auch so lang ist, als sie bei der Berechnung der Intervalle auf dem Schieber angenommen wurde, endlich

e) daß die berechneten Intervalle richtig aufgetragen worden sind.

Ad a. Hat man ein solches Instrument unmittelbar aus der Werkstätte des Wiener polytechnischen Institutes erhalten, so darf man versichert sein, daß alle diese Voraussetzungen mit einer Vollkommenheit vorhanden sind, die man nur wünschen kann; vermöge der Einrichtung des Rohres kann zwar die sub a und d vorausgesetzte Eigenschaft durch Muthwillen verloren gehen, aber sehr leicht wieder hergestellt werden. Die Ellipse nämlich ist nicht unmittelbar an das Rohr DEA, sondern an ein zweites von FG bis zu der punktirten Linie gegen DE reichendes Rohr befestigt, sie läßt sich also drehen, und längs des Rohres verschieben. Liegt aber die große Achse nicht in der vorausgesetzten Ebene FHC und ihr an der Oeffnung FKH gelegener Scheitel unterhalb FH, so wird man beim Visiren auf dem Spiegel einen dunklen Streifen sehen, dessen Breite dem Abstande des Scheitels von der Linie FH gleich ist; dieser Streifen ist nämlich der Schatten, welchen der oberhalb gelegene Theil des Rohres auf den Spiegel wirft.

Liegt dagegen derselbe Scheitel oberhalb der Ebene FHC, so wird auf dem unbelegten Theile des Glases ein lichter Streifen sichtbar, weil auf diesen Theil sowohl durch die Oeffnung DE als FKH Strahlen auffallen.

Richtet man also das Rohr mit der Spiegelebene gegen einen stark beleuchteten Gegenstand und dreht das Rohr, an dem die Ellipse befestigt ist, so, daß weder ein dunkler noch lichter Streifen sichtbar wird, so ist die besagte Achse mit FH in jener Ebene, in welcher vermöge der Anfertigung des Instrumentes die Okularöffnung verschiebbar ist.

Ad b. Durch eine fleißige Arbeit kann die Glasebene leicht so weit auf die horizontale Ebene senkrecht gestellt werden, daß die etwa vorkommende kleine Neigung ganz unmerklich wird, weshalb auch keine Rektifikation nöthig ist.

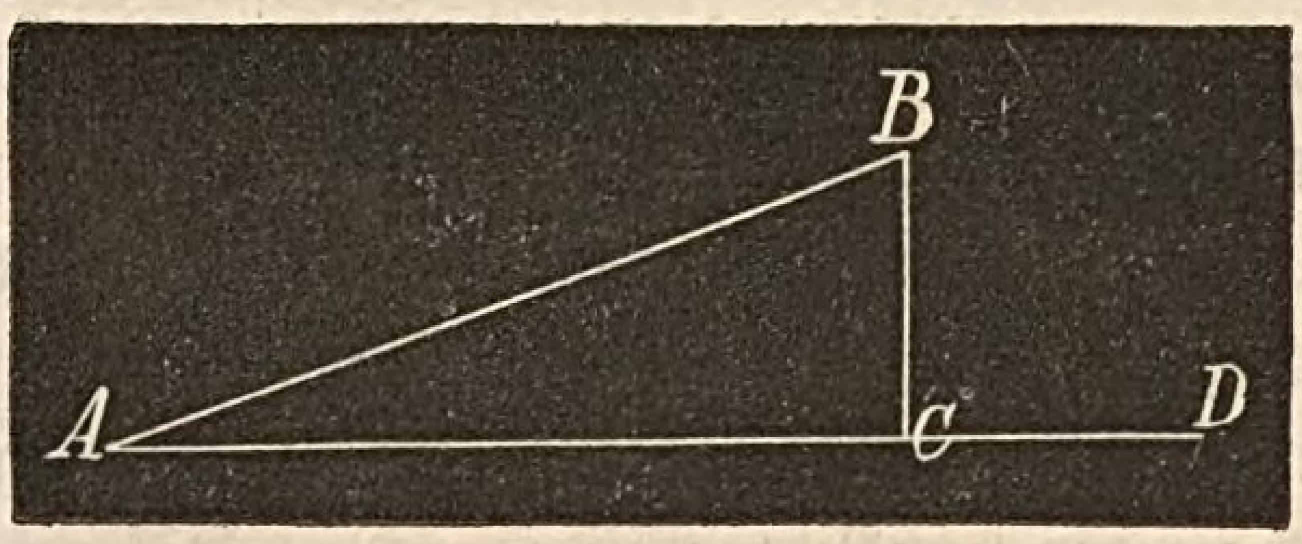
Ad c. Diese Untersuchung wird ganz auf dieselbe Art, wie bei dem vorigen Winkelrohre sub b) vorgenommen; sollte man da eine Nachhülse für nothwendig erachten, so müßte diese durch einen geschickten Mechaniker ausgeführt werden, an dem Instrumente selbst ist hiezu keine Schraube vorhanden.

Ad d. Damit nicht die Werthe auf dem Schieber durch eine Aenderung der Entfernung des Spiegels vom Okulare unrichtig werden, der Spiegel also immer seinen bestimmten Ort habe, ist die innere Fläche des Rohres zwischen der punktirten Linie und DE durch einen schmalen Ring ausgefüllt, welcher bis an den Rand DE in das Rohr gedrückt, den Spiegel in die gehörige Entfernung vom Okulare schiebt.

Ad e. Mißt man die Entfernungen der Intervalle 15, 10, 8 und 6 von Null, und dividirt man diese Zahlen durch die Tangente der entsprechenden Winkel x, so müssen die Quotienten bis auf sehr kleine Differenzen einander gleich sein; die Quotienten sind nämlich (§. 154, Gleichung 1) die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von der Okularöffnung.

Gebrauch des verbesserten Winkelrohres.

§. 186. Wird der Schieber so gestellt, daß die Okularöffnung in der Achse des Rohres liegt, so ist der Gebrauch ganz derselbe, wie bei dem vorhergehenden Instrumente, worüber wir also auf den §. 153 weisen; durch die bewegliche Okularöffnung erhält dieses Instrument noch eine andere Anwendung.



Ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC, Fig. 212, cos. A $= \frac{1}{n}$ so ist AB $= AC.\frac{1}{\cos. A} = n.\, AC.$ Bei diesem Instrumente hat n, wie aus der Beschreibung desselben bekannt ist, die Werthe 15, 10, 8 und 6, stellt man also den mit a bezeichneten Index mit einem Striche des Schiebers, z. B. mit 8, in eine gerade Linie, und visirt man von A direkt auf den in B gestellten Stab, läßt aber einen zweiten D so stellen, daß er mit jenem B im Spiegel als eine gerade Linie erscheint, so ist der Cosinus des so konstruirten Winkels BAD $= \frac{1}{8}$. Wird hierauf der mit Null bezeichnete Strich mit a in eine gerade Linie gebracht, und der Fußpunkt C, der von B auf die AD gefällten Senkrechten BC bestimmt, AC gemessen, so ist in diesem Beispiele AB $=$ 8AC. Dasselbe Verfahren bleibt für die andern Zahlen.

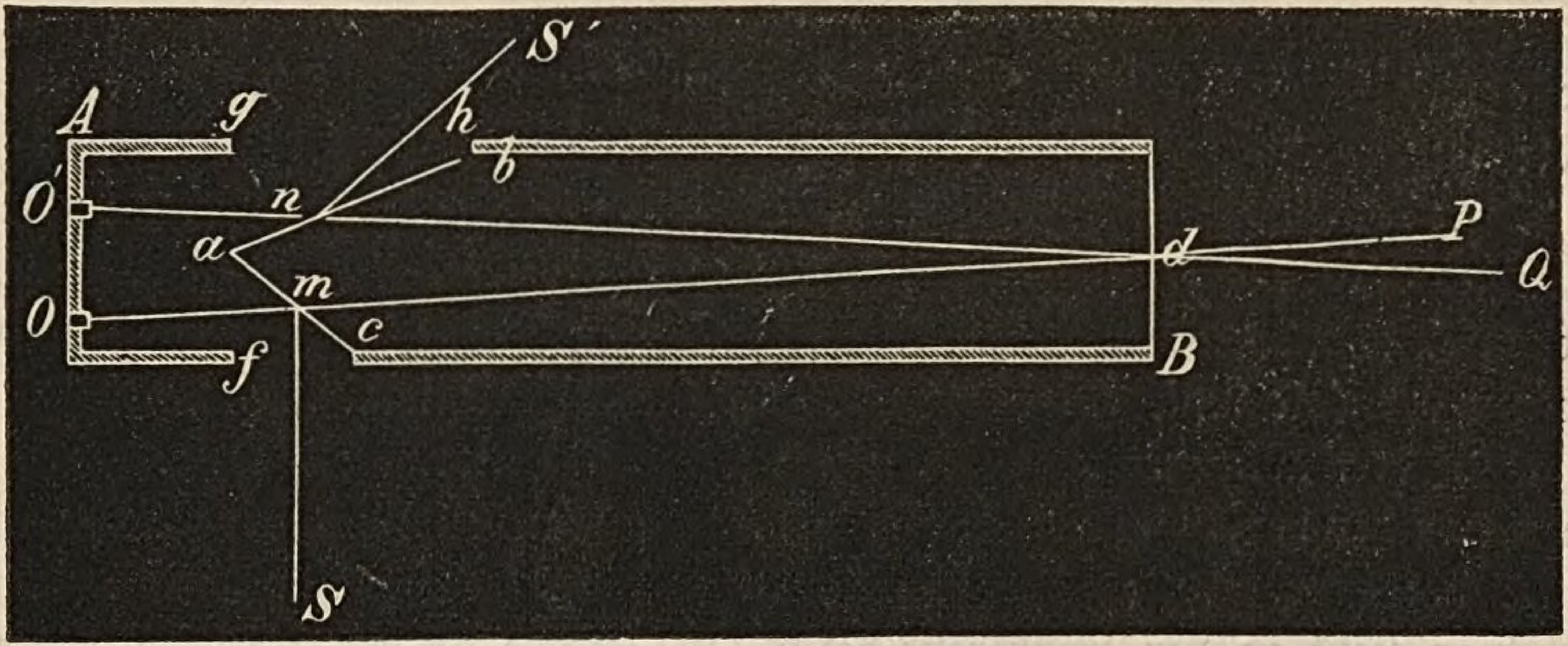
Weil nun die gemessene Kathete mit jener Zahl zu multipliziren ist, welche mit dem Index in eine gerade Linie gebracht worden ist, so sind aus diesem Grunde nicht die Cosinuse, sondern gleich ihre Nenner aufgetragen worden.

Dieses Instrument ist also zur mittelbaren Messung der Linien sehr geeignet, insbesondere leistet es bei der Aufnahme der Polygone nach dem Umfange gute Dienste, wenn eine der Seiten nicht direkt meßbar ist.

Setzt man $\cos. A = \frac{1}{n}$, so ist $BC = AC\sqrt{n^2-1}$.

Das Spiegeldiopter von Romershausen.

§. 187. Der äußeren Form nach gleicht es dem vorhergehenden Winkelrohre, es ist also eine Röhre Fig. 213, deren Längendurchschnitt die Ebene AB vorstellt;



das Okular hat zwei längliche parallele Oeffnungen OO', diesen gegenüber ist an einem Planglase entweder eine Linie d geätzt oder ein feines Haar gespannt.

Innerhalb stehen auf AB zwei Metallspiegel senkrecht, ihnen gegenüber hat das Rohr Ausschnitte, die mit den Spiegeln gleiche Höhe nahe $\frac{1}{3}$ des Durchmessers haben; die spiegelnden Ebenen sind gegen die direkten Visuren Od, O'd so geneigt, daß bei dem einen der von S auf ac fallende und nach O reflektirte Strahl mit Od in m einen rechten Winkel, bei dem andern der von S' kommende und in n nach O' reflektirte Strahl einen Winkel S'nO' von 135 Graden bildet, es ist somit $SmP = 90$, $S'nQ = 45^0$, das letztere wird erreicht, sobald $anO' = 22^0\ 30'$ ist, denn weil $anO' = S'nb$ und $S'nO' = 135^0$ ist, so folgt $O'na = 22^0\ 30'$.

Man kann also mit diesem Instrumente Senkrechte errichten oder fällen, und auch Winkel von 45^0 konstruiren und zwar mit derselben Genauigkeit wie bei dem katoptrischen Winkelrohre, nur hat das Romershausische Instrument wegen der metallenen Spiegel, die mehr Licht als die Glasebenen reflektiren, einen Vorzug.

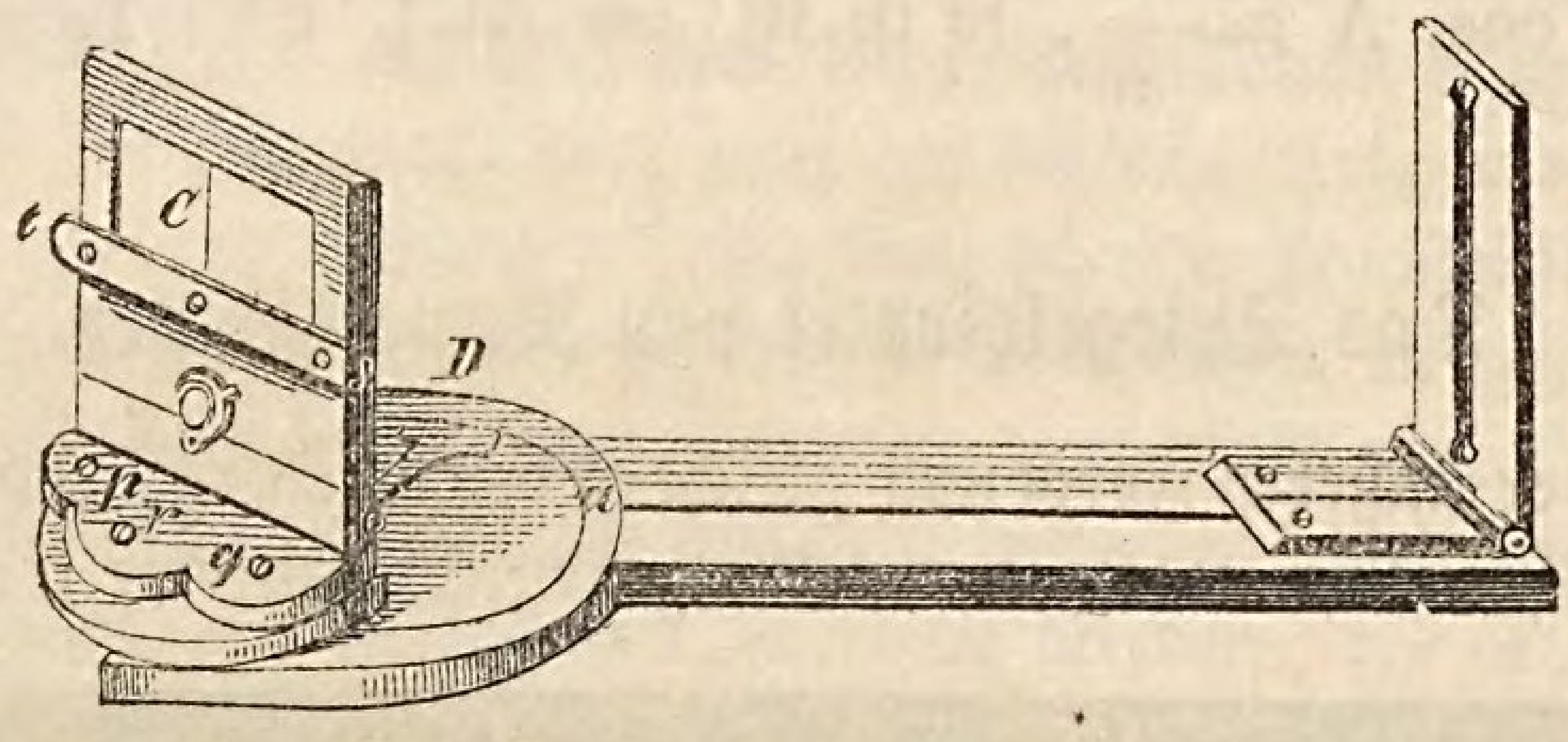
Beide Spiegel sind auf das Sorgfältigste rektifizirt, daher keine Berichtigung nöthig, aber weil keine Rektifikationsschrauben vorhanden sind, auch nicht möglich ist, eine vorzunehmen.

Die Art, den rechten Winkel zu prüfen, ist beim katoptrischen Winkelrohre Ad b angegeben worden, diese Untersuchung kann zuerst vorgenommen werden

was den Winkel von 45^0 betrifft, so müssen zwei neben einander liegende mit diesem Instrumente konstruirte Winkel zusammen einen Rechten geben, der mit Hülfe des andern Spiegels geprüft werden kann.

Das Spiegellineal.

§. 188. Der Limbus Fig. 214 ist ein hölzernes Lineal von beiläufig 2 Zoll



Breite und 6 Zoll Länge, welches in einen Halbkreis von $2\frac{1}{4}$ Zoll Halbmesser endet; im Mittelpunkte dieses Kreises steht ein halbbelegter Spiegel senkrecht auf die Ebene des Lineals, ist beweglich, seine Bewegung wird durch einen unterhalb des Lineals befindlichen Schraubenkopf hervorgebracht. Dem Spiegel gegenüber ist ein kleines Diopter mit einer Okularspalte, durch dieses und eine auf dem Glase gezogene vertikale Linie C (Spiegellinie) ist die Visirebene bestimmt.

Auf dem hölzernen Halbkreise liegt ein messingener Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der verlängerten Spiegellinie, seine Eintheilung ist eigentlich von halbem zu halbem Grade, aber jedes solche Intervall als ein ganzer Grad nummerirt, und zwar steht in der Visirebene bei a 180 Grade an den äußersten Enden der Eintheilung Null geschrieben. Konzentrisch mit diesem Bogen bewegt sich ein Indexarm, welcher auf dem Spiegel senkrecht steht und mit diesem fest verbunden ist; dieser Arm hat bei D zwei neben einander liegende vortragende Nonien, mittelst welchen ein Winkel bis auf 10 Minuten bestimmt werden kann.

Der Spiegel und das Diopter lassen sich mittelst Scharniere auf das Lineal niederlegen. Dieses Instrument beruht auf dem 3., §. 150, vorgetragenen Satze und gibt wegen der Bezeichnung der halben Grade als ganze und wegen der Nummerirung derselben von beiden Enden gegen a den gemessenen Winkel unmittelbar; denn steht der Spiegel auf der Visirebene senkrecht, so zeigt der Nullpunkt des Nonius auf 180^0, und man sieht nur über die Spiegellinie ein Objekt, welches wir mit G bezeichnen wollen; wird hierauf der Spiegel so bewegt, daß man durch Reflexion irgend ein Objekt P mit G in einer vertikalen Linie erblickt, so ist (§. 150, 3. Satz, Gleichung 2) der Winkel PCG $= 180 - 2$aCD, aber die Bezifferung des Bogens aD ist doppelt so groß, als sie vermöge des Winkels aCD sein sollte, daher erhält man gleich 2 . aCD, ferner ist bei a bereits 180 Grade geschrieben, daher zeigt der Nonius 180—2aCD, also das Maß des Winkels selbst.

Rektifikation des Spiegellineales.

§. 189. Das Instrument wird die Winkel mit der erwähnten Schärfe angeben, wenn

1. der Spiegel, und

2. die Spalte des Diopters bei aufrechter Stellung auf das Lineal senkrecht stehen,

3. die Spiegellinie mit dem Okulardiopter parallel ist,

4. die erstere durch die Drehungsachse der Alhidade geht, und

5. die Visirebene auf dem Spiegel senkrecht steht, sobald der Index auf 180^0 eingestellt ist.

Ad 1. Das Erstere kann nach §. 175 geprüft werden, dabei wird das Okulardiopter abgeschraubt, an seine Stelle das Rektifizirdiopter mit der kleinen Oeffnung gestellt, der Spiegel mit diesem parallel gewendet, und das andere Diopter vor diesen gelegt. Eine Nachbesserung in der Neigung des Spiegels kann nur durch Unterlegen von Papierstreifen unter die Fassung des Spiegels bewerkstelligt werden.

Ad 2. Man spannt auf einer geweißten Mauer eine schwarze Schnur vertikal und stellt 10 bis 30 Klafter von dieser entfernt einen Meßtisch horizontal auf, legt das Spiegellineal, bei dem blos das Diopter aufgestellt ist, auf das Tischblatt, visirt durch die untere Oeffnung auf die Schnur, und beurtheilt sodann, ob auch die Visur über die obere Oeffnung des Diopters dieselbe genau trifft. Eine Abweichung ist nur der unrechten Stellung des Diopters zuzuschreiben, und kann wie bei dem Diopterlineale (§. 104) weggebracht werden.

Ad 3. Wird nun der Spiegel vertikal, der Nonius auf 180^0 gestellt, und durch die unterste Oeffnung des Diopters in dem Spiegel gesehen, so muß die Okularspalte mit der Spiegellinie parallel erscheinen. Sollte, was nicht leicht vorauszusetzen ist, eine Nachhülfe nothwendig werden, so werden die zwei Schräubchen t, s an der Fassung des Spiegels nachgelassen, die Spiegellinie entsprechend geneigt, und dann durch das Anziehen derselben Schräubchen befestigt.

Ad 4. Diesen Fehler aufzufinden und zu beseitigen ist aus dem Grunde etwas schwierig, weil man es hier mit einer sehr kleinen Größe zu thun hat; der Weg, auf welchem man einen groben Fehler ausmitteln kann, ist folgender: man stellt den Spiegel auf 180^0, das Spiegellineal wieder auf das horizontale Tischblatt und visirt die Spiegellinie auf die Schnur scharf ein; nun dreht man den Spiegel vorsichtig um 180^0 ohne das Lineal zu verrücken und gibt Acht, ob auch jetzt die Spiegellinie auf die Schnur trifft, ist dies nicht der Fall, so ist die Ursache entweder in einer Exzentrizität der Alhidade oder der Spiegellinie zu suchen.

Da man aber doch eine Korrektion vornehmen muß, so wird man die Spiegellinie, nachdem die Schräubchen p, q nachgelassen sind, sammt der Fassung verstellen und dann den Spiegel durch dieselben Schrauben wieder feststellen. Angenommen die Entfernung der Okularspalte von der Schnur sei 40 Klafter, man habe noch den Spiegel um 180^0 gedreht, wurde an der Mauer ein Ausweichen von 2 Zoll bemerkt, so ist die Exzentrizität 0·002 Zoll. Diese Größe verursacht aber, wenn §. 176 Gleich. 4) $n = o$, $m = 60^0$ angenommen wird, einen Fehler von $2' \, 39''$.

Ad 5. Man stellt den Index auf 90^0, wodurch eigentlich der Spiegel mit der Visirebene, falls jener richtig gestellt ist, einen Winkel von 45^0 bildet, und verfährt im Uebrigen genau wie bei der Rektifikation des katoptrischen Winkelrohres; sollte eine Nachhülfe erforderlich werden, so werden die Schräubchen p, q ge-

lüftet und der Spiegel um das Erforderliche gedreht, wobei jedoch der Spiegel nicht verschoben werden darf, weil sonst die vierte Rektifikation vernichtet würde.

Ist der Spiegel bei 90⁰ richtig gestellt, so ist er es auch für die übrigen Grade, weil der Nullpunkt der Eintheilung, hier mit 180⁰ bezeichnet, nicht in der Visirebene liegen muß.

Gebrauch des Spiegellineales.

§. 190. Daß die Angaben dieses Winkelmessers nicht verläßlich sind, folgt aus der Untersuchung der Fehlerquellen von selbst, insbesondere ist wegen dem kleinen Halbmesser des Kreisbogens die Exzentrizität der Alhidade vom großen Einflusse, allein zu Arbeiten von minderer Schärfe ist es immer gut zu brauchen.

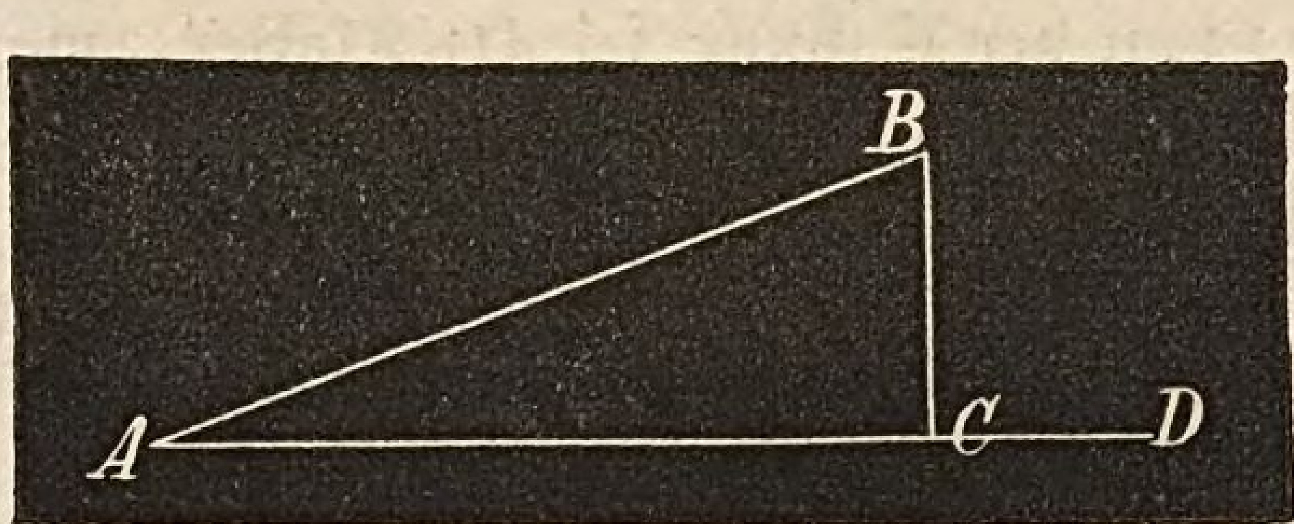
Stellt man nämlich den Nullpunkt des Nonius auf 90⁰, so hat man an diesem wie an den vorhergehenden Instrumenten ein Mittel, Senkrechte zu errichten oder zu fällen; die Anwendung des Lineals bei dieser Stellung des Spiegels ist also im §. 153 enthalten.

Die Einrichtung dieses Instrumentes gestattet aber auch einzelne Winkel zu messen; zu diesem Zwecke wird das eine Signal direkt anvisirt, und der Spiegel so weit gewendet, bis man das zweite Signal mit dem ersten in der Deckung erblickt, der Nonius gibt sodann das Maß des Winkels.

Vermöge der doppelten Nummerirung des Limbus von Null bis 180⁰, können die Winkel rechts oder links von der Visirebene liegen; Winkel jedoch unter 32 und über 163 Grade können mit diesem Instrumente nicht direkt gemessen werden, weil im ersten Falle die Strahlen zu schief auf den Spiegel auffallen, im zweiten aber, der Kopf des Beobachters die einfallenden Strahlen auffängt.

Beiden Uebelständen aber kann man abhelfen; ist nämlich der zu messende Winkel kleiner als 32 Grade, so errichtet man durch einen dritten Stab einen neuen Winkel, so daß die Summe beider nahe 90⁰ beträgt, mißt die beiden zusammen und den neu errichteten für sich, zieht den letzteren von dem ersteren ab, so ist der Unterschied die gesuchte Größe; einen Winkel über 163 zerlegt man in zwei nahe gleiche Winkel, mißt jeden einzeln und addirt sie.

Die Einrichtung, mittelst dieses Instrumentes einzelne Winkel, wenn auch nur bis auf 10 Minuten zu messen, macht dasselbe zu jenen Operationen sehr brauchbar, wo es nur darauf ankommt zu erfahren, ob ein Winkel eine bestimmte Anzahl Grade haben werde oder nicht; es kann aber auch bei der Aufnahme mittelst Abszissen und Ordynaten mit Vortheil verwendet werden, besonders dann, wenn eine Senkrechte nicht gefällt oder nicht gemessen werden könnte.



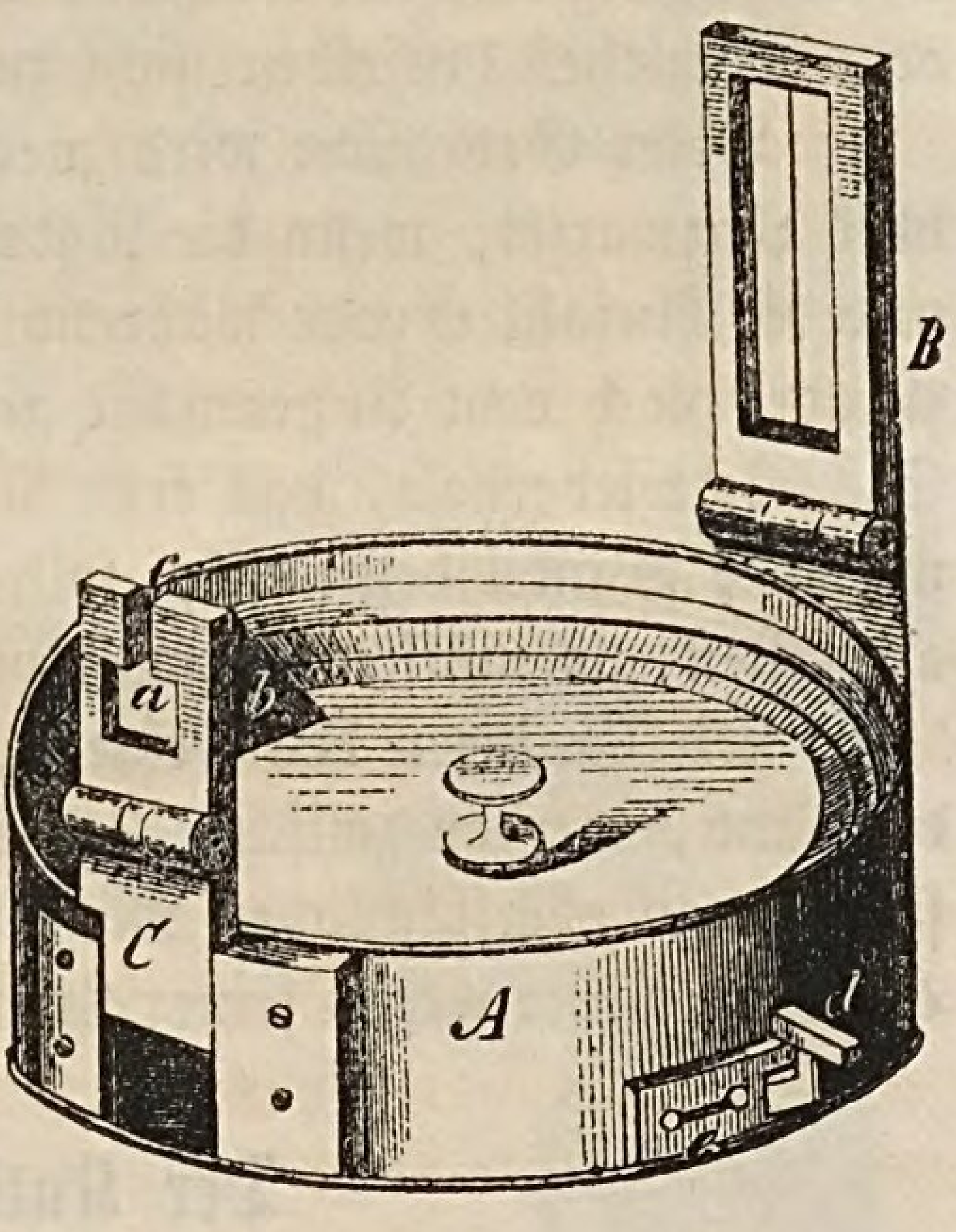
Sollte man z. B., Fig. 215, die Ordynate von B, nämlich BC, entweder nicht fällen, weil der Punkt B von der Abszissenlinie AD nicht sichtbar ist, oder irgend eines Hindernisses wegen, nicht direkt messen können, wäre aber A der Fußpunkt der vorhergehenden Ordynate, so messe man AB, den Winkel BAD, so ist hiedurch B vollkommen bestimmt; und wenn auch der Winkel um 20 Minuten ungenau bestimmt ist, so beträgt der hierdurch entstandene Fehler in der Ordynate

nur 0·1163 AB sin. A, also bei einem Winkel von 60° und AB = 20 Klafter nur sieben Zoll.

Auf diese Art könnte man alle Punkte durch Ordynaten bestimmen, die gegen die Abszissenlinien unter einem schiefen Winkel geneigt sind, doch die Konstruktion des Polygons im verjüngten Maßstabe wäre sodann nicht so einfach, daher auch nicht so genau als bei rechtwinkligen Koordynaten.

Boussole von Schmalkalder.

§. 191. In der Mitte eines messingenen Cylinders A, Fig. 216, von $2\frac{3}{4}$ Zoll Durchmesser und $\frac{3}{4}$ Zoll Höhe, steht ein fixer Stift auf die Grundebene senkrecht, auf dessen Spitze eine Magnetnadel mittelst eines Achathütchens aufliegt und frei beweglich ist. Die Gradtheilung ist auf ein Bristolpapier (ein mit stark gummirtem Kreidegrunde überzogenes Zeichenpapier) gedruckt und der Art auf die Magnetnadel angeklebt, daß im ruhigen Zustande derselben die mit Null und 180 bezeichneten Intervalle in der Linie des magnetischen Meridians liegen.



An dem Cylinder selbst ist das 2 Zoll hohe Objektivdiopter B angeschraubt; das diesem gegenüberliegende Okulardiopter C trägt in der messingenen Fassung b ein sphärisches Glasprisma, die sphärische Fläche gegen die Gradtheilung, die ebene Kathetenfläche gegen das Okular gewendet, die Hypothenusenfläche ist gegen die Katheten unter einem Winkel von 45° geneigt. Das Okulardiopter und das Prisma sind oben etwa $\frac{1}{2}$ Zoll ausgeschnitten, dieser Ausschnitt c ist die Okularöffnung; unter dem Ausschnitte ist durch eine kleine Oeffnung a in der Fassung ein Theil der vertikalen Kathetenfläche sichtbar; wenn also der Beobachter durch die Okularöffnung sehend den Objektivfaden auf ein terrestrisches Objekt einstellt, somit die Boussole, die man in der Hand hält, irgendwie gedreht hat, so wird er zugleich in a jene Strahlen in das Auge bekommen, welche von der unter das Prisma gelangten Bezeichnung der Grade auf die Hypothenusenfläche aufgefallen und daselbst unter einem rechten Winkel reflektirt worden sind. Der Beobachter versetzt unwillkürlich den gesehenen Gegenstand in jene Richtung, von welcher ihm die Strahlen in das Auge gelangt sind; er sieht also bei diesem Instrumente die Bezifferung der Grade in der Richtung des Objektivhaares oder was dasselbe ist, er sieht das Objektivhaar auf der Grundtheilung, dieses ist also zugleich der Index beim Ablesen des Winkels.

Ferner ist bekannt, daß ein solches Prisma die Objekte vergrößert zeigt, der Beobachter sieht also wohl die Intervalle der Gradtheilung, nicht aber den Objektivfaden vergrößert, ferner ist die vom Okulare nach der linken Seite gehende Bezifferung der Grade auf das Bristolpapier verkehrt gedruckt, die Ziffern erscheinen also dem Auge in aufrechter Stellung.

Zur Abhaltung der schädlichen Seitenstrahlen hat die untere Fläche der Fassung b nur eine Oeffnung von $\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser, und um das Prisma in die deutliche Sehweite zu stellen, ist das Okulardiopter längst des Gehäuses verschiebbar, dieses oben durch ein ebengeschliffenes Glas geschlossen.

d ist das Ende eines Hebels, durch welchen die Magnetnadel außer Gebrauche von der Spitze des Stiftes abgehoben ist, e das Ende einer schwachen Stahlfeder, welche den Zweck hat, die Magnetnadel in dem Momente festzuhalten, als die Nadel zur Ruhe gekommen ist, was durch einen leichten Druck auf das Stück e, das gewöhnlich beim Gebrauche unter den Daumen zu liegen kommt, geschehen kann, läßt der Druck nach, so ist die Nadel wieder frei. Weil die Kreistheilung auf ein trockenes Bristolpapier gedruckt wurde, so ist ein Eingehen oder Verziehen desselben nicht zu befürchten.

Beim Gebrauche wird zuerst das links liegende Signal pointirt, der Augenblick abgewartet, wenn die Nadel zur Ruhe kommt, mit der Feder e festgehalten und die Anzahl Grade während dem Visiren abgelesen, die aliquoten Theile eines Grades nach dem Augenmaße geschätzt, sodann dieselbe Operation bei dem zweiten Signale wiederholt, das erste Ablesen von dem zweiten abgezogen, so ist der zu messende Winkel bestimmt; sollte jedoch das zweite Ablesen kleiner als das erste ausfallen, so müssen zu demselben noch 360^0 addirt werden.

Die Gränzen des Fehlers, welcher mit diesem Instrumente begangen werden kann, werden zwischen 30′ und 2 Graden geschätzt, man sieht also, daß es sich nur zu oberflächlichen Messungen und da nur wegen seiner kompendiösen Form eignet und hier wegen seiner sinnreichen Zusammensetzung aufgenommen worden ist.

Der Kathetometer von Pezelt *).

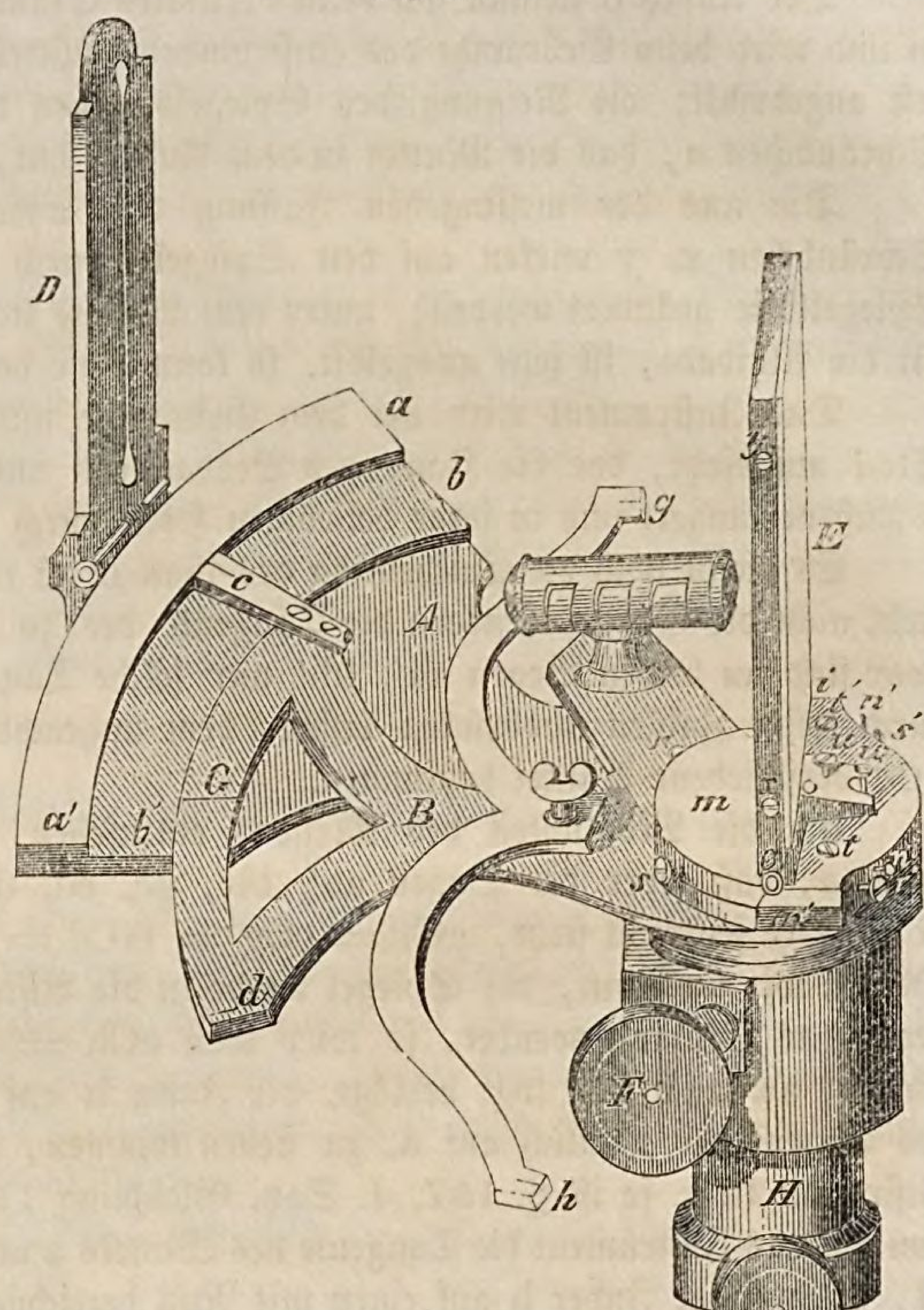
§. 192. Dieser Winkelmesser gründet sich auf den §. 150 vorgetragenen vierten Satz, und besteht, Fig. 217 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), aus einer Limbusplatte A mit zwei stufenartig über einander liegenden eingetheilten Kreisbogen aa′, bb′, welche einem Mittelpunktswinkel von 45 Graden entsprechen; die Alhidade B hat vier Indexarme, davon gehören die mit c und h bezeichneten zu dem Bogen aa′, die mit g und d bezeichneten zu dem bb′, und jeder Indexstrich steht von dem nachfolgenden ebenfalls um einen Bogen von 45^0 ab.

Die etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll lange Okularspalte D steht auf dem Limbus in dem Halbirungspunkte des Bogens aa′ senkrecht. Der Spiegel E ist parallel zu seiner Grundlinie ei abwechselnd in zwei Glas- und zwei Spiegelfelder abgetheilt, auf der Rückseite der Glasebene ist die Spiegellinie nach der ganzen Höhe eingeritzt, geht durch die Drehungsachse der Alhidade, die wir mit C bezeichnen wollen, in welcher auch der Mittelpunkt des Limbus liegt.

---

*) Ueber die Zusammensetzung und Anwendung dieses Instrumentes hat der Erfinder desselben: Dr. Joseph Pezelt, Professor der Geodäsie und Hydrotechnik an der Universität in Pesth 1845 ein eigenes Werk geschrieben, worauf wir diejenigen verweisen müssen, welche die vollständige Kenntniß desselben erhalten wollen, da hier nur das Wesentlichste aufgenommen werden konnte.

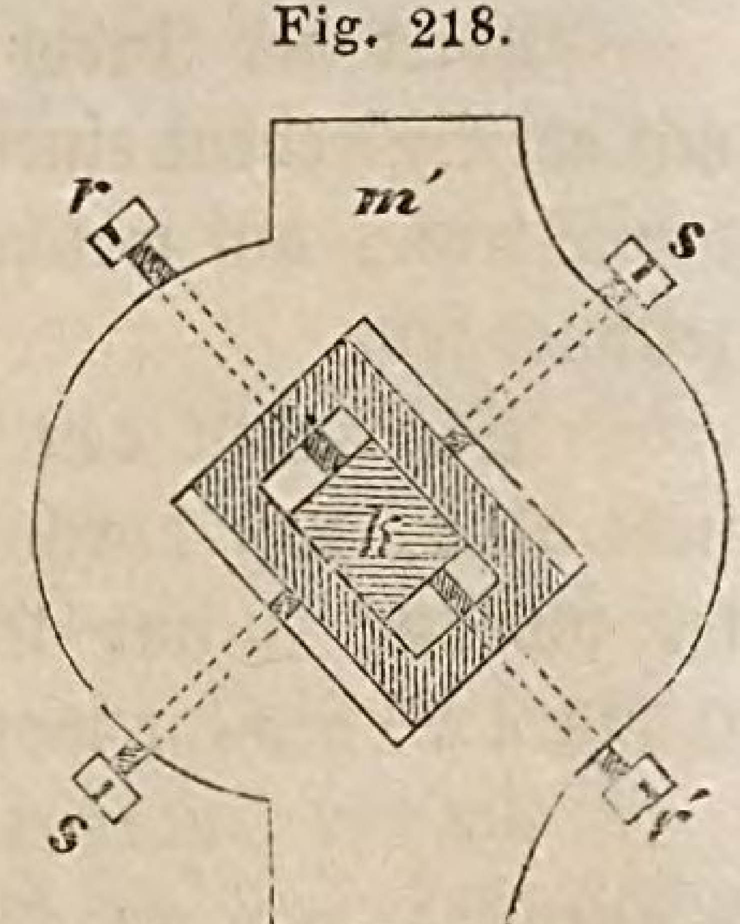
Fig. 217.



Die Ebene des Spiegels bildet mit dem durch die Mitte des Bogens cd gehenden Halbmesser CG einen rechten Winkel; der Spiegel ist nicht unmittelbar mit der Alhidade selbst, sondern mit einer kleinen Platte m verbunden, unter dieser liegt eine zweite m', und beide sind durch die Schräubchen tt' an die Alhidade befestigt.

Die innere Einrichtung der Platte m' ist in der Fig. 218 in natürlicher Größe dargestellt; die Platte m' ist nämlich durchbrochen, in der vierkantigen Oeffnung liegt ein kleiner Rahmen und in diesem der vierkantige Kopf k eines aus der Platte m' in die Alhidade gehenden Stiftes, welcher sich mit dem Spiegel dreht. Die vier Schräubchen r, r', s, s', Fig. 217 und 218, haben ihre Muttern in der Platte m', davon drücken ss' auf den Rahmen, rr' unmittelbar auf den Kopf k; damit aber eine Bewegung der Platte m' möglich werde, müssen die Oeffnungen, durch welche die Schrauben tt' durchgehen, weiter als ihre Spindeln sein, und damit die Schrauben rr' die Bewegung des Rahmens durch jene ss' nicht hindern, hat letzterer dort, wo die Schräubchen rr' durchgehen, kleine Schlützen. Der Zweck dieser Einrichtung ist, der Platte m', somit auch dem Spiegel eine kleine Verschiebung hinsichtlich der Drehungsachse der Alhidade zu ertheilen, also die Spiegellinie centrisch zu stellen. Der Spiegel kann ferner eine kleine Drehung durch die Schräubchen n, n', erhalten, diese haben ihre Mutter in der Platte m, stemmen sich aber an die Spindeln der Schrauben tt', wodurch die drehende Bewegung der Platte, wenn die eine dieser Schräubchen nachgelassen, die andere nachgeschraubt wird, erklärlich ist.

Fig. 218.



Die Köpfe der Schrauben tt' sind so breit, daß sie die Oeffnungen in der Platte m decken, wodurch es auch möglich wird, diese an die Alhidade fest anzuschrauben.

Der Ansatz o stemmt sich beim vertikalen Stande des Spiegels an die Platte m und wird beim Gebrauche des Instrumentes mittelst der Schraube w an diese fest angedrückt; die Neigung des Spiegels gegen die Alhidade kann durch das Schräubchen u, das die Mutter in dem Ansatze hat, regulirt werden.

Die aus der messingenen Fassung des Spiegels heraus stehenden zwei Schräubchen x, y wirken auf den Spiegel, durch diese kann die Neigung der Spiegellinie geändert werden; unter dem Limbus liegt die Mikrometerschraube F für die Alhidade, ist jene ausgelöst, so kann diese beliebig gedreht werden.

Das Instrument wird bei dem Gebrauche mittelst der Hülse H auf einen Stock aufgesetzt, der die Hand des Beobachters unterstützt, jener kann bis auf 5 Fuß verlängert und in jeder beliebigen Höhe durch einen Ring erhalten werden.

Es bleibt noch die Eintheilung des Limbus zu erklären. Dieses Instrument giebt nicht die Grade, sondern die Tangente des zu messenden Winkels an, und zwar sind an beiden Bogen aa′, bb′ nur solche Tangenten aufgetragen, die sich durch kleine Zahlen ausdrücken lassen, dem ungeachtet kann man mit demselben 106 verschiedene Winkel bestimmen.

Um die Möglichkeit des Messens einzusehen, müssen wir in Erinnerung bringen, daß jeder der Bogen aa′, bb′, gc, cd, dh 45^0 betrage, daher weil ei auf CG senkrecht steht, $gCi = cCg = GCd = hCe = 22^0\ 30'$ enthalten. Denken wir uns nun, der Spiegel werde in die Visirebene und zwar der Punkt e gegen das Okular gewendet, so wird weil $eCh = 22^0\ 30'$ und die Hälfte des Bogens aa′ auch $22^0\ 30'$ beträgt, der Index h auf den Anfang der Eintheilung des Bogens aa′ nämlich auf a, zu stehen kommen, und da der Spiegel in der Visirebene liegt, so ist §. 157, 4. Satz, Gleichung 1) $\alpha = 0$, daher auch $a = 0$; nun soll das Instrument die Tangente des Winkels a angeben und weil tang. $o = 0$ ist, so muß der Index h auf einen mit Null bezeichneten Strich zeigen.

Drehen wir den Spiegel bis der Index h in die Visirebene zu liegen kommt, so ist $\alpha = 22^0\,30'$, $a = 45^0$, tang. $45^0 = 1$; der Index h zeigt daher auf einen mit 1 nummerirten Strich.

Wird der Index am Ende des Bogens aa′ gestellt, so macht der Spiegel mit der Visirebene einen Winkel $a = 45^0$, es ist demnach $a = 90$, tang. $90 = \infty$; der Strich, auf welchen h in dieser Lage des Spiegels zeigt, muß mit ∞ bezeichnet sein.

Wir haben den Spiegel nur in drei bestimmten Stellungen betrachtet, man sieht aber, daß durch die Bewegung des Armes h auf dem Bogen aa′ alle Winkel zwischen 0 und 90^0 gemessen werden können, wobei der Spiegel nur von 0 bis 45^0 bewegt worden ist.

Da der Index d von jenem h um 45^0 absteht, so wird in dem Falle, als h am Ende von aa′ kommt, d am Anfange von bb′ stehen, und da der Winkel immer noch 90^0 hat, so wird der erste Strich b auch mit ∞ bezeichnet.

Wird der Spiegel weiter bewegt und kommt z. B. d in die Visirebene, so ist $\alpha = 67^0\ 30'$, daher $a = 135^0$, tang. 135^0 (von ihrem Zeichen abstrahirt) $=$ tang. $45^0 = 1$, somit ist auch der auf bb′ in der Visirebene gelegene Strich mit 1 bezeichnet.

Steht der Index d am Ende von bb′, so ist $\alpha = 90$, $a = 180$, tang. $180 = o$, daher der Strich, auf welchen der Index bei dieser Stellung des

Spiegels zeigt, mit Null überschrieben. Der Index d giebt daher alle Winkel zwischen 90 und 180 Graden, von der Visirebene nach der linken Seite gerechnet.

Ist der Index d auf Null des Bogens bb', so trifft c auf Null von aa', und da die Tangenten im dritten Quadranten nach demselben Gesetze wie von Null angefangen wachsen, so giebt der Index c auf aa' alle Winkel zwischen 180 und 270 Graden.

Kommt bei der Drehung des Spiegels c in a' an, so kommt der vierte Index g in dem Anfang von bb' und beide stehen auf ∞; der Index g giebt endlich die Tangenten der Winkel, welche zwischen 270 und 360^0 liegen.

Einfacher ist es jedoch, die Winkel hinsichtlich ihrer Lage in Bezug auf die Visirebene nach rechts und links zu unterscheiden, dann geben die Index g und h die Tangenten der spitzen, c und d die der stumpfen Winkel an, wobei, wie bereits bei dem Spiegellineale bemerkt worden ist, Winkel unter 32 und über 163 Grade nicht unmittelbar gemessen werden können.

Rektifikation des Kathetometers.

§. 193. Der Erfinder giebt in dem oben angeführten Werke 10 Punkte an, auf welche bei der Rektifikation Rücksicht zu nehmen ist; wird aber eine fleißige Arbeit von Seiten des Mechanikers *), und was den Spiegel betrifft, reines Glas, der Beleg der Spiegelfelder fleckenlos, scharfe Gränzen der Glas- und Spiegelfelder, feine rein geritzte Spiegellinie, wird dies Alles als vorhanden vorausgesetzt, so bleibt noch zu untersuchen:

1) ob die Flächen des Spiegels eben und

2) zu einander parallel sind,

3) ob die Spalte des Diopters bei aufrechter Stellung in einer auf dem Limbus senkrechten Ebene liege,

4) ob die Spiegellinie auf dem Limbus senkrecht,

5) nicht exzentrisch gestellt sei, also durch die Drehungsachse der Alhidade gehe,

6) ob bei der Einstellung der Indexstriche d oder c auf Null, die Visur- und die Spiegelebenen auf einander senkrecht stehen, endlich

7) ob die Eintheilung des Limbus richtig sei.

Ad 1 und 2. Wie diese Untersuchung vorzunehmen ist, wurde umständlich §. 171 und 173 gezeigt.

Ad 3. Das geeignete Verfahren, die vertikale Stellung der Okularspalte zu erkennen, haben wir bei dem Spiegellineale §. 158 ad 1 angegeben, da jedoch dieses Instrument nicht durch den Meßtisch horizontal gestellt werden kann, aber bei der Rektifikation doch horizontal sein muß, so hilft man sich dadurch, daß man den Stock, auf welchem der Kathetometer während dem Messen aufgesetzt ist, durch die viereckige Oeffnung eines Meßtischstativs durchsteckt, auf den Stock das Instrument befestigt, und während eine Meßtischlibelle auf dem Bogen aa' liegt, den Limbus durch kleine in die Oeffnung des Stativs eingesetzte Keile horizontal

---

*) Das für die hiesige technische Akademie angeschaffte Exemplar aus der Werkstätte Nuß und Faith in Pesth ist äußerst nett und fleißig gearbeitet.

und zugleich fest stellt. Hat das Diopter eine fehlerhafte Stellung, so kann diese auf dieselbe Art, wie beim Diopterlineal berichtigt werden.

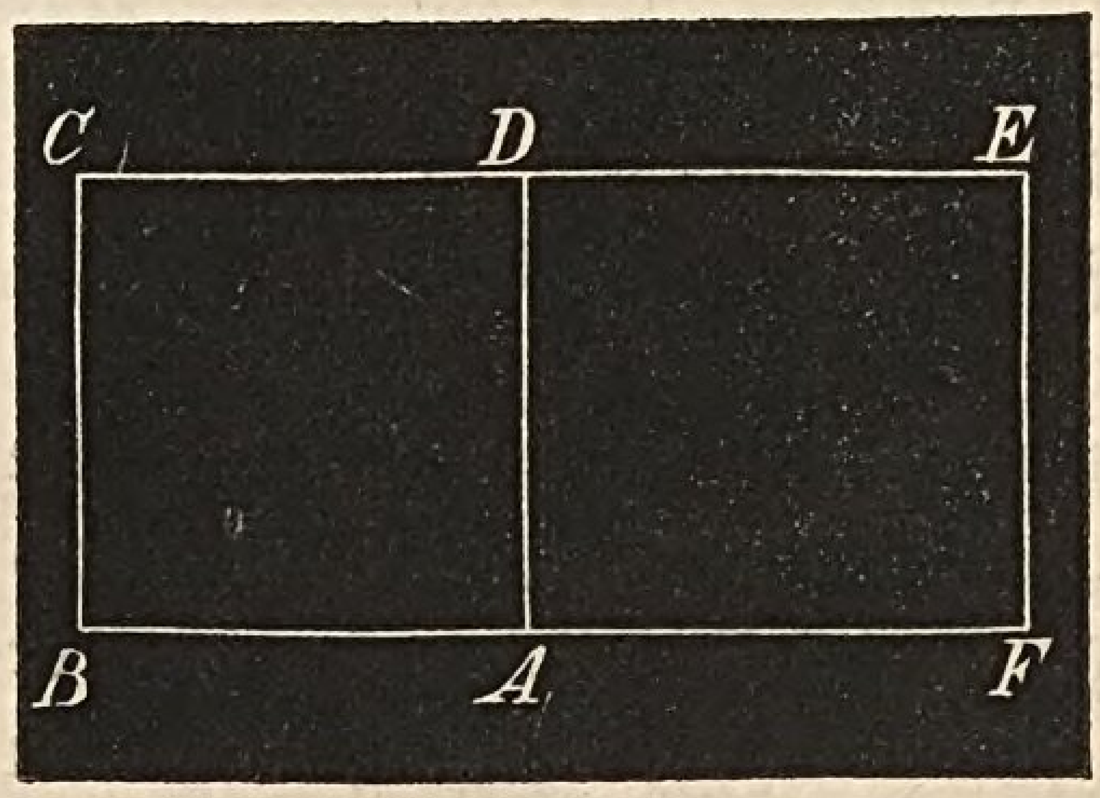
Ad 4. Wie man erkennt, ob die Spiegellinie auf dem Limbus senkrecht steht, ist umständlich bei dem Spiegellineale §. 158 ad 2 angegeben worden, braucht also nicht wiederholt zu werden. Liegt die Spiegellinie mit der Diopterspalte nicht in einer Ebene, so wird jene durch die Schräubchen x, y richtig gestellt, und weicht sie nach der Drehung des Spiegels vor- oder rückwärts aus, so wird das Schräubchen u, zweckmäßig angewendet, der Spiegellinie die richtige Stellung geben.

Ad 5. Auch hier können wir uns auf das §. 158 ad 3 Gesagte berufen. Sollte die Spiegellinie exzentrisch gestellt sein, so kann dieser Fehler durch die Schräubchen r, r', s, s' beseitigt werden. Prof. Pezelt giebt in dem oben erwähnten Werke ein direktes Verfahren an, die Exzentrizität der Spiegellinie zu erkennen und zu beseitigen, ich halte das indirekte Verfahren für entsprechender, weil man doch zuletzt die direkte Auflösung durch die indirekte prüft, somit die letztere für genauer anerkennt.

Ad 6. Diese und die folgende Rektifikation setzen voraus, daß der Kathetometer in einer freien und ebenen Gegend horizontal und fest, also auf die sub 3 angegebene Art aufgestellt ist. Will man nun die senkrechte Stellung des Spiegels gegen die Visirebene prüfen, so stelle man den Indexstrich d oder c auf ∞, dann soll der Spiegel gegen die Visirebene unter einem Winkel von 45^0 geneigt sein, und verfahre im Uebrigen genau wie bei der Rektifikation des Winkelrohres §. 152 ad b; findet eine Abweichung statt, so wird diese durch die Schräubchen n, n' beseitigt.

Daß hierdurch, sobald der Index d auf Null zeigt, die betreffenden Ebenen gegen einander senkrecht gestellt sind, folgt aus der Größe des Bogens bb'.

Ad 7. Bei dem Umstande, daß die Eintheilung des Limbus mittelst einer Theilscheibe bewirkt wird, dürfte in jener schwerlich ein Fehler vorkommen, will man aber dessen versichert sein, so konstruire man auf einem möglichst ebenen Terrain zwei neben einander liegende Quadrate ABCD und DEFA, Fig. 219, wo jede Seite 100 Fuß lang ist, multiplizire die auf einem der Bogen aa' oder bb' von 0 bis 1 aufgetragenen Zahlen mit 100 und trage diese in Fuß ausgedrückt auf den Seiten BC und FE von B und F angefangen auf, die zwischen 1 und ∞ enthaltenen Werthe aber nehme man als Divisoren zu dem gemeinschaftlichen Dividende 100 und trage die Quotienten in Fuß ausgedrückt von D gegen C und E auf, so werden auf den Seiten BC und DC, so auch auf DE und FE so viele Punkte aufgetragen und durch Pflöcke bezeichnet, als Intervalle auf einem der Bogen des Limbus sind.



Nach diesem wird das Instrument in A horizontal und fest gestellt, die direkte Visur auf B eingestellt und nun läßt man einen Gehülfen nach der Ordnung der Pflöcke von B angefangen einen Absteckstab aufstellen, so muß, sobald dieser letztere mit jenem in B in der Deckung erscheint, der Index genau auf einen

Strich des Limbus treffen, und zwar wird, so lange der Gehülfe auf der BC und CD geht, der Index g auf dem Bogen bb' sich bewegen, wodurch diese Eintheilung geprüft wird.

Kommt der Gehülfe in D an, so ist der Winkel BAD = 90°, der Index g so auch c stehen auf ∞, und geht jener von D über E gegen F, so bewegt sich der Index c auf aa' von ∞ gegen Null.

Anmerkung. Was wir hinsichtlich des Auftragens der Linien auf den Seiten DC und DE gesagt haben, gründet sich darauf, daß die $\text{tang. a} = \frac{1}{\text{cotang. a}}$ ist, hier aber der Halbmesser = 100 angenommen wurde.

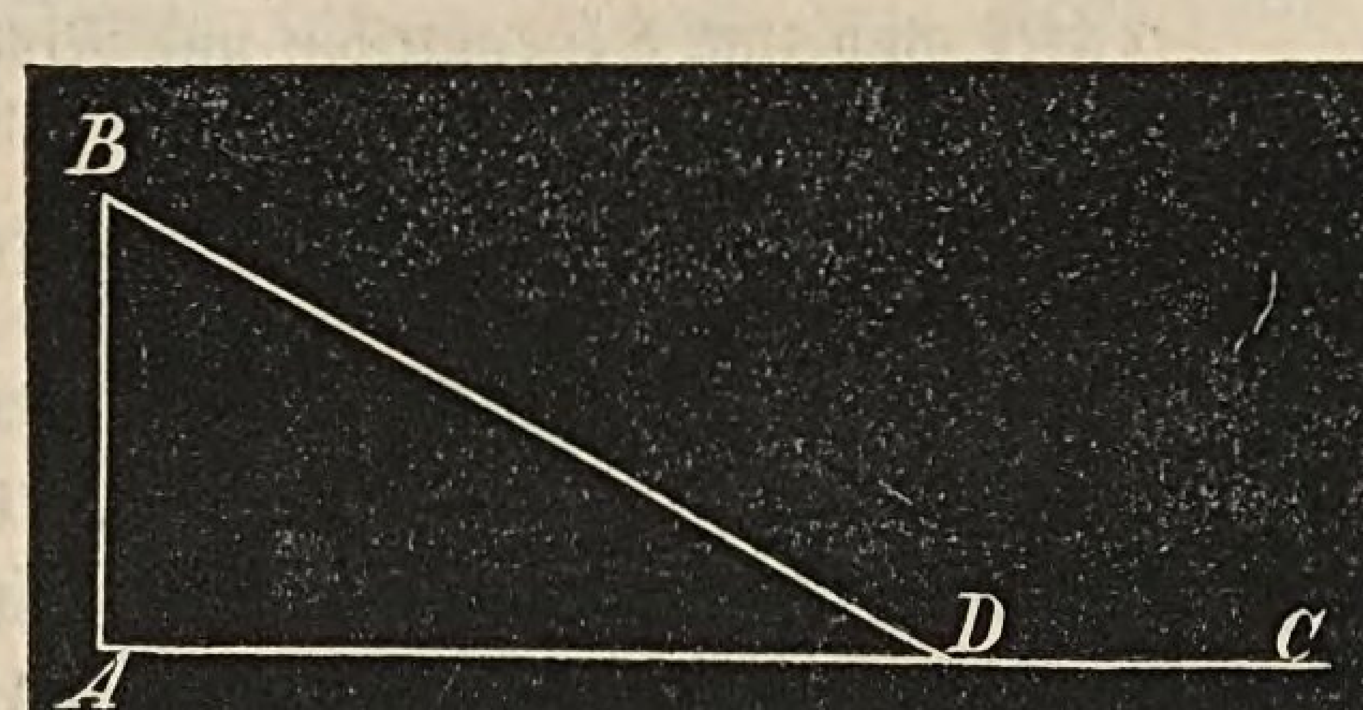
Gebrauch des Kathetometers.

§. 194. Aus der Menge von Aufgaben, welche mit diesem Instrumente aufgelöst werden können, heben wir nur zwei heraus, und verweisen jeden, der eine umständliche Belehrung über dasselbe wünscht, auf das hierüber erschienene Werk selbst.

Vor allem müssen wir noch einer Eigenthümlichkeit des Instrumentes erwähnen, welche fast bei jeder Auflösung in Betracht kommt, diese ist: Da die Eintheilung des Limbus keinen Nonius zuläßt, so würde man einen Winkel nicht mit der erforderlichen Schärfe in dem Falle bestimmen, als der Index zwischen zwei Striche zu stehen kommt; ändert aber der Beobachter seinen Standpunkt, so ändert sich auch der Winkel, den zwei Objekte in diesem Punkte bilden, und zwar wird jener größer, wenn man in dem einen Schenkel gegen das gesehene Objekt geht, in entgegengesetzter Richtung aber kleiner. In einem solchen Falle also, wo der Index nicht scharf mit einem Striche des Limbus übereinstimmt, bringt man beide mittelst der Mikrometerschraube F zur scharfen Uebereinstimmung und ändert seinen Standpunkt darnach, d. h. man geht vorwärts, wenn durch das Einstellen der Striche ein spitzer Winkel größer oder ein stumpfer kleiner, und zurück, wenn ein spitzer Winkel kleiner oder ein stumpfer größer geworden ist, und soweit, daß sich das direkt und jenes durch Reflexion gesehene Objekt decken.

1. Aufgabe. Die Entfernung zweier Objekte mittelbar zu bestimmen.

Auflösung. Man stelle nach Erforderniß den Index c oder d auf ∞, visire von dem einen Objekte A, Fig. 220, direkt, also vom Okulare über die Spiegellinie nach dem andern Objekte B, und lasse einen Stab C so stellen, daß er mit jenem B in der Deckung erscheint, so ist BAC = 90°; nun stellt man sich mit dem Instrumente in einem Punkte der Linie AD, z. B. in C, visirt direkt auf eines der Objekte, z. B. nach A, und dreht den Spiegel bei gelöster Mikrometerschraube so,

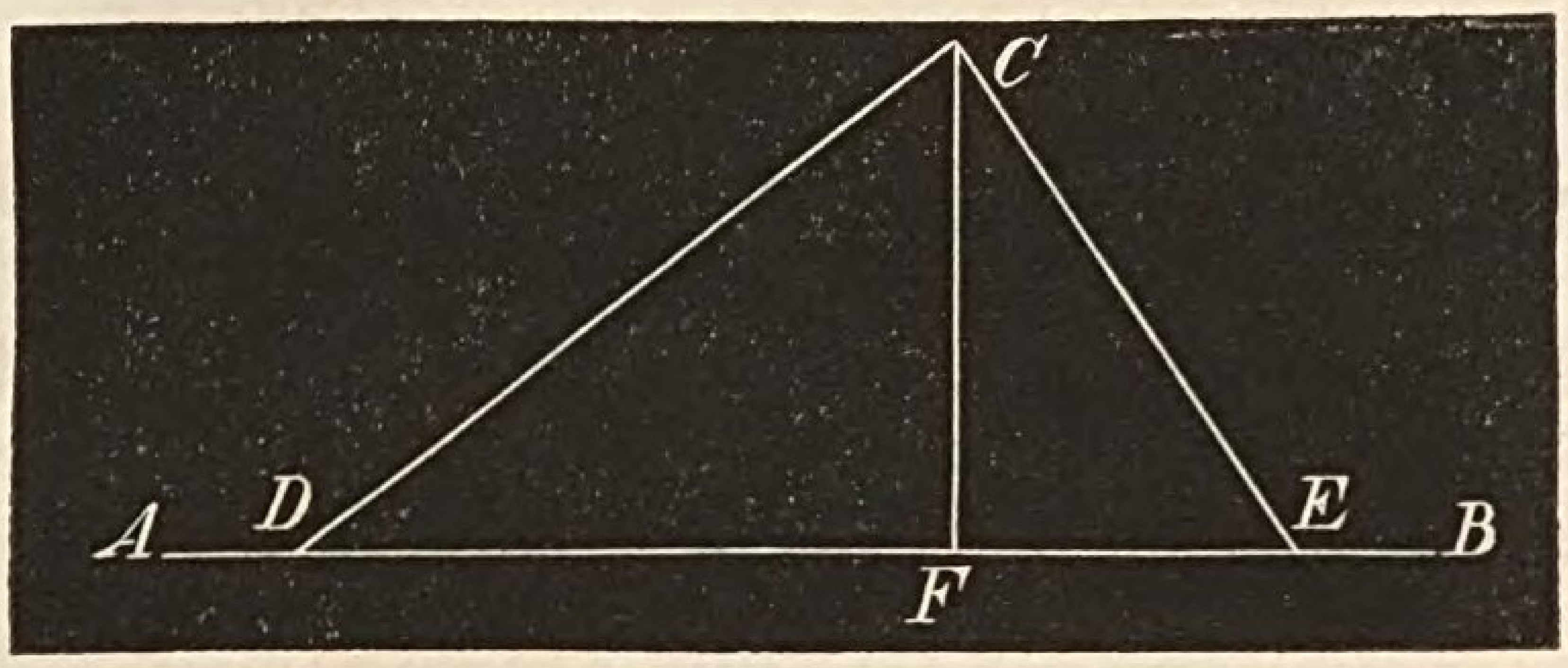


daß B mit A in der Spiegellinie erscheint. Trifft der Index nicht genau auf einen Strich des Limbus, so bringe man ihn mit dem nächstgelegenen zur Uebereinstimmung und ändere darnach seinen Standpunkt, dieser letztere sei D, und die

auf dem Instrumente abgelesene Tangente des Winkels BDA = m, so ist aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABD, AB = AD . m ..... 1); wird also AD gemessen, so ist auch AB bestimmt.

Zusatz. Nimmt man bei dieser Aufgabe AC als Abszissenlinie, C als den Anfangspunkt, so ist AC die Abszisse, AB die Ordynate des Punktes B. Die Aufgabe dient also, Ordynaten zu bestimmen, welche nicht direkt gemessen, jedoch gefällt werden können, denn der Fußpunkt der Ordynate, nämlich A, muß gegeben sein.

2. Aufgabe. Die Ordynate und Abszisse eines Punktes C, Fig. 221, zu bestimmen, wenn die erstere auf die Abszissenlinie AB nicht gefällt werden kann, der Punkt C jedoch von zwei andern D, E der Abszissenlinie sichtbar ist.



Auflösung. Sind D und E die Standpunkte, bei welchen der Index genau mit zwei Strichen des Limbus übereinstimmt, und ist tang. CDB = m, tang. CEA = n, so ist aus dem Dreiecke CDF Gleichung 1) CF = m . DF, aus dem Dreiecke CEF, CF = nEF, also m . DF = n . EF = n (DE — DF),

daher $DF = \frac{DE . n}{m + n}$ und $CF = \frac{n . m . DE}{m + n}$.

Wird also DE gemessen, und ist z. B. A der Anfangspunkt der Abszissen, so ist die Abszisse von C = AD + DF, und die Ordynate CF bestimmt.

Die Auflösung bleibt dieselbe, wenn die beiden Standpunkte D, E auf derselben Seite der Ordynate liegen, für diesen Fall findet man die Abszisse

$EF = \frac{DE . m}{n - m}$ und die Ordynate $CF = \frac{DEn . m}{n - m}$.

Aus diesen beiden Aufgaben ist ersichtlich, daß sich dieses Instrument vorzüglich zur Vermessung einzelner Polygone mittelst Abszissen und Ordynaten eignet, indem man bei der Anwendung desselben nur die Abszissen direkt zu messen braucht.

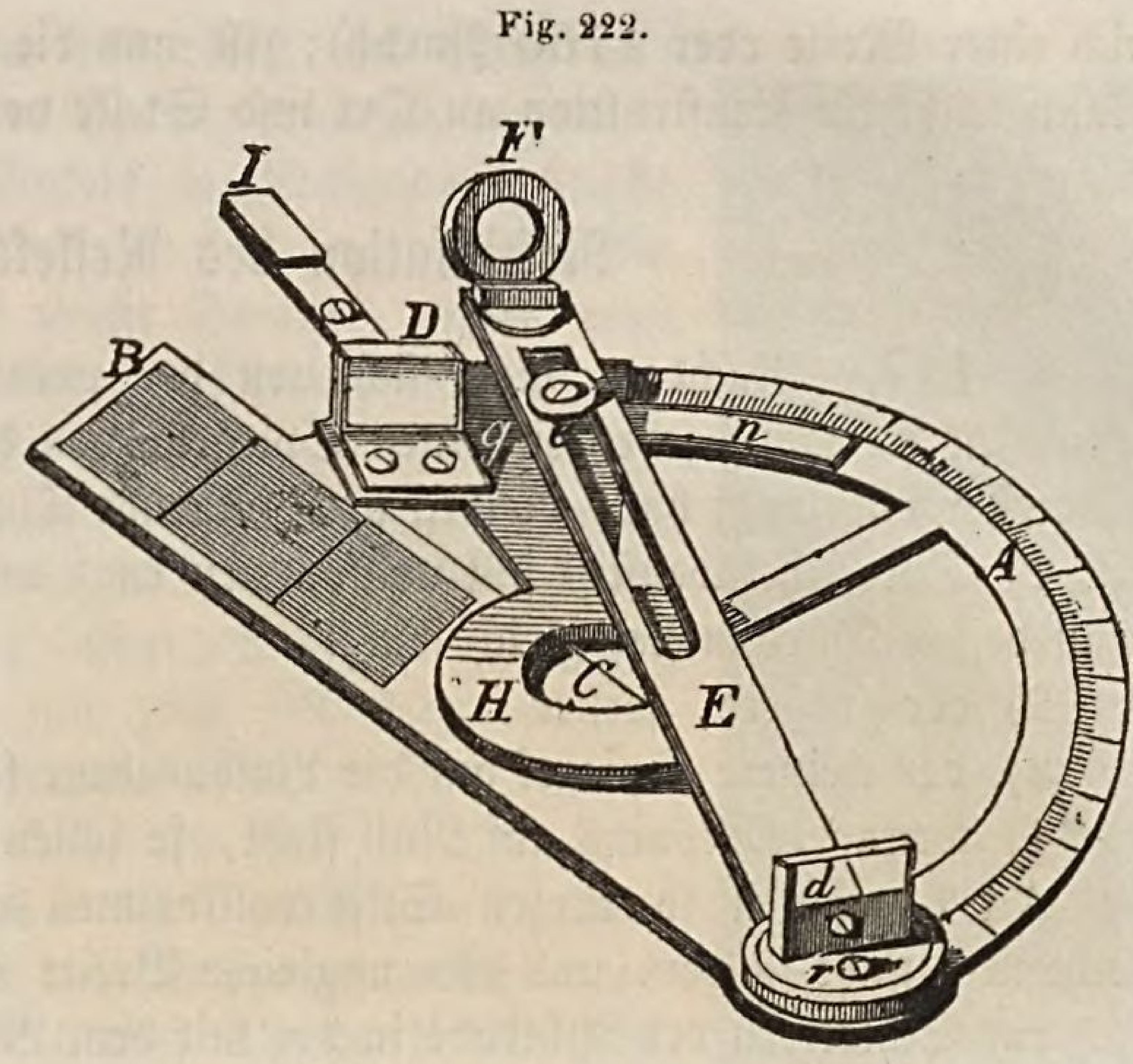
Zusatz. An diesem Instrumente ist noch eine kleine Libelle LM angebracht, wodurch dieses auch zum Höhenmessen und Nivelliren tauglich wird.

Der Reflektor.

§. 195. Der englische Oberst Douglas hat ein Winkelinstrument erfunden, dessen Konstruktion auf den §. 169 basirt ist.

Es besteht, wie die Fig. 222 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) zeigt, aus einem halben Kreise A von 4 Zoll Durchmesser, dessen Mittelpunkt C ist, die innere scharfe Kante des $5\frac{1}{2}$ Zoll langen, 1 Zoll breiten Lineals, B ist ein Durchmesser desselben. Die Alhidade E trägt an dem einen Ende einen halbbelegten auf ihr senkrecht stehenden Spiegel d, dessen Drehungspunkt genau in der Peripherie der Gradtheilung liegt, an dem andern Ende wird beim Ge-

Fig. 222.



brauche in den Ring F eine $1\frac{1}{2}$ Zoll lange Röhre eingeschraubt; die Okularöffnung dieser Röhre und die Mitte des Spiegels d bestimmen die Richtung der direkten Visur.

Die Alhidade ist durchbrochen, innerhalb dieses Schlitzes ist ein Stift e in die untere Platte G eingeschraubt, der Durchmesser des Stiftes ist der Breite des Ausschnittes gleich; die Platte G ist um einen mit der Peripherie des Kreises konzentrischen Ring H beweglich, ihre gegen das Lineal gewendete ebenfalls scharfe Kante würde verlängert durch C gehen, mit ihr ist ein vortragender Nonius n fest verbunden, der auf der Peripherie des in halbe Grade abgetheilten Limbus den jedesmaligen Stand der Alhidade bis auf 2 Minuten angiebt.

Auf der Platte G ist ein ganz belegter Spiegel D, dessen Mitte vertikal über der Kante; der konstante Winkel im Mittelpunkte des Limbus zwischen der Mitte des Spiegels D und der Achse des Stiftes e beträgt 15 Grade.

Wird nun mittelst der kleinen Handhabe I die Platte G, somit auch der Spiegel D bewegt, so wird mittelst des Stiftes e die Bewegung der Alhidade, also auch der Okularröhre und dem halbbelegten Spiegel, mitgetheilt.

Gebrauch dieses Instrumentes.

§. 196. Die direkte Visur wird stets auf das links stehende Signal eingestellt, sodann mittelst der Handhabe I der Spiegel D so weit gedreht, bis das rechts stehende Signal im Gesichtsfelde erscheint, und dieses sodann, während der Limbus mit der Ebene des Winkels parallel gehalten wird, zur Deckung gebracht; da aber die Bewegung des ganz belegten Spiegels auch eine Aenderung der direkten Visur zur Folge hat, so muß, um beide Objekte in der Deckung zu erhalten, das Instrument während der Pointirung selbst etwas gedreht werden.

Ist nun der Winkel gemessen, so kann seine Größe entweder in Graden bis auf 2 Minuten genau abgelesen oder, was einfacher ist, graphisch bestimmt werden. Man legt in diesem Falle das Instrument auf das Papier, sticht in jenem Punkte, wo der Scheitel des Winkels liegen soll, eine feine Nadel, legt den deshalb angebrachten feinen Strich im Punkte C genau an die Nadel, die Kante des Lineals an den einen Schenkel, zieht neben der zweiten Kante eine feine Bleilinie, so ist der Winkel konstruirt.

Zur Bequemlichkeit ist noch an dem Lineale ein tausendtheiliger Maßstab (bei den in England verfertigten Instrumenten ist dieser Maßstab 4 englische Zoll

gleich einer Meile oder 1760 Yards); ist nun die Länge der Schenkel gemessen, so kann leicht die Konstruktion an Ort und Stelle vorgenommen werden.

Rektifikation des Reflektors.

§. 197. Nachdem man sich von der parallelen Begrenzung, von der fleckenlosen Belegung jedes einzelnen Spiegels von den geraden Kanten der beiden Halbmesser überzeugt hat, bleiben noch folgende Theile zu untersuchen:

1) Der Alhidadenstift soll vollkommen rund und die Breite des Ausschnittes genau dessen Durchmesser gleich sein;

2) der größere, ferner

3) der kleinere Spiegel auf die Limbusebene senkrecht stehen;

4) wenn der Nonius auf Null steht, so sollen beide Spiegel parallel sein.

Ad 1. Einen so kurzen Stift vollkommen rund zu drehen, ist für den Mechaniker nicht schwer, und eine ungleiche Breite des Ausschnittes verrathet sich durch ein Schlottern der Alhidade in der mit dem Limbus parallelen Richtung.

Ad 2. Das Mittel, die senkrechte Stellung des Spiegels zu prüfen, ist bereits §. 175 angegeben worden. Um dies hier anwenden zu können und für die Hilfsdiopter am Limbus Platz zu gewinnen, dürfte es am besten sein, die Alhidade sammt dem kleinen Spiegel weg zu nehmen, den Nonius auf Null zu stellen, das Hilfsdiopter mit der Okularöffnung an die Stelle, wo der kleine Spiegel war, und das zweite vor den größeren Spiegel, beide auf die Ebene des Lineals zu stellen. Wie die Neigung des Spiegels zu ändern ist, kann leicht aus der Zeichnung entnommen werden.

Ad 3. Man stellt bei dem kompleten Werkzeuge den Index auf Null, und pointirt von der Okularröhre direkt auf die oberste Kante eines langen Hauses oder auf irgend eine horizontale Linie, hält das Instrument so, daß ein Theil derselben in der belegten Hälfte, der andere neben derselben direkt sichtbar wird. Bilden beide Theile eine einzige gerade Linie, so ist die Stellung des kleinen Spiegels richtig; erscheint das Bild der horizontalen Linie niedriger als diese, so ist der Spiegel nach vorne geneigt.

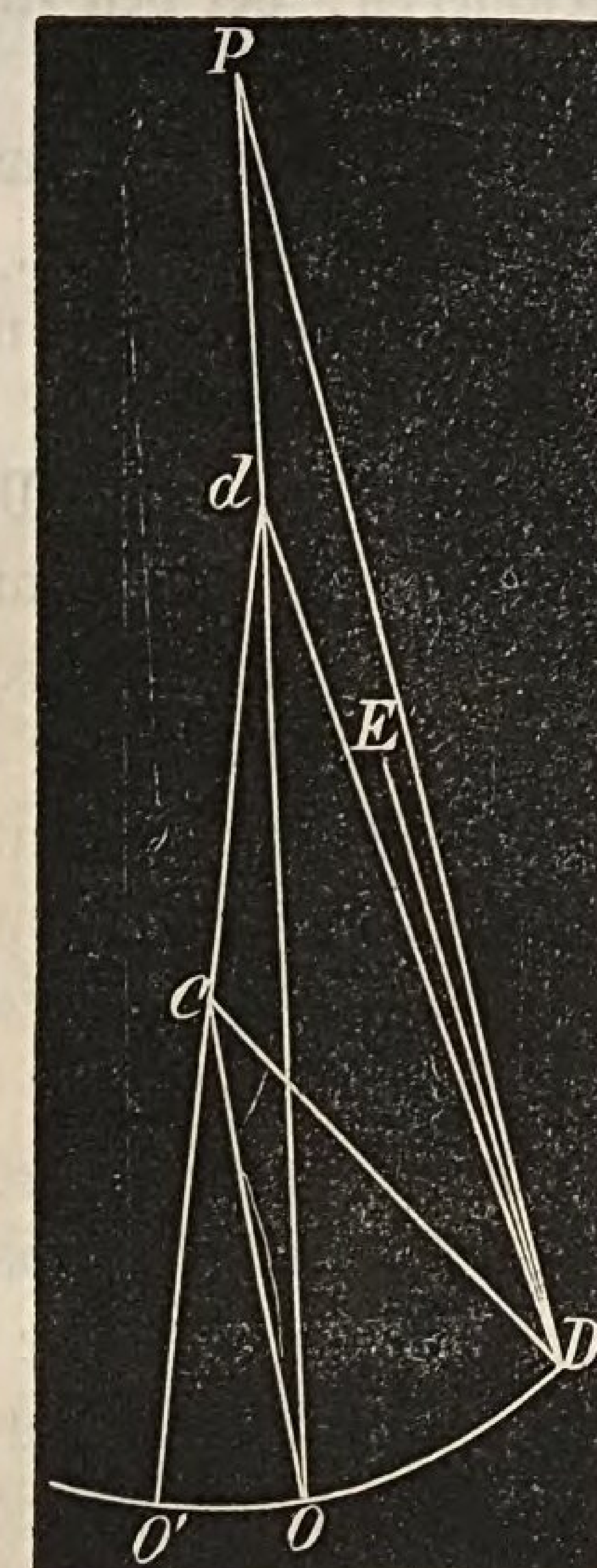
Ad 4. Während der Index auf Null zeigt, legt man das Instrument auf das horizontal gestellte Tischblatt, pointirt direkt auf einen im Horizonte liegenden, wenigstens 500 Klftr. entfernten Gegenstand, so muß das durch zweimalige Reflexion entstandene Bild mit dem direkt gesehenen Objekte in der Deckung erscheinen, wo nicht, so wird der kleine Spiegel um das Erforderliche gedreht, nachdem die Schraube r etwas gelüftet worden ist; sind die Bilder in der Deckung, so wird der Spiegel mit derselben Schraube festgestellt.

Bei diesem Instrumente ist noch ein Umstand zu erwähnen, der einen Fehler verursachen, aber der Konstruktion des Werkzeuges wegen nicht weggebracht werden kann; es ist der sogenannte Collimationsfehler, den wir zwar erst bei dem nachfolgenden Instrumente näher besprechen, hier aber nur darauf aufmerksam machen wollen.

Da mit dem Instrumente nicht immer auf sehr große Distanzen visirt wird, so müßte, falls das direkt gesehene Objekt P, Fig. 223 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite), in einer nicht bedeutenden Entfernung steht, erst der

Stand der Alhidade, während das direkt und durch Reflexion gesehene Objekt d in der Deckung erscheint, abgelesen und bei der Messung des Winkels in Rechnung gebracht werden; um aber dies zu Stande zu bringen, müßte die direkte Visur, somit auch der große Spiegel, rechts vom Nullpunkte gedreht werden können, was jedoch nicht angeht.

Fig. 223.



Ist Od die direkte Visur nach P, in D der große Spiegel, ED das Einfallsloth, in d der halbbelegte Spiegel, der konstante Winkel OCD = 15°, so ist bekanntlich (§. 169) CDE = 11° 15′; lassen wir OCO′ = 1′ bedeuten, so ist CdO = 30″, und weil O′CD der äußere Winkel des gleichschenkligen Dreieckes dCD, so ist

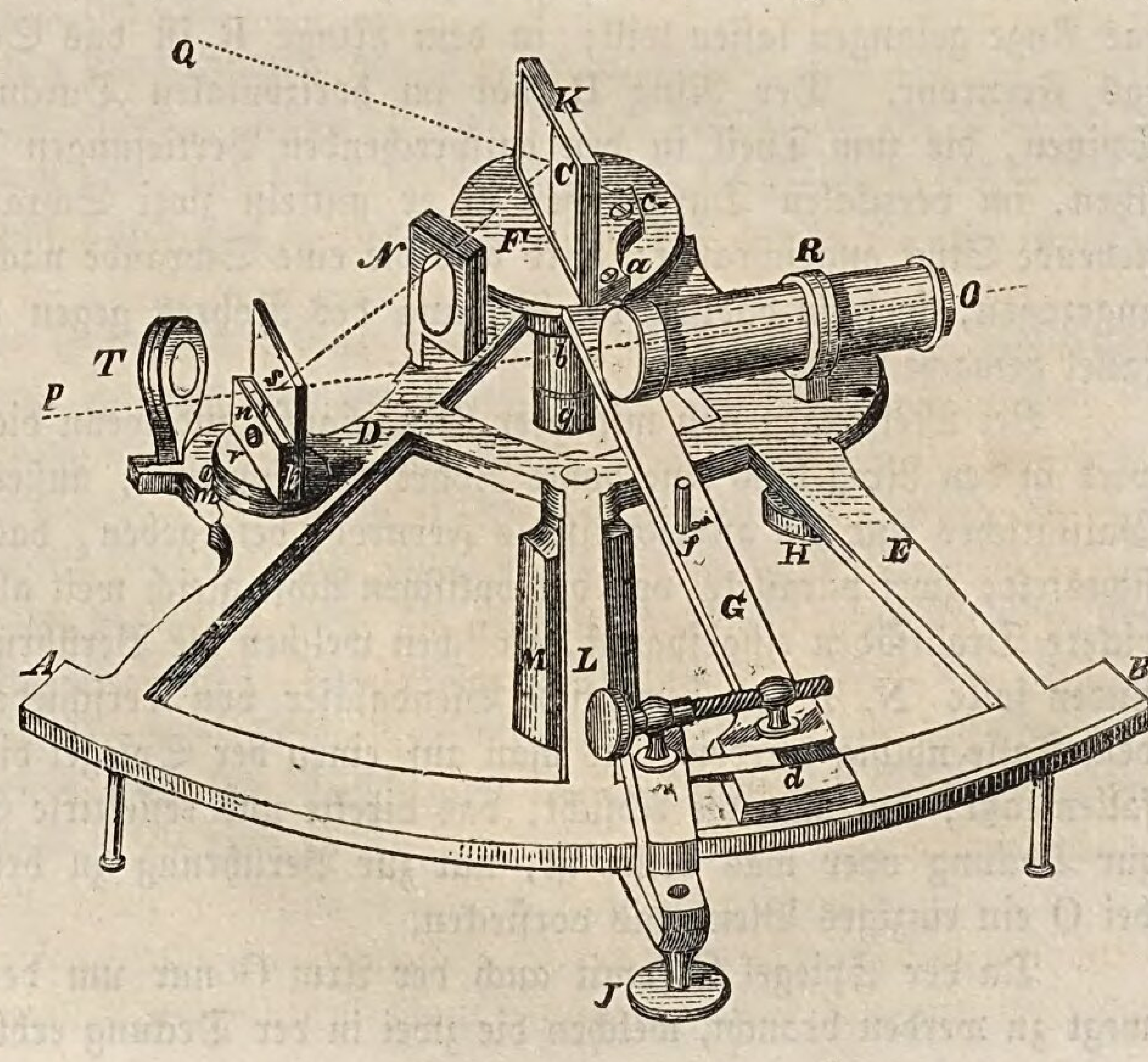
$$CdD = CDd = 7^0\ 30'\ 30'',$$

daher dDE = EDP = 3° 44′ 30″, dDP = 7° 29′, und dPD = 1′, weil ferner an dem Instrumente CD = 2″ ist, so folgt aus dem Dreiecke CdD; dD = 3·965 Zoll und aus dDP, dP = 24·66 Klftr.; d. h. ist das direkt gesehene Signal 24·66 Klftr. entfernt, so beträgt der bei der Messung des Winkels begangene Fehler noch eine Minute; bei kürzeren Distanzen offenbar mehr.

Endlich wollen wir noch erwähnen, daß bei einem sehr spitzen Winkel der Scheitel hinter dem Auge des Beobachters liegt.

Der Spiegelsextant.

§. 198. Dieses Instrument bildet gleichsam die Grenze zwischen der praktischen Geometrie und der Astronomie; seine in Fig. 224 dargestellte Einrichtung ist auf die Sätze §. 165 und 166 gegründet und folgende: der Limbus besteht aus einem messingenen Kreisausschnitte ABDE, der Mittelpunkt desselben liegt in der durch C auf den Limbus senkrecht stehenden Linie, der Bogen AB ist ungefähr der sechste Theil der ganzen Peripherie (daher der Name Sextant), der Halbmesser des Bogens ist bei den Sextanten



verschieden, bei den kleinsten 4, bei den größten 10 Zoll. Am Mittelpunkte des Ausschnittes sind die beiden Schenkel D, E durch eine volle Scheibe verbunden, auf dieser liegt eine zweite F mit der ersten kongruent und um den Mittelpunkt des Limbus beweglich.

Die Scheibe F und der mit ihr verbundene Arm G bilden die Alhidade; die technische Ausführung der Verbindung des Limbus mit der Alhidade ist die gewöhnliche; in dem Mittelpunkte der Scheibe F nämlich ist eine stählerne Achse senkrecht auf diese, an die unterhalb liegende Scheibe dagegen die Hülse b befestigt, die untere Scheibe und Hülse sind durchbohrt, in diese Oeffnung paßt die Achse der Scheibe F und kann durch eine Schraube g fester angezogen werden. Senkrecht auf F ist ein messingenes Rechteck von etwa $1\frac{1}{2}$ Quadratzoll durch die Schräubchen a, c und ein drittes, in der Zeichnung nicht sichtbares, befestigt, an diesem Rechtecke liegt ein eben so großer ganz belegter Spiegel C, und beide, das Rechteck und der Spiegel, können in dem metallenen Rahmen K durch ein rückwärts angebrachtes Schräubchen fest aneinander gedrückt werden.

Die Alhidade hat bei I die Klemm-, bis L die Mikrometerschraube, um den Stift f dreht sich eine Loupe, die wegen der feinen Eintheilung des Limbus und daher auch des Nonius unentbehrlich ist.

Auf dem Limbus steht ferner ein zweiter etwas kleinerer Spiegel s senkrecht, ist unbeweglich, nur zur Hälfte belegt, an der obern durchsichtig, das Schräubchen n drückt den Spiegel mittelst des Rahmens k an das aus der Platte r hervorstehende, mit dem belegten Theile des Spiegels gleich große Rechteck t; durch die kleine Schraube m, die einzige Rektifikationsschraube an beiden Spiegeln, kann die Neigung des Spiegels gegen den Limbus, wenn n etwas nachgelassen wird, geändert werden. Der Fernrohrträger geht durch die Limbusebene durch und kann mittelst der Schraube H höher oder tiefer geschraubt werden, je nachdem man, um beide Objekte gleich deutlich zu sehen, mehr direktes oder reflektirtes Licht in das Auge gelangen lassen will; in dem Ringe R ist das Schraubengewinde für das Fernrohr. Der Ring R hat im horizontalen Durchmesser zwei konische Spitzen, die zum Theil in den entsprechenden Vertiefungen des Fernrohrträgers sitzen, im vertikalen Durchmesser ist er mittelst zwei Schräubchen an das vorstehende Stück angeschraubt; wird also die eine Schraube nachgelassen, die andere angezogen, so kann dadurch die Neigung des Rohres gegen die Limbusebene parallel gemacht werden.

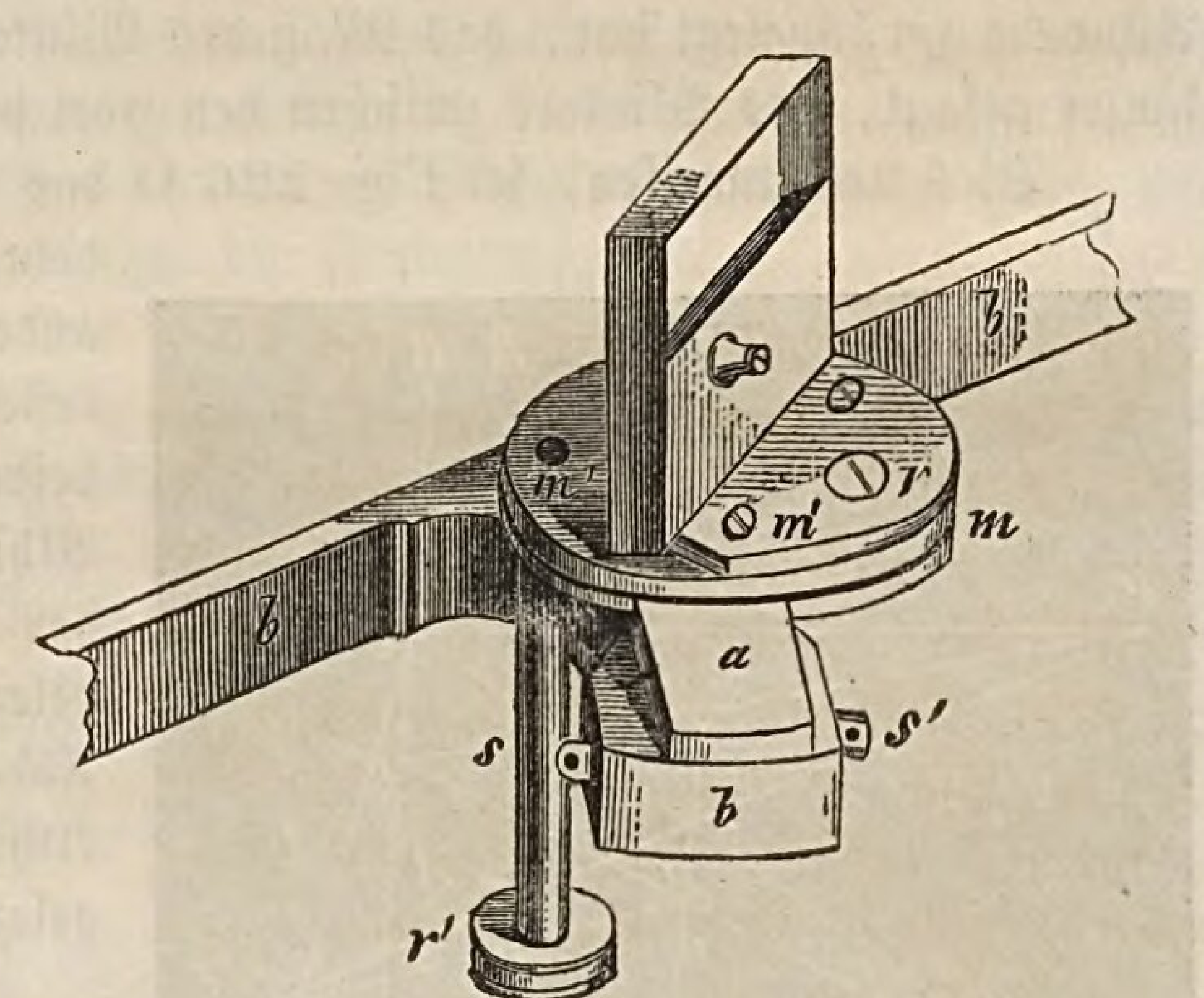
Bei Messungen von minderer Genauigkeit und wenn die Objekte nahe sind, wird in den Ring blos eine hohle Röhre eingeschraubt, außer dieser ist noch ein Galiläisches und ein astronomisches Fernrohr beigegeben, das letztere hat im Gesichtsfelde zwei parallele, von der optischen Achse gleich weit abstehende, aber etwas dickere Drahtfäden eingespannt, zwischen welchen die Berührung der Bilder stattfinden soll; N, T sind bewegliche Blendgläser von verschiedenen Farben, die in dem Falle nöthig werden, als man auf einen der Spiegel direkte Sonnenstrahlen fallen läßt; hat man die Absicht, das direkte und reflektirte Sonnenbild entweder zur Deckung oder was besser ist, nur zur Berührung zu bringen, so kann man bei O ein einziges Blendglas vorstecken.

Da der Spiegel C somit auch der Arm G nur um den halben Winkel bewegt zu werden braucht, welchen die zwei in der Deckung erblickten Objekte P und

Q miteinander in C bilden, so sollte man das abgelesene Maß mit zwei multipliziren, um das richtige Resultat zu erhalten; diese Multiplikation entbehrlich zu machen, sind auf dem Limbus halbe Grade als ganze numerirt, wodurch es möglich wird, den gemessenen Winkel sogleich abzulesen.

Die Gradeintheilung ist auf Silber, unmittelbar von 10 zu 10 Minuten aufgetragen, aber nach dem eben Gesagten von 20 zu 20 bezeichnet, drei bis fünf Grade dieser Eintheilung liegen rechts vom Nullpunkte, dieser Theil heißt die Exzedens; der nachtragende Nonius giebt bei dem beschriebenen Instrumente 20, bei größeren Sextanten auch 15 Sekunden.

Bei mehreren Spiegelsextanten hat der kleine Spiegel wegen der Rektifikation folgende in Fig. 225 dargestellte Einrichtung. Die Scheibe m hat in ihrer Mitte eine auf die untere Ebene senkrecht stehende konische Achse und ihr Ansatz a einen cylindrischen etwas dickeren Stift; in der Limbusebene b sind dagegen die entsprechenden Oeffnungen gebohrt, so daß in die eine die konische Achse genau paßt und durch eine Schraube fest angezogen wird; die runde Oeffnung für den Stift ist jedoch etwas weiter als dieser, die zwei Schräubchen ss' wirken zwar unmittelbar auf den Stift, werden sie aber in demselben Sinne gedreht, so drehen sie die Scheibe, halten sie aber, gehörig angezogen, auch fest.



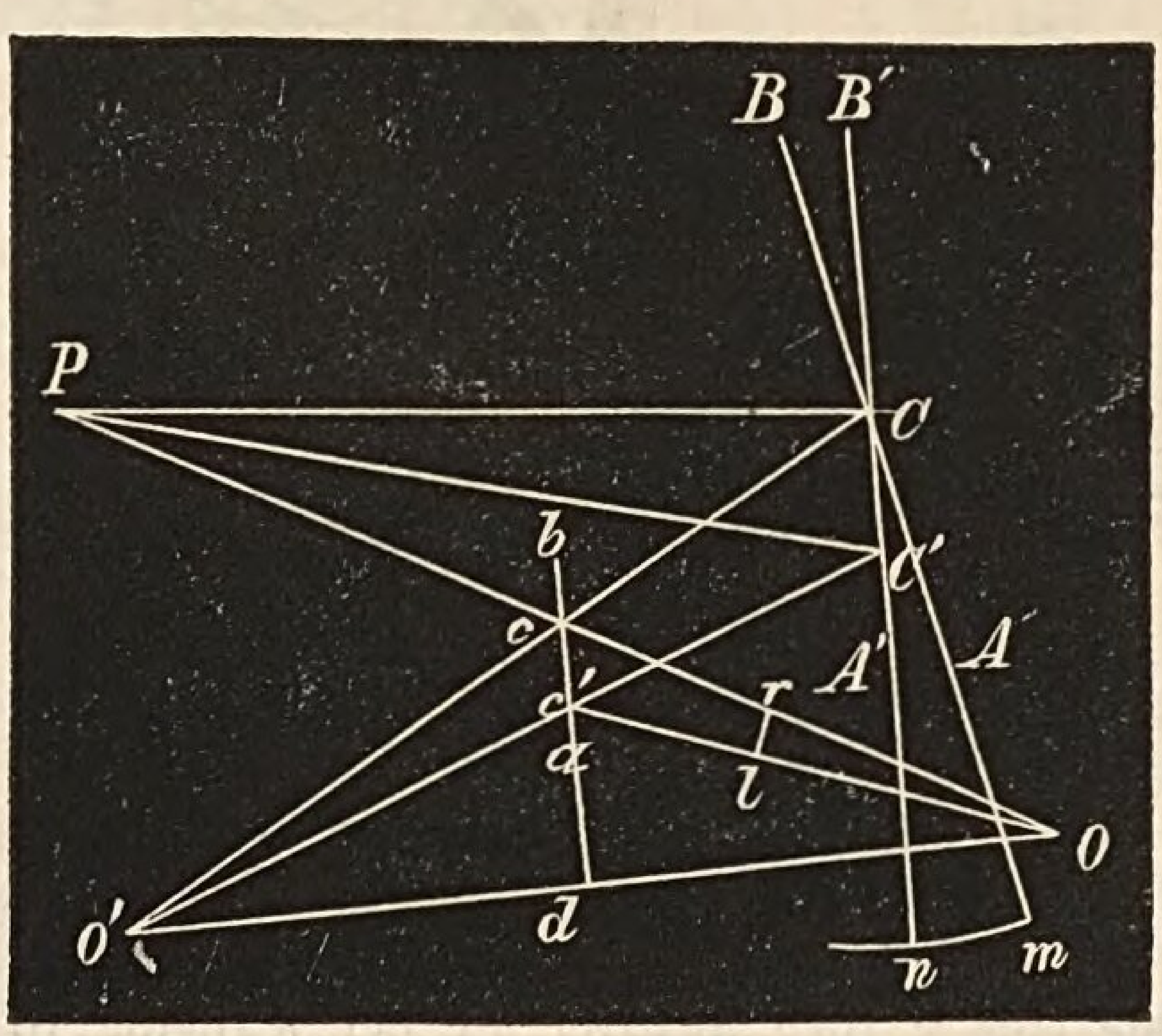
Oberhalb der Scheibe m ist eine zweite m', diese hat in einem Durchmesser zwei konische Spitzen, welche in den Vertiefungen der Scheibe m stehen, senkrecht auf diesem Durchmesser zwei Schrauben, wovon die eine r ihre Mutter in der Scheibe m, jene r' in m' hat, man sieht, daß durch diese Schrauben die Neigung des Spiegels gegen den Limbus, und durch jene ss' der Neigungswinkel beider Spiegel geändert werden kann.

Zu jedem dieser Instrumente wird noch eine empfindliche Libelle beigegeben. Diese weichen in ihrer Fassung von den gewöhnlichen Röhrenlibellen etwas ab, die Glasröhre ist entweder blos an ihren Enden in hölzerne Stücke eingekittet, wovon das eine zwei gleiche unbewegliche Füße, das gegenüber liegende Stück in der Mitte einen einzigen Fuß hat, der zugleich die Rektifikationsschraube vertritt; die Glasröhre ist dann graduirt; oder die Röhre ist in ein parallelepipedisches hölzernes Stück ganz eingelassen, das unten hinsichtlich der Füße die eben angegebene Einrichtung hat, oben aber ist neben der Glasröhre ein elfenbeinernes Lineal befestigt, welches statt der Graduirung der Libelle eine Eintheilung trägt, die Intervalle sind nahe 0·05 Zoll groß.

Den Winkel zwischen den parallelen Fäden des Fernrohres zu bestimmen.

§. 199. Will man den Neigungswinkel zwischen den durch die Mitte des Okulars und die beiden Fäden des Rohres gelegten Ebenen bestimmen, so drehe man das Rohr so, daß die Fäden auf die Ebene des Sextanten senkrecht sind, stelle diesen auf einen Meßtisch und die Limbusebene mittelst der zugehörigen Libelle horizontal. Nun richte man den rechten Faden des Rohres auf einen im Horizonte liegenden gut beleuchteten Punkt, bringe das durch Reflex entstandene Bild zur Deckung und lese den Stand der Alhidade ab; endlich bewege man diese mittelst der Mikrometerschraube bis das durch Reflex entstandene Bild auf dem zweiten also linken Faden erscheint, so ist der Bogen, welchen der Index der Alhidade zurückgelegt hat, das Maß des Winkels zwischen den zwei Ebenen, oder kürzer gesagt, des Winkels zwischen den zwei parallelen Fäden.

Dies nachzuweisen, sei Fig. 226 O das Auge, OP die direkte Visur über dem Faden r, ab der eine, AB der andere Spiegel, PCcO der Weg des reflektirten Strahles bei der Deckung beider Bilder, und m der Stand der Alhidade am Limbus; ferner sei PC'c'O der Weg, welchen der Strahl zurückgelegt hat, damit das Bild am linken Faden l erscheint, n der Stand der Alhidade, somit n — m = α der abgelesene Winkel.



Ist Od = O'd senkrecht auf ab, so werden die Strahlen auf den Spiegel AB so auffallen, als kämen sie von O', auch ist rOl = cO'c' = x der zu bestimmende Winkel; setzen wir BCP = O'CA = a, CC'P = O'C'A' = b, CPC' = β, so ist B'CP = a + α, daher a + α = b + β; b = x + a — α, somit x = 2α — β, aber aus der Entstehung des Winkels β folgt, daß er α gleich ist, daher ist x = α ... 1).

Da aber auf dem Limbus halbe Grade als ganze nummerirt sind, so muß das abgelesene Maß für den Winkel α durch zwei dividirt werden, um x zu erhalten.

Rektifikation des Spiegelsextanten.

§. 200. Die Bedingungen, denen ein rektifizirter Sextant genügen muß, sind, wie die allgemeine Untersuchung der Fehlerquellen bei den Spiegelinstrumenten gezeigt hat, folgende:

1) die optische Achse muß mit der Limbusebene parallel sein;
2) beide Spiegel müssen auf diese Ebene senkrecht stehen;
3) wenn die Alhidade auf Null zeigt, sollen die spiegelnden Ebenen parallel sein.

Die optische Achse des Rohres mit der Limbusebene parallel zu stellen.

Man schraube das astronomische Fernrohr mit den zwei Drähten ein, diese mit der Limbusebene parallel, und bringe zwei gut sichtbare Objekte an dem einen Faden zur Berührung; neigt man dann den Sextanten so, daß die Bilder sich an dem andern Faden befinden, so müssen sie sich auch hier noch berühren, wenn die optische Achse des Rohres mit der Limbusebene parallel ist.

Denn weil die Fäden nahe von der optischen Achse gleich weit abstehen, so ist bei der Berührung der Bilder an dem oberen Faden die Visur unter einem Winkel nach aufwärts, bei der zweiten Berührung um denselben Winkel nach abwärts geneigt, der Fehler somit in beiden Fällen derselbe, die Bilder werden also in der Berührung bleiben.

Berühren sich jedoch die Bilder nicht, so kann man die Neigung des Rohres mittelst der zwei Schräubchen am Ringe korrigiren, sollten jedoch die hiezu nöthigen Schräubchen fehlen, so müßte man den Fehler in die Rechnung bringen; man bestimmt zuerst den Winkel zwischen den beiden Parallelfäden, dieser sei δ, und sodann die Neigung des Fernrohrs gegen die Limbusebene.

Hat man nämlich, während die beiden Bilder an dem einen Faden in Berührung standen, an der Alhidade α_1 sodann die Berührung an dem anderen Faden zu Stande gebracht und α_2 abgelesen, und ist γ der Neigungswinkel des Rohres gegen die Limbusebene, so ist im 1sten Falle $\gamma + \frac{\delta}{2}$, im 2ten $\gamma - \frac{\delta}{2}$ der Winkel der Visirebene gegen den Limbus, bezeichnet man das richtige Ablesen am Limbus mit α, so ist Gleich. 2) §. 178

$$\alpha_1 = \alpha + \tfrac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\delta}{2}\right)^2 \text{tg.}\,\alpha,\quad \alpha_2 = \alpha + \tfrac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\delta}{2}\right)^2 \text{tg.}\,\alpha,$$

daher $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma\delta\ \text{tg.}\,\alpha$, und $\gamma'' = \dfrac{(\alpha_1'' - \alpha'')\ \text{cotg.}\,\alpha}{\delta''\ \sin.\,1''}$ . . . . 1),

wobei der kleinere Bogen immer zu demjenigen Faden gehört, der näher an der Sextantenebene liegt.

Den größeren Spiegel auf die Limbusebene vertikal zu stellen.

Ein Mittel, die vertikale Stellung des ganz belegten Spiegels zu prüfen, ist bereits §. 175 angegeben worden und obschon durch dieses der Fehler wenigstens bis auf 3 Minuten weggebracht werden kann, so wollen wir hier noch eine zwar umständlichere dafür aber schärfere Probe angeben; diese ist nur aus dem Grunde umständlicher, weil hiezu noch andere aber gewöhnlich vorhandene Apparate nöthig sind. Bei dieser Untersuchung wird der Sextant auf das Tischblatt und der Limbus mit Hilfe der Stellschrauben des Stativs genau horizontal, in einer Entfernung von 8 bis 10 Klftrn. vom Tische ein Nivellirinstrument oder ein Theodolit so hoch gestellt, daß die horizontale Visur auf die Mitte des Spiegels trifft, sodann das Rohr um einen Winkel gewendet, in dieser Richtung ein gut sichtbares Objekt (eine Nivellirtafel) genau in die horizontale Visur eingestellt, endlich das Rohr

wieder gegen den Spiegel gerichtet. Dreht man nun langsam die Alhidade, so muß, wenn der Spiegel vertikal steht, endlich ein Augenblick kommen, bei welchem die von dem erwähnten Objekte auf den Spiegel horizontal fallenden und dort reflektirten Strahlen auf das Objektiv fallen; diese werden sodann, weil sie parallel mit der optischen Achse kommen, genau in dem Durchschnitte des Fadenkreuzes zu einem Bilde vereinigt.

Diese Probe hängt nur von der Güte der Libellen ab, mit welchen der Limbus und die optische Achse horizontal gestellt worden sind. Sollte das Bild oberhalb oder unterhalb des Durchschnittes gehen, so ist eine Korrektion an dem Spiegel nöthig, die nur durch Unterlegen von Papierstreifen entweder von der belegten Seite oder an dem Theile, mit welchem der Spiegel an dem Limbus befestigt ist, geschehen kann, da keine Korrektionsschrauben hiezu angebracht sind.

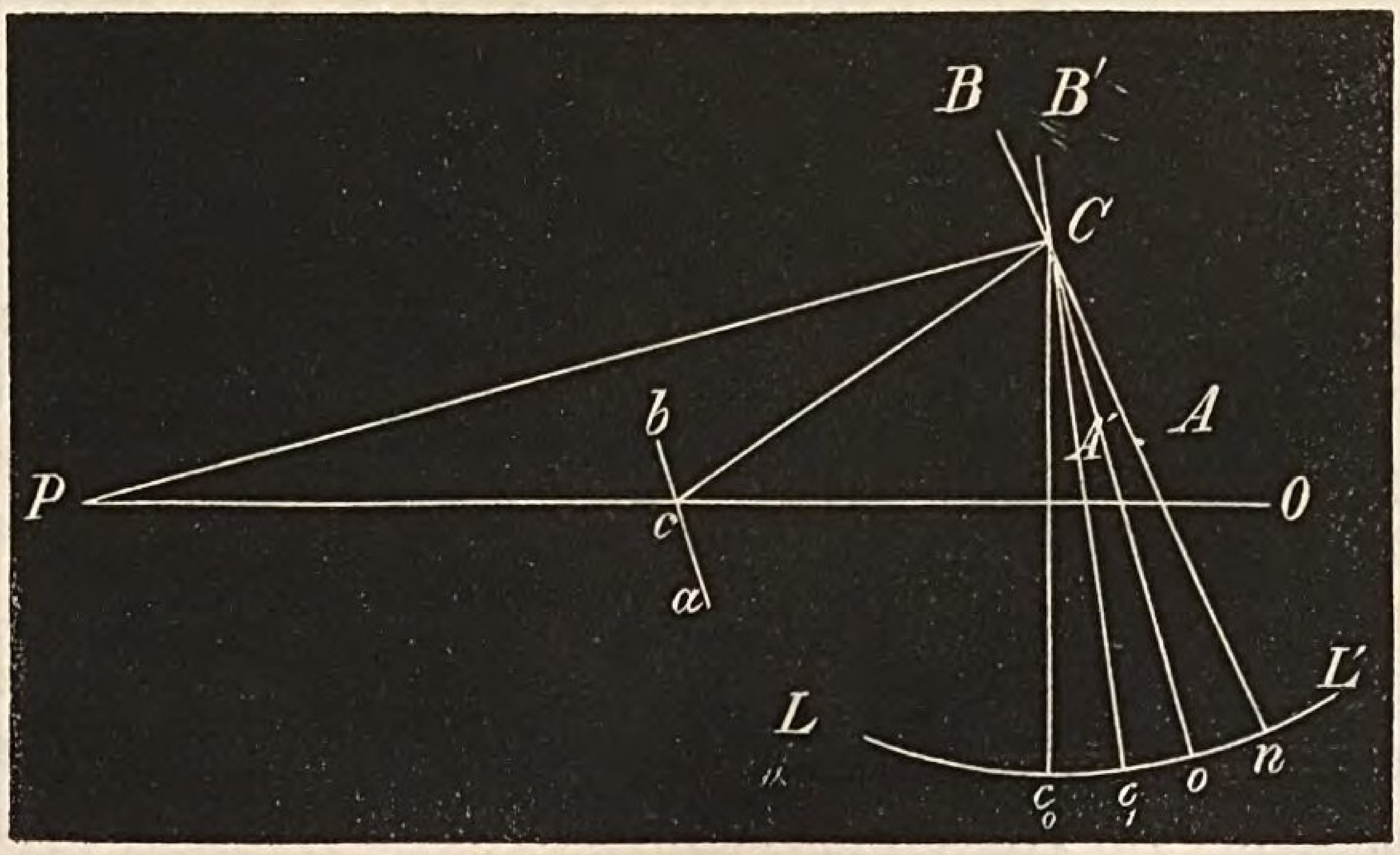
Den kleinen Spiegel auf die Ebene des Limbus senkrecht zu stellen.

Um zu prüfen ob der halbbelegte Spiegel richtig gestellt ist, versuche man das direkt gesehene und das zweimal reflektirte Bild desselben terrestrischen Objektes zur Deckung zu bringen, wobei, wenn der Sextant auf einer Unterlage ruht, die Deckung sicherer beurtheilt werden kann; ist dies möglich, so stehen beide Spiegel auf dem Limbus senkrecht, was leicht nachzuweisen ist. Kann man aber keine Deckung zu Stande bringen, gehen also bei einer Drehung der Alhidade beide Bilder nebeneinander vorbei, so bringe man die Bilder senkrecht unter einander, und dann durch die Neigung des kleinen Spiegels zur Deckung.

Welche Schrauben dieser Korrektion wegen angebracht sind, ist bereits bei der Beschreibung des Instrumentes angegeben worden.

Den Fehler des Index zu bestimmen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Verlängerung des größeren Spiegels durch den Nullpunkt der Alhidade gehe, daß also wenn Fig. 227 P ein terrestrisches Objekt, ab der eine, AB der andere Spiegel und dieser so gestellt ist, daß dem Auge in O die Bilder gedeckt erscheinen, die Alhidade, diese als Verlängerung des Spiegels AB angenommen, auf dem Limbus LL z. B. bei n Graden stehen bleibe, und daß, wenn das anvisirte Objekt unendlich weit entfernt ist,



somit AB mit ab parallel, jener somit um den Winkel ACA' = e gedreht wird, die Alhidade dann genau auf Null stehe.

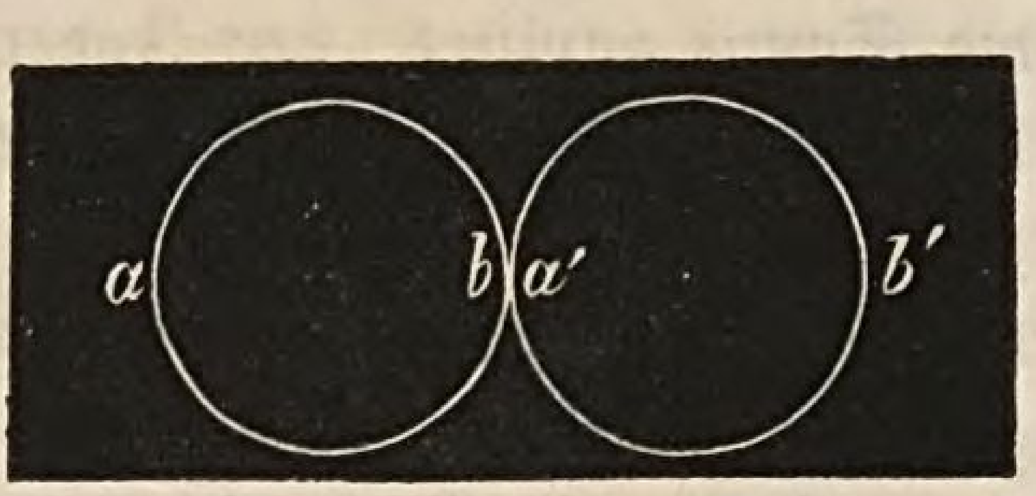
Nehmen wir aber an, während beide Spiegel so gestellt sind, daß P direkt und durch Reflexion dem Auge Licht sendet, zeige der Index auf c_1, so würde der Spiegel AB bei einer unendlichen Entfernung eines Objektes ebenfalls um e gedreht werden müssen, die Alhidade würde dann nicht Null, sondern c_0 angeben, offenbar ist dann $c_0 = c_1 + e \ldots 2)$.

Diesen Winkel, welchen die Alhidade angiebt während sie auf Null stehen sollte, nennt man den Index- oder auch wie beim Theodoliten den Collimationsfehler, und er ist zu jedem gemessenen Winkel zu addiren, also positiv, wenn er auf der Exzedens liegt, im Gegentheile negativ.

Es ist besser, diesen Fehler, der nicht konstant bleibt, gar nicht wegzubringen, bei vielen Sextanten kann er auch nicht weggebracht werden, weil den Spiegeln keine drehende Bewegung ertheilt werden kann, sondern jedesmal vor einer Messung neu zu bestimmen und in die Rechnung zu nehmen.

In der Regel bedient man sich der Sonne zur Bestimmung dieses Fehlers, indem man das reflektirte Bild, zuerst den einen und dann den anderen Rand des direkt gesehenen Bildes berühren läßt.

Ist Fig. 228 ab das direkt gesehene, a'b' das reflektirte Bild, beide genau übereinander, die Spiegel also parallel, so soll der Nonius Null angeben, wenn er aber auf x zeigt, so ist dieses Ablesen der Collimationsfehler; wird nun das reflektirte Bild rechts, also in b zur Berührung gebracht, so hat die Alhidade, damit a' von a nach b kommt, den scheinbaren



Durchmesser der Sonne zurückgelegt, dieser Winkel sei s, hat man an dem Limbus m abgelesen, so ist $m = s \pm x$, je nachdem der noch unbestimmte Indexfehler auf die Exzedens fällt oder nicht. Bringt man nun b' mit a zur Berührung, so muß die Alhidade einen Bogen beschreiben, welcher der Länge b'a entspricht, dieser ist offenbar 2 s, steht der Nonius auf n^0, so ist $n = 2s - (s \pm x) = s \mp x$, aus diesen Gleichungen folgt $s = \frac{m + n}{2}$ und $x = \frac{n - m}{2}$; und zwar ist diese Größe zu allen Angaben zu addiren, wenn m größer als n ist.

Untersuchung, ob das Glas des größeren Spiegels von parallelen Ebenen begrenzt ist.

Die Art, wie der Parallelismus der Ebene erkannt werden kann, ist bereits im §. 173 angegeben worden, allein eine leicht anwendbare Methode, die Begrenzung des großen Spiegels zu prüfen, ist folgende: man bestimmt vorerst den Collimationsfehler und mißt dann einen Winkel von nahe 100^0 zwischen zwei scharf begrenzten Objekten, ist der Spiegel nicht fehlerfrei, so wird man statt der Winkel α ein Maß m erhalten, das um x fehlerhaft, daher $m = \alpha \pm x$ ist. Nimmt man nun den großen Spiegel aus seiner Fassung heraus, setzt ihn umgekehrt ein, den untern Rand nach oben und mißt, nachdem wieder der Indexfehler bestimmt ist, denselben Winkel, so wird man diesmal n ablesen, dann ist $n = \alpha \mp x$,

aus beiden Gleichungen folgt $x = \frac{m - n}{2}$ und dieser Werth muß, sobald er positiv ist und der Spiegel in der Fassung belassen wird, zu allen gemessenen Winkeln addirt werden.

Untersuchung der gefärbten Gläser.

Wenn die gefärbten Gläser nicht genau parallel begrenzt, also prismatisch sind, so werden während ihres Gebrauches die auffallenden Strahlen nach ihrem Austritte von ihrer Richtung abgelenkt, und der so bestimmte Collimationsfehler wird sich ändern, sobald die Blenden zurückgelegt sind.

Die braune Blende, welche vor das Okular gesteckt wird, hat keinen Einfluß, weil, wenn sie unrichtig ist, jedes der Bilder um denselben Winkel abgelenkt, der Collimationsfehler somit nicht geändert wird. Um die gefärbten Gläser in dieser Hinsicht untersuchen zu können, ist vom Mechaniker die Vorsorge getroffen worden, daß sich die Blendgläser sammt ihren Fassungen herausnehmen und umgekehrt wieder einsetzen lassen.

Man bestimmt zuerst, während die Blende vor dem Okulare ist, indem man die Sonne anvisirt, den Indexfehler, nimmt das Blendglas weg, stellt dafür die dunkelsten Gläser vor den Spiegel und sieht nach, ob die Bilder in der Berührung geblieben sind; tritt dies nicht ein, so bestimmt man neuerdings den Fehler, kehrt das eine der Blendgläser um und sieht nach, welche Wirkung dies hervorgebracht hat.

Sollte ein Ausweichen der Bilder stattfinden, so ist der halbe Winkel der verursachte Fehler. Auf diese Art kann man durch eine Kombination leicht den Fehler jedes einzelnen Glases und den, welcher durch ihr gemeinschaftliches Wirken verursacht wird, ausmitteln.

Die hellgrünen Gläser prüft man an dem Monde.

Bestimmung des Winkels, unter welchem die vom Okulare des Fernrohres kommenden Strahlen auf den kleinen Spiegel auffallen.

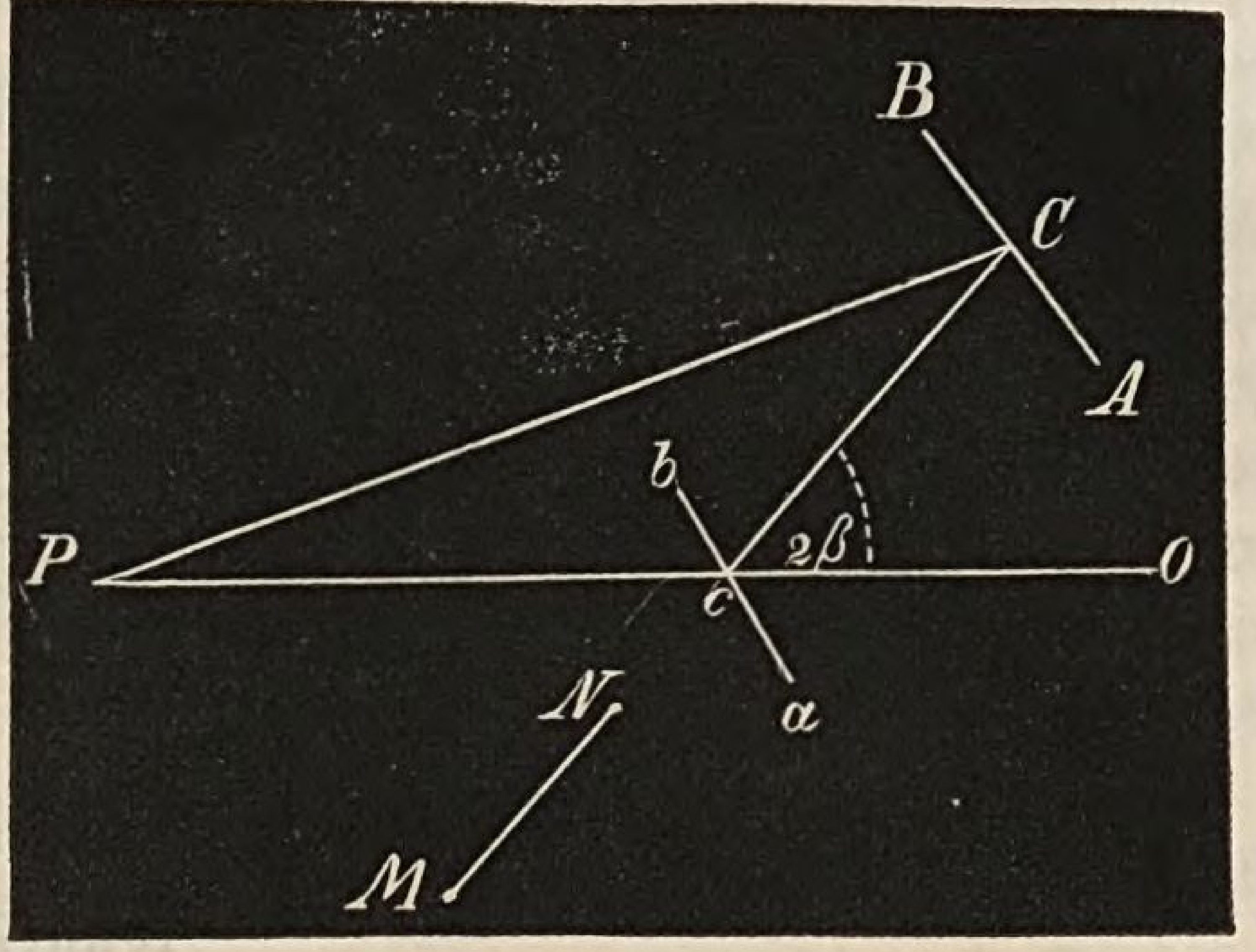
Zur vollständigen Kenntniß eines Sextanten gehört auch die Ausmittelung des so oft vorgekommenen Winkels β; er bestimmt wie schon erwähnt unter andern auch die Grenze, bis zu welcher die Winkel mit dem Sextanten gemessen werden können, denn ist $\alpha = 90 - \beta$, so ist der vom kleinen Spiegel reflektirte Strahl mit dem anderen Spiegel parallel, trifft ihn daher nicht, und die Bedingung der Winkelmessung hört auf.

Die Größe des Winkels β wird beinahe auf dieselbe Art ausgemittelt, welche bei der Untersuchung, ob der ganz belegte Spiegel vertikal stehe, angegeben worden ist.

Man legt den Sextanten auf einen Meßtisch, bringt den Limbus in die horizontale Lage, die Bilder eines und desselben terrestrischen Gegenstandes zur Deckung und liest den Stand der Alhidade ab, dieses sei c_1; in der Nähe des Meßtisches stellt man ein Nivellirinstrument und zwar so auf, daß die Achse des Rohres genau die Richtung der vom großen Spiegel reflektirten Strahlen hat.

Ist also, Fig. 229, P das direkt und durch Reflex gesehene Objekt, Cc die Richtung der von AB reflektirten Strahlen, MN die optische Achse des Rohres, M das Okulare, so ist der Winkel MCP = α ein bestimmter und kann mit dem Sextanten selbst gemessen werden; und dann ist

OcC = 2β = cCP + cPC ... 3).



Hat man den Collimationsfehler für parallele Strahlen c_0 gefunden und bei der Messung des Winkels cCP α abgelesen, so ist cCP = $\alpha - c_0$ ... 4).

Vermöge §. 165 Gleich. 3) ist P = 2 e, und Gleich. 2)

$$e = c_0 - c_1,$$

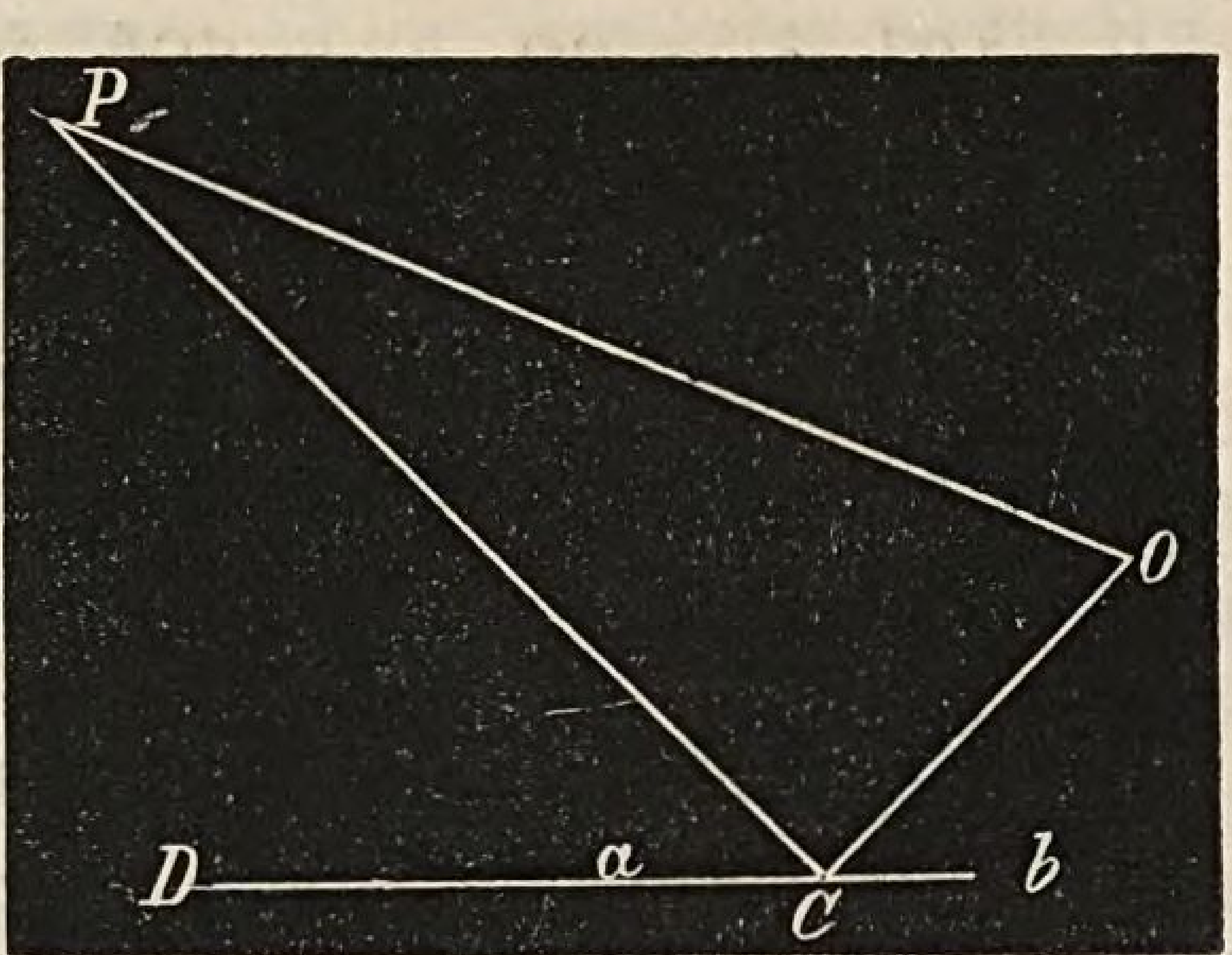
daher $2\beta = \alpha + c_0 - 2c_1$ und $\beta = \frac{\alpha + c_0 - 2c_1}{2}$ ... 5) durch bekannte Größen ausgedrückt.

Messung der Höhenwinkel mittelst des Sextanten.

§. 201. Dieses Instrument ist auch zur Messung der Höhenwinkel geeignet, nur muß man noch eine horizontale Ebene haben, auf welcher sich der Punkt, dessen Höhe gesucht wird, abspiegelt.

Diese horizontale Ebene, gewöhnlich der künstliche Horizont genannt, kann jede ruhig stehende Flüssigkeit sein, am besten jedoch eignet sich hiezu ein rundes Stück von Carrarischem Marmor von 6 bis 8 Zoll Durchmesser und ein Zoll Dicke, welches an seinem Umfange drei Stellschrauben zur horizontalen Stellung hat, in dem mittleren etwas vertieften Theile sind drei abgerundete Erhöhungen, auf welche erst die spiegelnde Ebene, eine kreisrunde, ebene, aber nur an der einen Fläche polirte Glasplatte, diese Fläche nach aufwärts gelegt und mittelst der Libelle horizontal gestellt wird.

Will man die Höhe des Gegenstandes P, Fig. 230, bestimmen, so visirt man direkt auf das Bild C des Gegenstandes P in dem Horizonte ab, bringt das Instrument in die vertikale Lage und sodann das durch Reflex entstandene Bild mit dem ersteren zur Deckung. Bezeichnet man den gemessenen Winkel POC mit α, OPC mit γ und den gesuchten PCD mit h, so ist $h = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ ... 1).



Ist γ Null, so ist der gemessene Winkel α die doppelte Höhe.

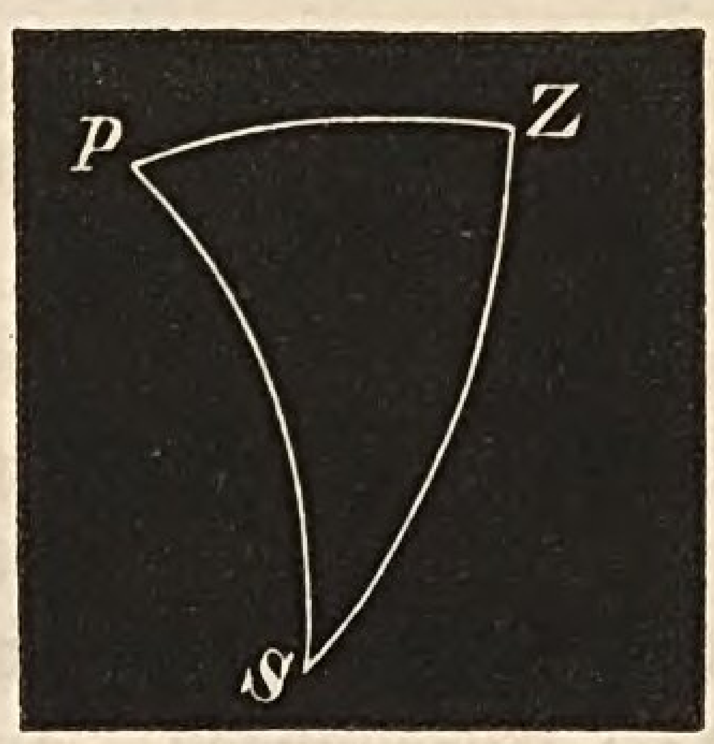
Bei terrestrischen nahe gelegenen Objekten muß noch γ bestimmt werden; setzen wir die Entfernung des Okulars von dem pointirten Punkte im Horizonte,

also OC = δ, was leicht gemessen werden kann, und OP = L, so ist in dem Dreiecke COP, $\sin. \gamma = \frac{\delta \sin. m}{L}$; die Größe L aber bekommt man, vorausgesetzt, daß β und die Entfernung der Mittelpunkte beider Spiegel d gemessen worden ist, durch das Instrument selbst; dann visirt man direkt von O nach P und bringt die Bilder zur Deckung, so ist das abgelesene Maß c_1; ist ferner c_0 der Collimationsfehler, so ist Gleich. 2) §. 200 $e = c_0 - c_1$ bekannt, dann giebt die Gleich. 5) §. 165 die Größe L und zwar, da d bis auf die Hundertel eines Zolles, β wenigstens bis auf die Minuten richtig bestimmt werden kann, mit einer für diesen Zweck hinreichenden Schärfe.

Fehler, die beim Höhenmessen mit dem Sextanten begangen werden können.

§. 202. Beim Höhenmessen mittelst des Sextanten wird vorausgesetzt, daß der natürliche Horizont eine horizontale Ebene ist, es ist also zu untersuchen, welchen Einfluß das Gegentheil auf das Resultat der Messung ausübt.

Nehmen wir an, Fig. 231, das Einfallsloth solle eine Kugelfläche in P treffen, da aber die spiegelnde Ebene nicht horizontal ist, so gehe dieses durch Z, S ist ein Punkt, dessen Höhe gesucht wird, so ist ZP = γ der Neigungwinkel des Horizontes, ZS = 90 — h' die gemessene, PS = 90 — h die richtige Höhe, setzen wir noch den Winkel PZS = ε, so ist in dem Dreiecke ZPS



$$\sin. h' = \sin. h \cos. \gamma + \cos. h \sin. \gamma \cos. \varepsilon$$

und wenn h — h' = x gesetzt wird

$$x'' = -\gamma'' \sin. 1'' \cos. \varepsilon + \frac{\gamma''^2}{2} \sin. 1'' \,\mathrm{tg}.\, h \;\ldots\; 1), \text{ daher}$$

$$h = h' - \gamma'' \sin. 1'' \cos. \varepsilon + \frac{\gamma''^2}{2} \sin. 1'' \,\mathrm{tg}.\, h \;\ldots\; 2), \text{ nimmt man}$$

$\gamma = 10'$, $\varepsilon = 90$, $h = 60^0$, so ist x = + 1·5 Sekunden.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob der Horizont eine Ebene ist. Dazu gelangt man am besten auf folgende Art: man bringt die Räder der Sonne genau zur Berührung und richtet sodann das Fernrohr mit unverstellter Alhidade nach dem in der zu prüfenden Glasplatte gesehenen reflektirten Sonnenbilde. Berühren sich auch jetzt die beiden Bilder ganz scharf, so ist die Glasplatte an dieser Stelle eben, greifen jedoch die beiden Ränder der Sonnenscheibe ineinander, so ist das Glas hohl, entfernen sie sich von einander, so ist es erhaben.

Diese Prüfung muß man bei allen Stellen der Glasplatte wiederholen, bis man von ihrer Güte überzeugt ist.

Da die obere horizontal gestellte Ebene die reflektirende ist, so ist nicht nöthig, daß die Glasplatte von parallelen Ebenen begränzt ist.

Gebrauch des Sextanten.

§. 203. Ist mittelst des Sextanten ein Winkel zwischen terrestrischen Objekten zu messen, so lüftet man die Klemmschraube, hält das Instrument mit der rechten Hand, den großen Spiegel über den Scheitel des zu messenden Winkels, mit der linken unterstützt man dieselbe, indem man die Klemmschraube faßt, visirt direkt auf das links liegende Signal und bestimmt, nachdem beide Bilder zur Deckung gebracht sind, den Stand der Alhidade; ist dieses Maß c_1 advotirt, so wird wieder direkt das links liegende Signal anvisirt, und um diese Linie das Instrument in die Ebene des zu messenden Winkels gedreht, die Alhidade langsam so weit bewegt, bis auch das zweite Signal im Fernrohre erscheint, und nun die Alhidade geklemmt; endlich die beiden Bilder in der Mitte des Sehfeldes mittelst der Mikrometerschraube genau zur Deckung gebracht.

Wird nun der Stand abgelesen, davon das c_1 abgezogen, so ist der Winkel bestimmt.

Sollte man bemerken, daß die beiden Bilder nicht gleich deutlich erscheinen, so muß das Fernrohr mittelst der zugehörigen Schraube etwas gehoben oder gesenkt werden.

Den Sextanten auf ein Stativ zu stellen, ist überflüssig, da ein kleines Schwanken in der Ebene des Winkels, während der Messung beiden Bildern mitgetheilt wird (§. 167), demnach nicht störend ist.

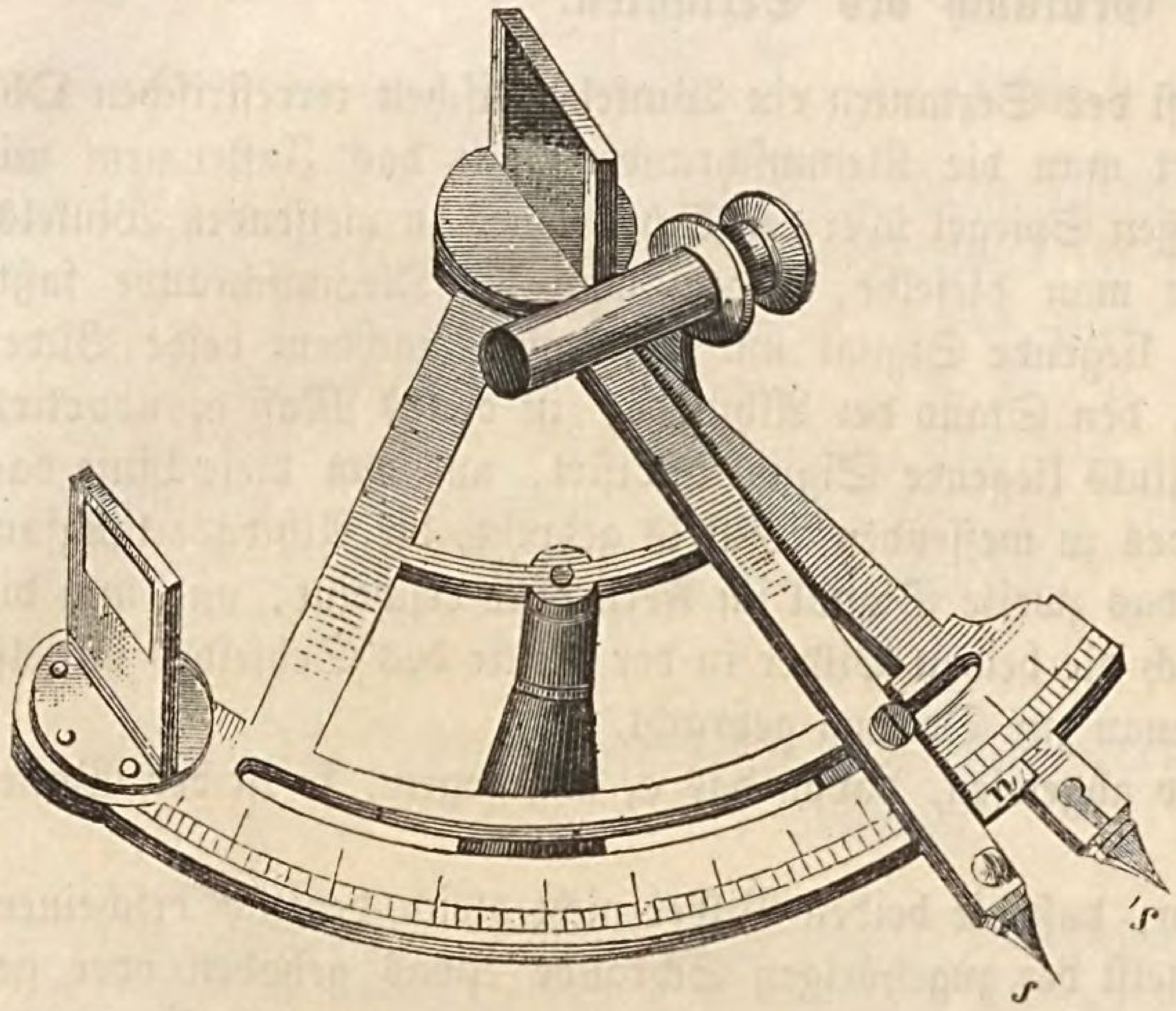
Wie man bei der Messung der Höhenwinkel zu verfahren habe, ist bereits oben angegeben worden; bei der Messung der Sonnenhöhen ist es vortheilhafter, die beiden Sonnenbilder nicht zur Deckung, sondern nur zur Berührung zu bringen, dann bekommt man, wenn das Fernrohr astronomisch ist, die Höhe des oberen oder unteren Sonnenrandes, je nachdem das durch Reflex von dem ganz belegten Spiegel entstandene Bild über oder unter demjenigen erscheint, was man im künstlichen Horizonte sieht, wovon man sich leicht durch die Konstruktion der Strahlenrichtungen überzeugen kann, wenn man nur auf den Umstand acht giebt, daß die von der Sonne sowohl auf den großen Spiegel, als auch auf den Horizont fallenden Strahlen parallel sind, und daß der Scheitel des zu messenden Winkels dort liegt, wo sich die direkt kommenden Strahlen mit jenen schneiden, welche vom Horizonte reflektirt werden.

Tiefenwinkel mit dem Sextanten zu messen, ist mit Umständen verbunden.

Der Spiegelzirkel.

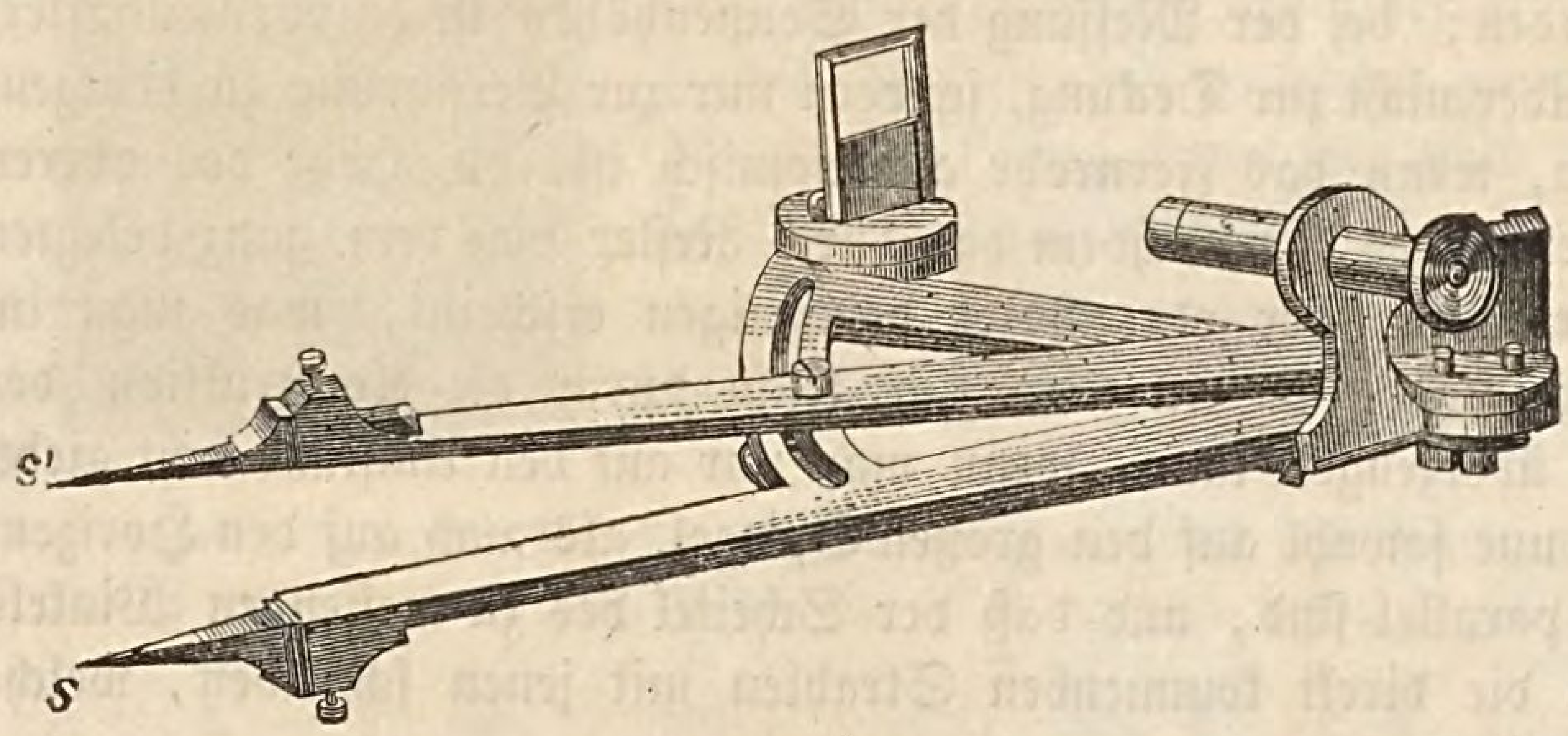
§. 204. Der Mechaniker Höschel hat das Fig. 232 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) dargestellte Instrument nach dem Muster des Sextanten konstruirt, mit dem kleinen Unterschiede, daß die Okularröhre näher an den großen Spiegel gestellt ist, wodurch die vom Auge auf den halb belegten Spiegel fallenden Strahlen mit dem Einfallslothe einen kleineren Winkel als beim Sextanten machen, bei dem Spiegelzirkel ist der Einfallswinkel nahe 10 Grade. Der Limbus ist nur in ganze von Null bis 120 Grade eingetheilt, der Halbmesser desselben $3\frac{1}{3}$ Zoll, der vortragende Nonius n giebt die gemessenen Winkel bis auf 10 Minuten an.

Fig. 232.



Den Namen hat das Instrument von den zwei Zirkelspitzen ss' erhalten, welche der Art angebracht sind, daß, wenn der Index auf Null steht, beide über einander fallen; ist der Halbmesser r, das ist die Entfernung der Spitzen vom Drehungspunkte der Alhidade, ausgemittelt, so kann der gemessene Winkel auch graphisch konstruirt werden; man braucht nur mit dem Halbmesser einen Bogen beschreiben und in denselben die Entfernung beider Zirkelspitzen zweimal eintragen, endlich die äußersten Punkte mit dem Mittelpunkte des Kreises verbinden.

Bei dem Spiegelzirkel von Sadtler, Fig. 233, ist der Limbus gar nicht eingetheilt, mit diesem Instrumente können die Winkel nur graphisch bestimmt werden, die Zirkelschenkel können verlängert und genau 10 Zoll lang gemacht werden; in der Okularröhre ist eine plankonkave Linse, wodurch die Bilder etwas an Lichtstärke gewinnen.



Das hölzerne Etui, in welchem das Instrument aufbewahrt wird, enthält noch einen kleinen Stangenzirkel, die messingene Stange kann zugleich als Lineal benützt werden, ferner ein Bleirohr und eine Reißfeder, somit alles, was man bei der Konstruktion eines Winkels bedarf.

Bei beiden dieser Instrumente können die Spiegel auf den Limbus senkrecht und einander parallel gestellt, der kleine Spiegel sammt der Fassung sogar ganz herum gedreht, der Indexfehler aber nicht ausgemittelt werden.

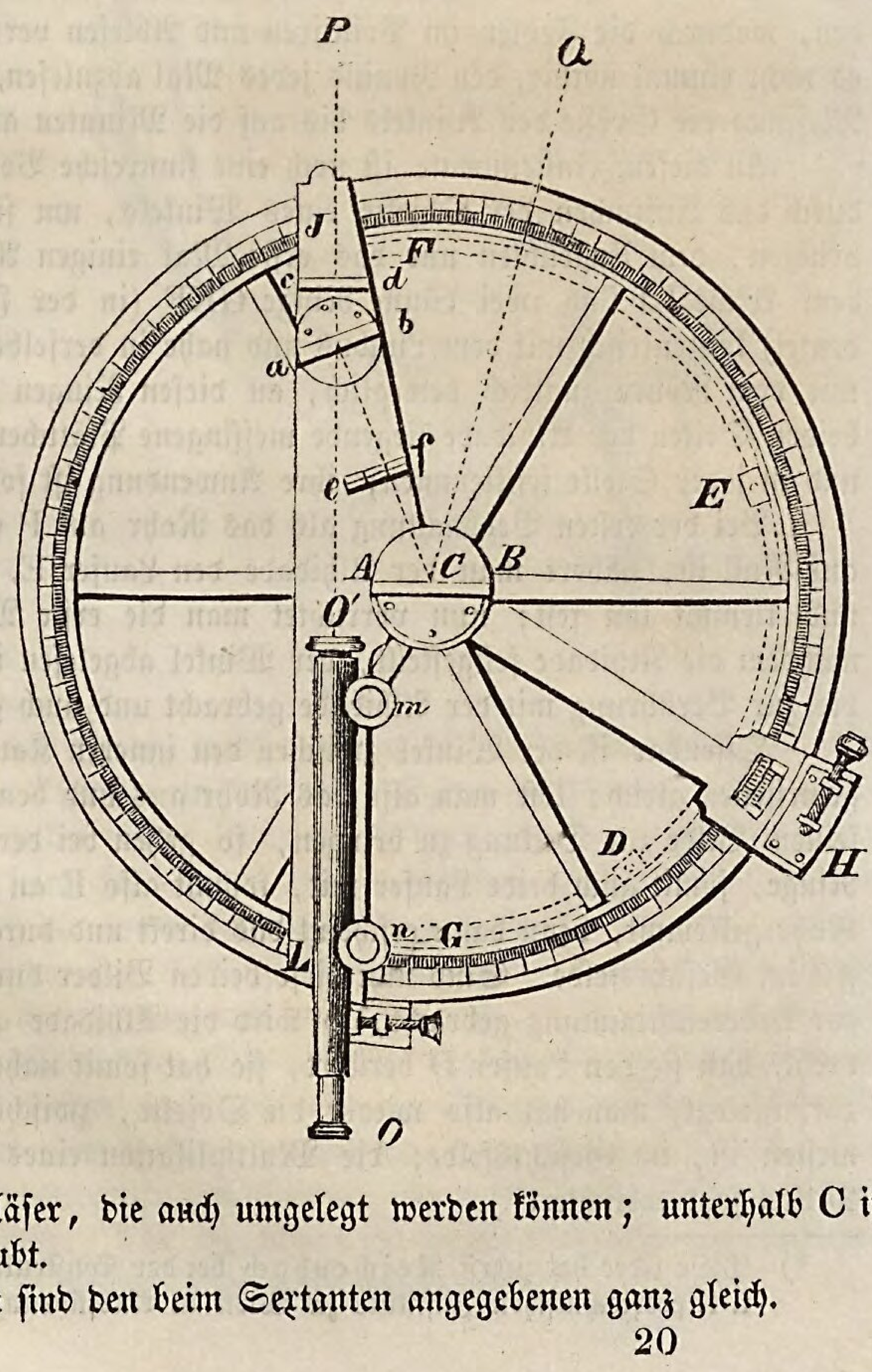
Zur Bestimmung der Länge der Zirkelschenkel, also der Länge des bei der Konstruktion der Winkel zu nehmenden Halbmessers braucht man nur mit einem anderen guten Instrumente in einer ebenen Gegend einen Winkel von 120^0 ausstecken und denselben mit einem der Spiegelzirkel aufmerksam nachmessen, so ist die Entfernung der Spitzen gleich dem gesuchten Halbmesser, und kann an einem tausendtheiligen Maßstabe abgelesen werden.

Oder man mißt einen bekannten Winkel a mit dem Spiegelzirkel, bestimmt die Entfernung der Zirkelspitzen s, diese ist die Sehne von $\frac{a}{2}$, so ist der zu bestimmende Halbmesser durch die Gleichung gegeben: $r = \frac{s}{2} \text{ cosect. } \frac{a}{4}$.

Mayer-Borda'scher Reflexionskreis.

§. 205. Den Namen hat es von der §. 155, Anmerkung, erwähnten Multiplikationsmethode der Winkel erhalten; es ist übrigens ganz auf dasselbe Prinzip wie der Spiegelsextant gegründet, hat aber einige wesentliche Verbesserungen.

Der volle Kreis, Fig. 234, ist in 720 gleiche Intervalle getheilt, jeder halbe Grad entspricht bei der Bezifferung einem ganzen; die Alhidade CH trägt den ganz belegten Spiegel AB; C ist ihr Drehungspunkt und der Mittelpunkt des Limbus; ein zweiter ebenfalls um C beweglicher aber von der Bewegung der Alhidade unabhängiger Arm JL trägt das astronomische Fernrohr OO′, das mit einem Fadenkreuze versehen ist, und durch die vertikal stehenden Schräubchen mn höher oder niedriger, so auch mit dem Limbus parallel gestellt werden kann; ihm gegenüber ist der halb belegte Spiegel ab gegen die Achse des Rohres unter einem konstanten Winkel befestigt, aber mit dem Rohre selbst beweglich; beide Spiegel haben die nöthigen Rektifikationsschräubchen; cd und ef sind die farbigen Blendgläser, die auch umgelegt werden können; unterhalb C ist die Handhabe eingeschraubt.



Die Rektifikationen sind den beim Sextanten angegebenen ganz gleich.

Gebrauch des Reflexionskreises.

§. 206. Hat man die Alhidade auf Null gestellt und geklemmt, so wird das Rohr auf das links liegende Signal P einvisirt und durch die Mikrometerschraube bewegt, bis beide Bilder des Objektes P in der Deckung erscheinen, sodann die Alhidade so weit gedreht, daß auch das zweite Signal Q im Gesichtsfelde erscheint und dieses durch die Mikrometerschraube der Alhidade an den gehörigen Ort gebracht, der Stand der Alhidade abgelesen, so ist der Winkel bestimmt; soweit ist also alles wie beim Sextanten.

Die Multiplikation der Winkel besteht aber in folgendem: man läßt die Alhidade auf den zuletzt abgelesenen Anzahl Graden, lüftet die Klemmschraube des Rohres und bewegt dasselbe so weit, daß abermals P sowohl direkt als durch zweimalige Reflexion in der Deckung erscheint, so sind die Spiegel gegeneinander wie in der anfänglichen Stellung geneigt, aber die Alhidade nicht auf Null. Dreht man nun diese und mißt den Winkel neuerdings, so hat der Nonius wieder denselben Bogen zurücklegen müssen, sein letzter Stand giebt also den doppelten Winkel. Diese Operation kann also wie beim Theodoliten beliebig wiederholt werden, wodurch die Fehler im Pointiren und Ablesen vermindert werden; dabei ist es nicht einmal nöthig, den Nonius jedes Mal abzulesen, wenn nur nach der ersten Messung die Größe des Winkels bis auf die Minuten ausgemittelt wird.

An diesem Instrumente ist noch eine sinnreiche Vorrichtung angebracht, wodurch das Aufsuchen der Objekte eines Winkels, um sie in das Gesichtsfeld zu bringen, dem Ungeübten nur das erste Mal einigen Aufenthalt verursacht. An dem Arme LJ sind zwei dünne Ringe GEF (in der Figur durch Punkte angedeutet) konzentrisch mit dem Limbus und nahe in derselben Ebene festgemacht, also mit dem Rohre zugleich beweglich, an diesen Ringen lassen sich zwei kleine zu beiden Seiten der Alhidade liegende messingene Plättchen (Laufer) DE verschieben, und in jeder Stelle festklemmen; ihre Anwendung ist folgende:

Bei der ersten Beobachtung als das Rohr auf P einvisirt und die Alhidade auf Null ist, nähert man der Alhidade den Laufer E, daß er den Arm berührt und klemmt ihn fest; nun verrichtet man die erste Messung des Winkels und nachdem die Alhidade festgestellt, der Winkel abgelesen ist, so wird der Laufer D bis zur Berührung mit der Alhidade gebracht und auch geklemmt.

Offenbar ist der Winkel zwischen den inneren Kanten der Laufer nahe dem gemessenen gleich; löst man also das Rohr aus und bewegt es, um P wieder mit seinem Bilde zur Deckung zu bringen, so gehen bei der Drehung des Rohres die Ringe, somit auch beide Laufer mit, kommt also E an die Alhidade, so wird das Rohr geklemmt, denn dann erscheint das direkt und durch Reflexion gesehene Objekt im Gesichtsfelde. Sind nun diese beiden Bilder durch die Mikrometerschraube zur Uebereinstimmung gebracht, so wird die Alhidade ausgelöst und so weit gedreht, daß sie den Laufer D berührt, sie hat somit nahe den zu messenden Winkel zurückgelegt, man hat also wieder die Objekte, zwischen welchen der Winkel zu messen ist, im Gesichtsfelde; die Multiplikation eines Winkels ist durch dieses Mittel sehr erleichtert*).

*) Diese Idee hat zuerst Reichenbach bei der Konstruktion seiner Theilmaschine am k. k. polytechnischen Institute zu Wien in Ausführung gebracht.

Das patentirte Reflexions-Instrument von Pistor und Martins.

§. 207. Dieses Instrument hat nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Spiegelwerkzeuge den höchsten Grad der Vollkommenheit, und jeder Vorwurf, den man den Winkelmessern dieser Art wegen der Exzentrizität der Alhidade 2c. mit Recht macht, ist beseitigt.

Der Limbus, Fig. 235, ist ein ganzer in 720 Intervalle getheilter Kreis, der Halbmesser verschieden $2\frac{1}{2}$, 5, 6 auch 10 Zoll lang, die Alhidade trägt zwei gegenüberliegende Nonien, wodurch die Exzentrizität unschädlich gemacht wird, die Nonien geben die Winkel je nach der Größe des Instrumentes selbst bis auf 10″ genau an; der ganz belegte Spiegel AB ist so gestellt, daß er mit dem durch die Nullpunkte der Nonien gehenden Durchmesser einen Winkel von 20^0 bildet; die Verbindung der Spiegelebene mit der Alhidade ist wie bei dem Sextanten. Der Limbus hat unterhalb am Umfange einen Ring, in welchem sich die Klemmvorrichtung schleift; die Mikrometerbewegung weicht von den bisher angegebenen etwas ab, die Schraube drückt nämlich auf eine an die Alhidade befestigte Kugel, ihr gegenüber liegt eine Feder, welche, wenn die Schraube zurückgeht, die Kugelfläche, also auch die Alhidade in demselben Sinne fortschiebt. Der kleine Spiegel beim Sextanten ist bei diesem Instrumente durch ein kleines rechtwinkliges Glasprisma ersetzt, ab seine Hypothenusenfläche, diese so gestellt, daß sie mit der Spiegelebene parallel ist, wenn die Alhidade auf Null steht; die vertikale Ansicht des Prisma ist in der Fig. 236 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) dargestellt; seine Verbindung mit dem Kreise ist ähnlich jener des kleinen Spiegels beim Sextanten Seite 295. Das Objektiv des nahe 10 Zoll langen Fernrohres ist absichtlich etwas größer, weil auch noch jene Strahlen ein deutliches Bild geben müssen, welche bei dem Prisma vorbeigehen und auf das Objektivglas fallen; zwischen dem Objektivglase und Prisma liegen die Blendgläser; können aber auch umgelegt werden. Die Handhabe ist im Mittelpunkte des Limbus, endlich zum Ablesen beider Nonien eine Loupe angebracht.

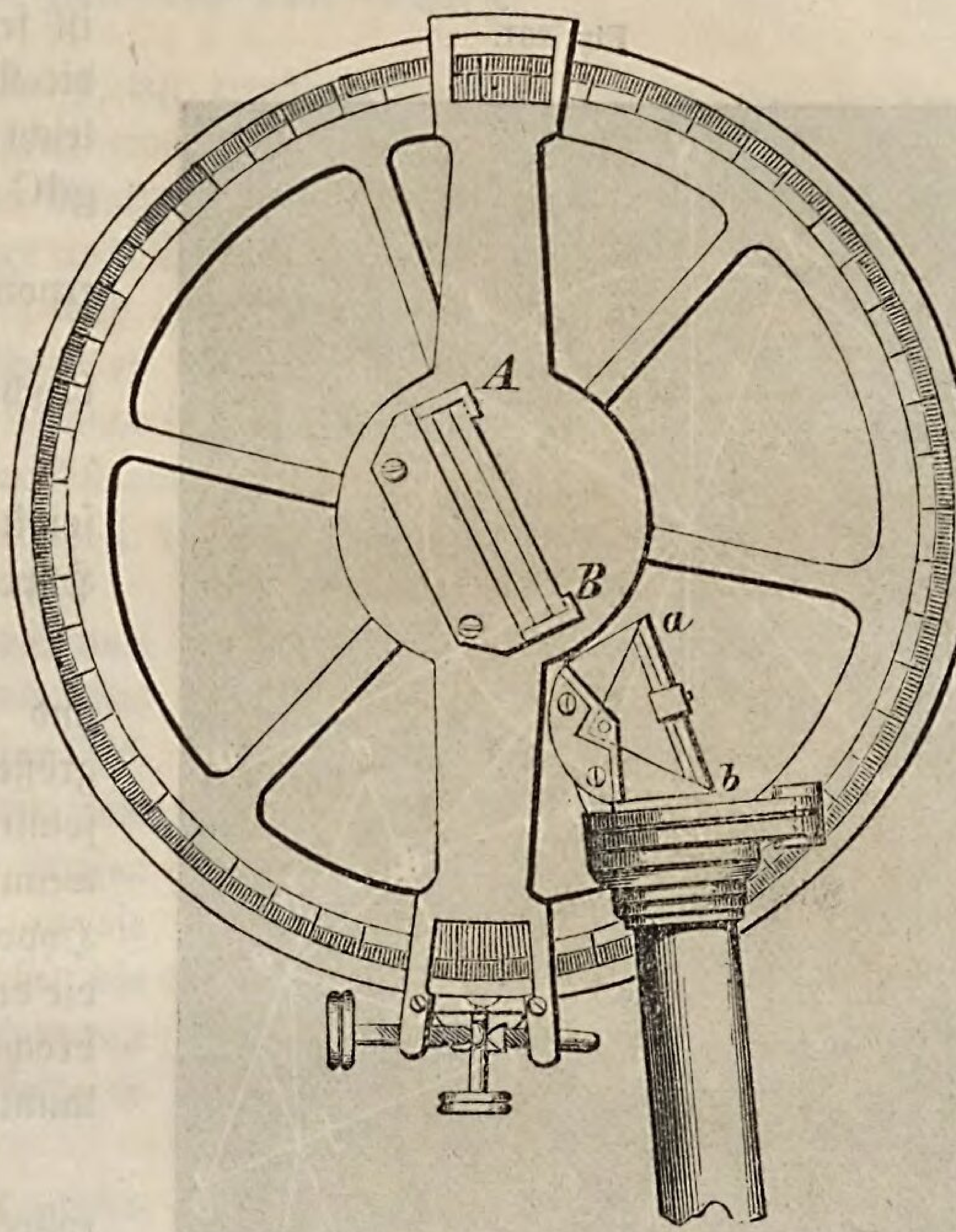
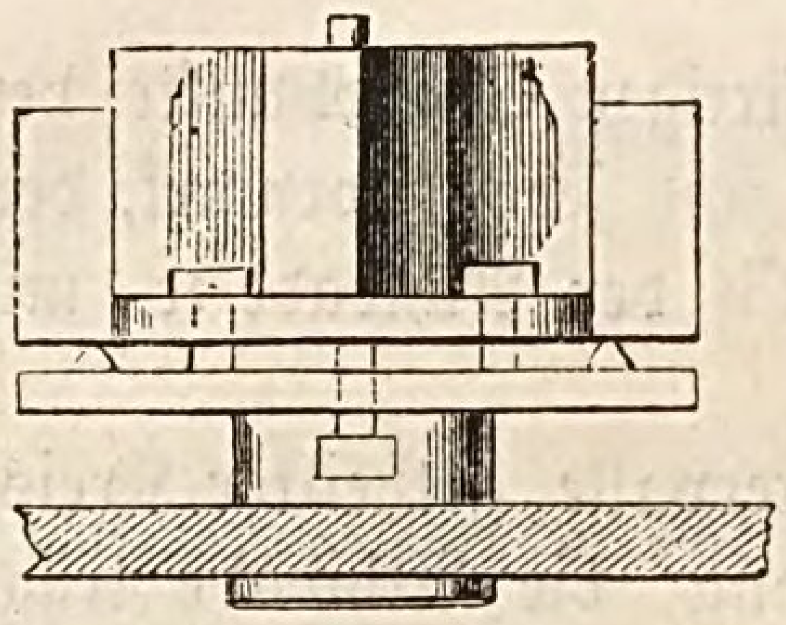


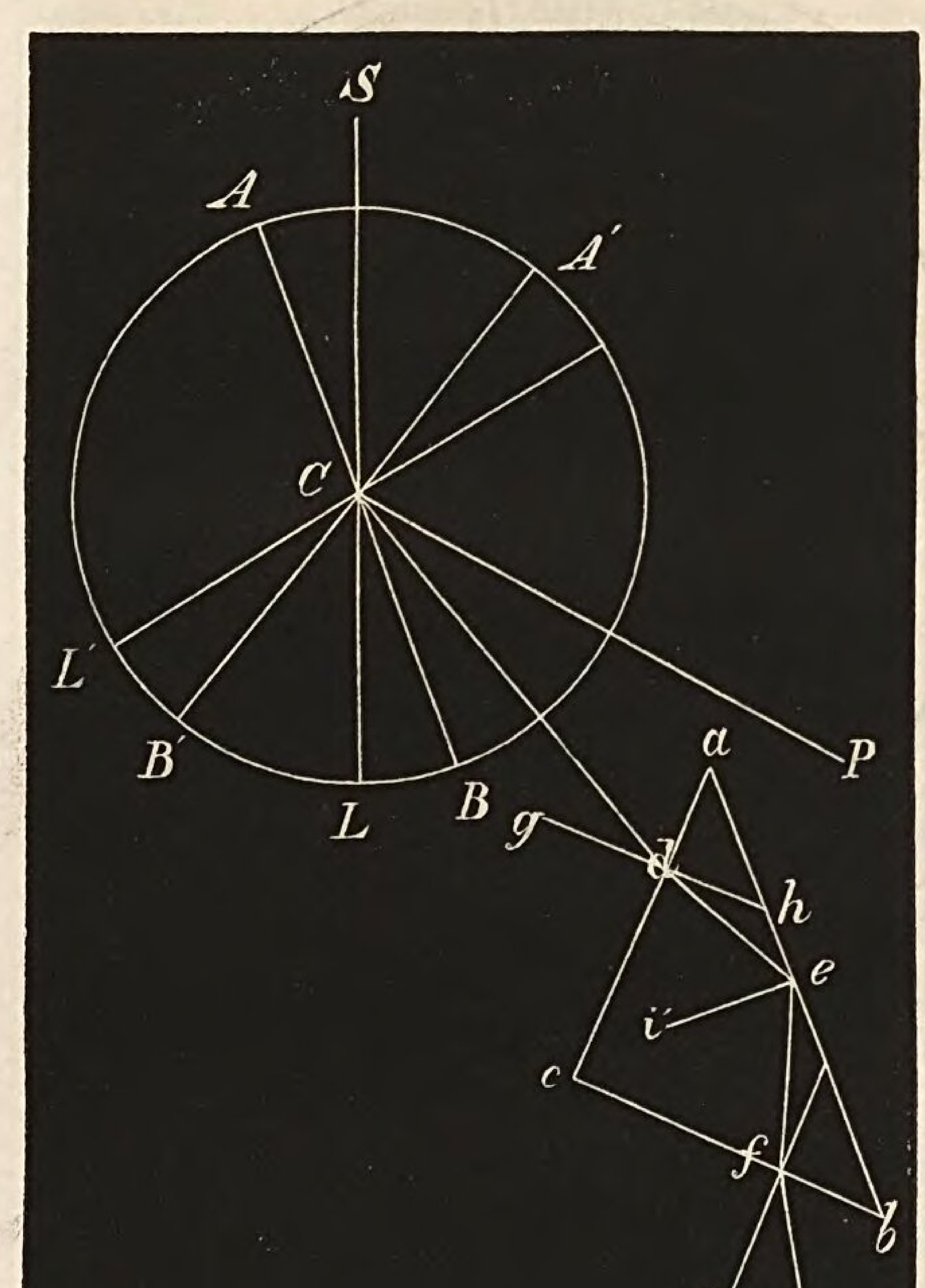
Fig. 236.



Betrachten wir noch den Weg, welchen ein vom Spiegel reflektirter Strahl bis nach dem Austritte aus dem Prisma zurückgelegt hat.

Ist AB, Fig. 237, der Spiegel, während die Alhidade in L auf Null steht, so ist nach der Konstruktion des Instrumentes die Hypothenusenebene das Prisma ab mit AB parallel, der Winkel SCA, welchen jener Strahl SC, der in das Auge gelangen soll, macht mit dem Spiegel 20 Grade, daher ist auch $dCB = 20^0$;

Fig. 237.



ist ferner gh das Einfallsloth auf die Kathetenfläche ca, so ist, wie leicht nachgewiesen werden kann, $gdC = 25^0$; mit dem Brechungsexponenten $\frac{3}{2}$ findet man den gebrochenen Winkel

$$hde = 16^0\ 21'\ 52,$$

somit ist der Einfallswinkel auf der Hypothenusenfläche nämlich

$$dei = 61^0\ 21'\ 52''$$

und sinus des Brechungswinkel größer als die Einheit; es erfolgt somit eine totale Reflexion, und wenn ef die Richtung des an der Hypothenuse reflektirten, endlich fO die des an der Kathetenfläche cb gebrochenen Strahles ist, so ist bekanntlich lfO ebenfalls 25 Grade.

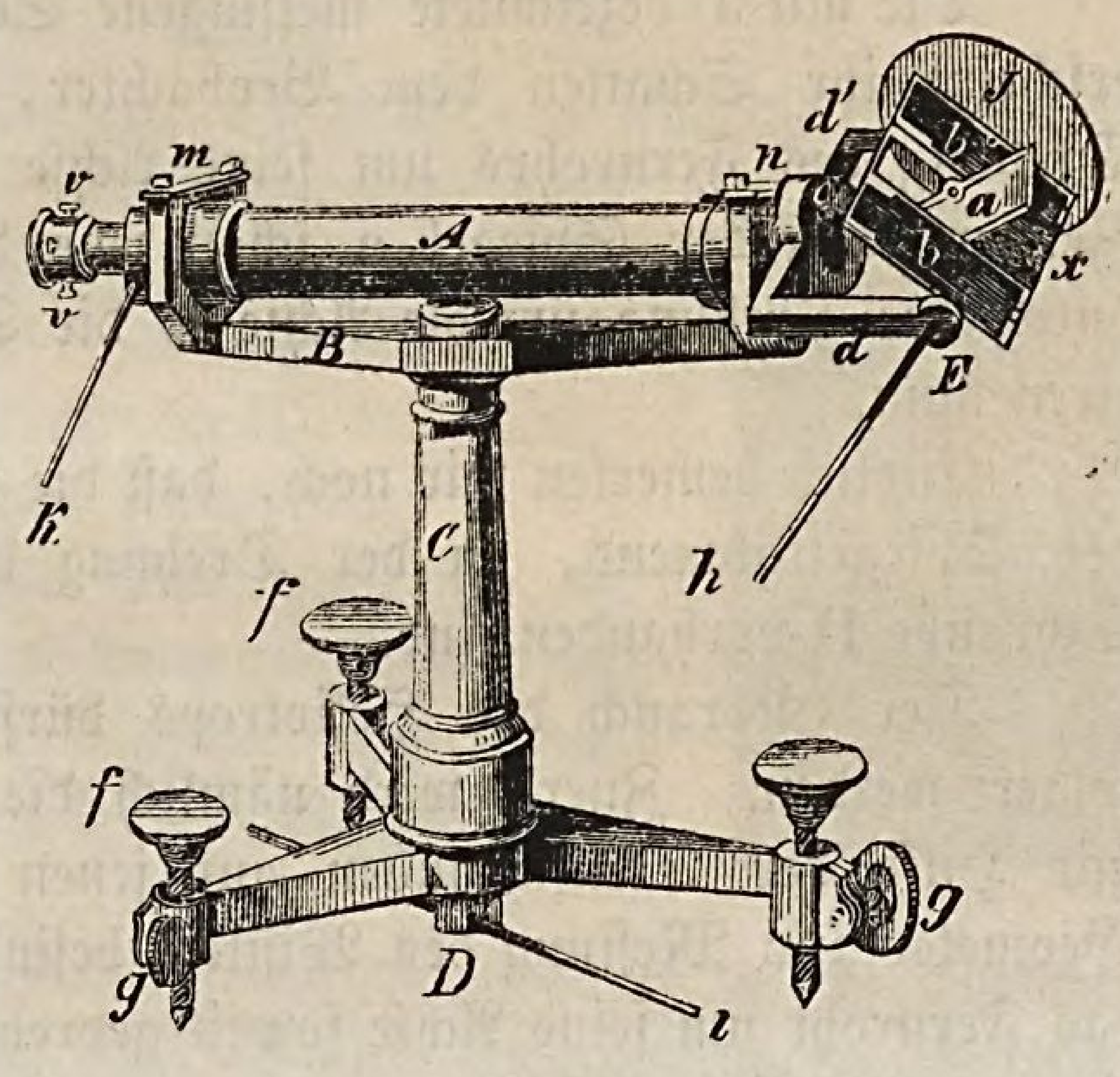
Hat nun die Achse des Fernrohres die Richtung fO, so werden die neben dem Prisma und durch dasselbe kommenden Strahlen parallel auf das Objektivglas fallen, somit zu einem Bilde des Objektes S vereinigt werden. Ist endlich das Rohr wieder auf S eingestellt, die Alhidade dagegen links um einen Winkel α gedreht worden, so werden dann von einem Objekte P auf den Spiegel Strahlen auffallen und in der Richtung Cd reflektirt werden, sobald $SCP = 2\,LCL'$ ist.

Der Winkel α kann bei diesem Instrumente, so lange das durch Reflex gesehene Objekt nach rechts vom Beobachter liegt, 65 Grade betragen, es können somit Winkel von Null bis 130^0 gemessen werden, bei größeren Winkeln tritt zuerst das Prisma, dann das Fernrohr und der Kopf des Beobachters den Lichtstrahlen in den Weg, beim ferneren Drehen der Alhidade können noch Winkel von 180^0 bis 100^0 gemessen werden, dann ist das zweite Objekt links von der direkten Visur.

Stellen wir noch die Winkel, welchen die auffallenden Strahlen mit der ganz belegten Spiegelfläche beim Sextanten und bei diesem Instrumente bilden, wenn die Alhidade auf Null, sodann auf 120° steht, nebeneinander, so ist beim Sextanten, wenn β nur zu 20 Grade angenommen wird, der erste Winkel 70°, der andere 10°; beim Reflexions-Instrumente dagegen 20° und 80 Grade; beim letzteren Winkelmesser werden somit, vom Prisma abgesehen, die Bilder auch aus diesem Grunde lichtstärker erscheinen.

Der Heliotrop von Gauß.

§. 208. Wie bereits in §. 23 erwähnt worden ist, hat der berühmte Gauß auch ein Mittel ersonnen, einen Punkt auf sehr große Distanzen sichtbar zu machen, somit von andern Punkten zu unterscheiden. Dieser Heliotrop erscheint dem unbewaffneten Auge noch in einer Entfernung von 8 Meilen als ein leicht wahrzunehmender Stern, und ist mittelst eines Fernrohres selbst in einer Distanz von 14 Meilen sichtbar, er gewährt somit bei geodätischen Messungen den großen Vortheil, daß der Geometer auf so bedeutende Distanz mit eben der Schärfe pointiren kann, wie der Astronom bei seinen Messungen. Die Konstruktion des Instrumentes ist auf den Satz §. 164 gegründet und dieses in der Fig. 238 dargestellt.



Das Fernrohr A hat an den zwei Stellen, wo es in den Lagern des massiven Trägers B aufliegt, eine Verstärkung aus Glockenmetall, die zwei angeschraubten Deckel m, n pressen zwar das Rohr ziemlich stark an die Lager, dieser Druck hindert aber die drehende Bewegung des Rohres in den Lagern nicht, sondern hält dasselbe in jeder Lage fest.

Das Rohr hat ferner eine zweite Bewegung, aber sammt dem Träger um eine in der durchbohrten Säule C befindliche Drehungsachse; ist aber das Rohr nach einer bestimmten Richtung gewendet, so wird diese durch eine, der Drehungsachse entgegen wirkende Schraube D erhalten.

Durch die drehende Bewegung des Rohres in der einen Ebene und durch die Stellschrauben des Dreifußes f, f, f, kann also das Rohr genau auf den Punkt gerichtet werden, wohin die Sonnenstrahlen reflektirt werden sollen.

Eine eigene Bewegung in der vertikalen Ebene bedarf das Rohr nicht, weil in den Fällen, wo der Heliotrop angewendet wird, die Distanzen sehr groß sind, die Unebenheiten der Erde daher unter so kleinen Winkeln ober oder unter dem Horizonte des Heliotrops erscheinen, daß die Neigung, welche das Rohr durch die Schrauben f, f, f erhalten kann, hinreicht, die Visur auf jeden beliebigen Punkt einzustellen.

Die Schräubchen v, v, v am Okulare dienen den Durchschnitt der Fäden des Fadenkreuzes in die physische Achse des Rohres zu bringen.

Das Sinnreiche des Gaußischen Heliotropen ist die Vorrichtung in der Objektivöffnung. Das Stück c mit den zwei vorstehenden Armen dd' ist an das Rohr angeschraubt, zwischen den Armen liegt eine Drehungsachse E (von dieser ist in der Figur nur der eine Drehungspunkt sichtbar), diese ist sammt einem Rahmen und den zwischen diesem liegenden Spiegeln b, b, a beweglich.

Da die mit bb bezeichneten Spiegel gemeinschaftlich das Licht nach dem entfernten Punkte reflektiren sollen, so müssen sie in einer Ebene liegen, und um dies zu erreichen, sind in dem Rahmen die nöthigen Korrektionsschrauben angebracht; der Spiegel a hat eine von den Spiegeln b unabhängige Bewegung, er soll auf die Ebene bb senkrecht stehen; diese Lage kann ihm durch einen an der nicht belegten Seite angebrachten Arm e und die dazu gehörige Schraube x ertheilt werden.

Die Spiegel bb reflektiren das Licht nach dem entfernten Punkte, a dagegen in das Fernrohr des Instrumentes, die ersteren haben zusammen eine spiegelnde Ebene nahe 3 Quadratzoll, und selbst diese muß bei kleinen Entfernungen durch das Auflegen eines geschwärzten Rahmens verkleinert werden; a dagegen besteht nur aus einem an der rückwärtigen Seite geschwärzten Glase, damit der Beobachter nicht durch zu starkes Licht geblendet werde.

Die mit J bezeichnete messingene Scheibe steht auf die Achse E senkrecht; erscheint ihr Schatten dem Beobachter, vom Okulare aus gesehen, bei der Drehung des Fernrohrs um seine Achse als eine gerade Linie, so ist dies ein Zeichen, daß der Spiegel a schon jene Richtung hat, bei welcher er nur noch durch eine Drehung um die Achse E die Sonnenstrahlen in das Fernrohr reflektiren kann.

Endlich bemerken wir noch, daß die drei Hebel h, k, i, zu der Bewegung des Spiegelrahmens, zu der Drehung des Rohres in seinen Lagern und der Schraube D vorhanden sind.

Der Gebrauch des Heliotrops dürfte aus dem bisher Gesagten leicht gefolgert werden. Zuerst wird nämlich die Schraube D gelüftet, das Fadenkreuz mit Hilfe der Stellschrauben auf jenen Punkt einvisirt, in welchem sich der Geometer zur Messung des Winkels befindet, dann die Schraube D angezogen, das Fernrohr um seine Achse soweit gedreht, bis der Schatten der Scheibe J als eine gerade Linie erscheint; zuletzt werden die Spiegel um die Achse E so gewendet, daß das direkt von der Sonne kommende und von dem Spiegel a reflektirte Licht auf die Objektivlinse auffällt, und dann in der Mitte des Fadenkreuzes vereinigt, ein Sonnenbild giebt; ist dies erreicht, so fällt das von den Spiegeln b reflektirte Licht genau auf den pointirten Punkt.

Da aber die Sonne ihren Stand ändert, so müssen bei längerem Gebrauche die Spiegel öfters wieder scharf eingestellt werden.

Rektifikation des Heliotrops.

§. 209. Vor jedem Gebrauche muß jedoch der Heliotrop sehr scharf rektifizirt werden, wozu Gauß selbst eine Anleitung gegeben hat.

Die Theile, welche einer Rektifikation unterliegen, sind:

1) das Fadenkreuz muß genau in der Ebene des Bildes liegen, und der eine Faden vertikal gestellt sein;

2) die optische Achse und die physische des Rohres müssen identisch sein;

3) die Drehungsachse der Spiegel muß auf die optische Achse des Rohres senkrecht stehen;

4) die sämmtlichen Spiegel müssen mit ihrer Drehungsachse parallel sein;

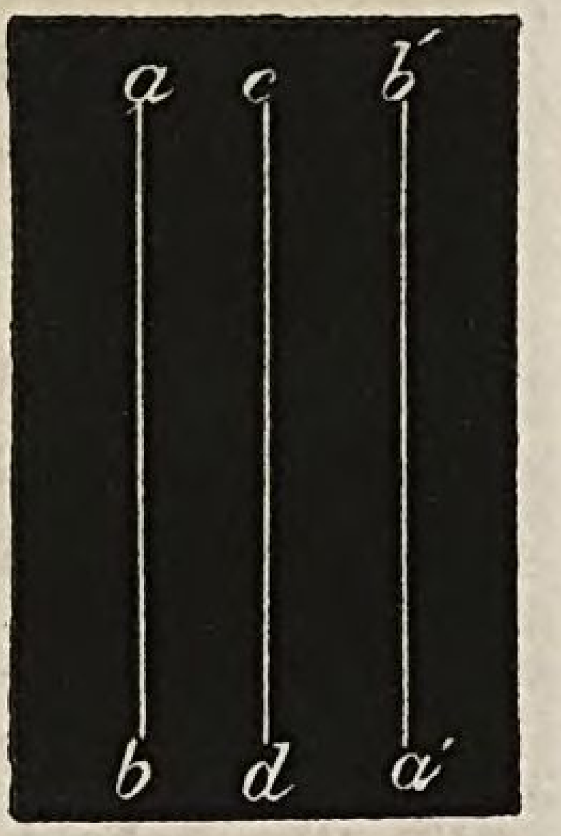
5) die beiden Spiegel, welche das Licht nach dem entfernten Punkte reflektiren, müssen in einer Ebene liegen, oder was in Bezug auf ihre Wirkung dasselbe ist, sie müssen genau parallel sein;

6) die Ebene des Spiegels a muß auf die Ebene des Spiegels bb senkrecht stehen.

Ad 1. Ob das Fadenkreuz eine dem Auge des Beobachters entsprechende Entfernung und der eine Faden die vertikale Lage hat, dies zu erkennen und die nöthige Korrektion vorzunehmen, haben wir bereits bei dem Diopter angegeben.

Ad 2. Wie bekannt, ist die optische Achse durch den Durchschnitt der Fäden, welche das Diaphragma trägt, bestimmt; liegt nun der Durchschnittspunkt nicht genau in einem Punkte der physischen Achse des Rohres, so wird bei einer Drehung des letzteren in seinen Lagern das Fadenkreuz einen Kreis beschreiben müssen; wir haben hiedurch ein einfaches Mittel, das Uebereintreffen der optischen mit der physischen Achse eines Fernrohres zu prüfen.

Man stellt nämlich den einen Faden ab, Fig. 239, auf ein entferntes vertikal stehendes Objekt so ein, daß er dasselbe entweder ganz deckt oder doch mit demselben parallel ist; hierauf drehe man das Fernrohr in seinen Lagern um 180°, so wird wieder derselbe Faden vertikal erscheinen, aber sobald der Durchschnittspunkt der Fäden außerhalb der physischen Achse liegt, in der Richtung b'a' stehen bleiben, die Visur wird somit auf ein zweites Objekt treffen und der Winkel, welchen dieses und das zuerst pointirte Signal bilden, ist der doppelte von jenem, unter welchem die optische Achse gegen die physische geneigt ist.



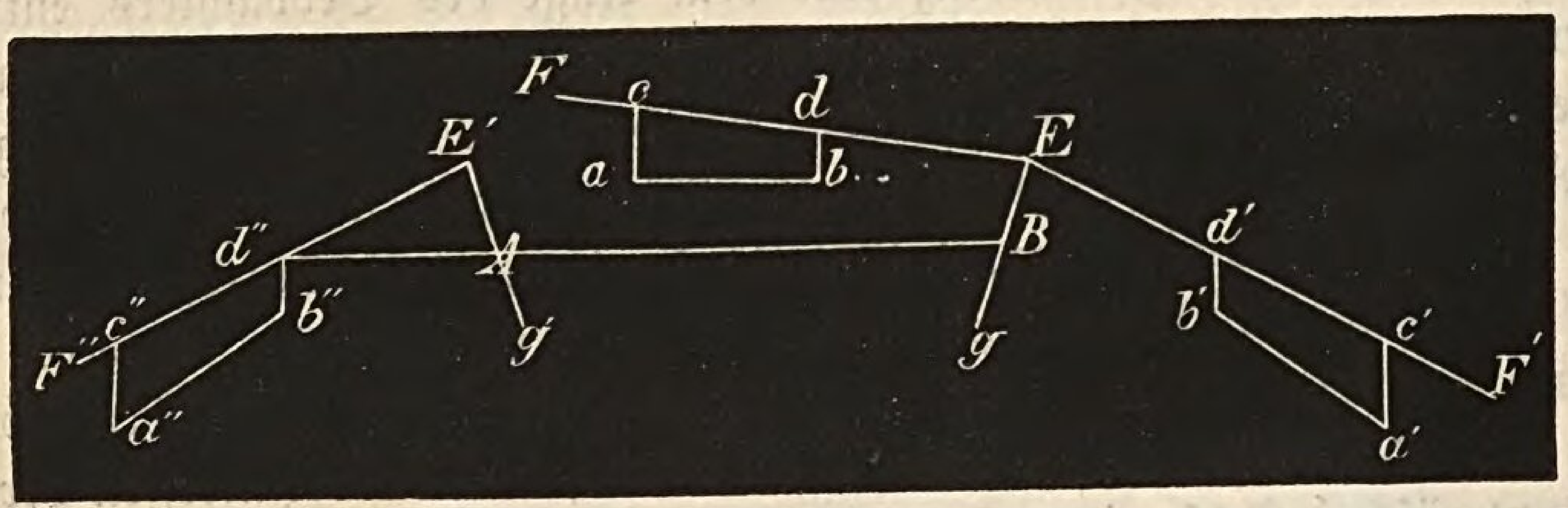
Verstellt man also den vertikalen Faden durch die zwei in der horizontalen Richtung wirkenden Schräubchen v, stellt man nämlich denselben in die Richtung cd so, daß der Abstand zwischen den beiden gesehenen Objekten halbirt erscheint, so schneidet offenbar der vertikale Faden die physische Achse in irgend einem Punkte.

Dreht man hierauf das Fernrohr in seinen Lagern der Art, daß der andere Faden vertikal erscheint, und wiederholt man die ganze Operation in Bezug auf diesen Faden, so wird auch dieser die physische Achse schneiden; der Durchschnittspunkt beider Faden ist somit ein Punkt der physischen Achse selbst.

Ad 3. Um zu prüfen, ob die Drehungsachse der Spiegel gegen die optische Achse des Rohres senkrecht stehe, stelle man den Heliotrop auf eine feste Unterlage, das Rohr oberhalb einer Fußschraube, drehe den Rahmen dd' sammt dem Rohre so, daß der Hebel h nach oben mit der Achse des Fernrohres parallel und h gegen das Okular gewendet zu liegen kommt.

Nun hänge man an den Hebel eine empfindliche Libelle mittelst zweier Drähte auf; ändere die Länge des einen so lange, bis die Blase nahe einspielt und bringe endlich diese mittelst der Fußschraube genau in die Mitte; hierauf schraube man die Deckel m, n ab, drehe den Hebel auf die entgegengesetzte Seite vom Okulare und wieder möglichst nahe mit dem Fernrohre parallel, zuletzt hebe man das Rohr aus seinen Lagern heraus und lege es umgekehrt wieder ein, das Objektiv nämlich dort wo früher das Okular war.

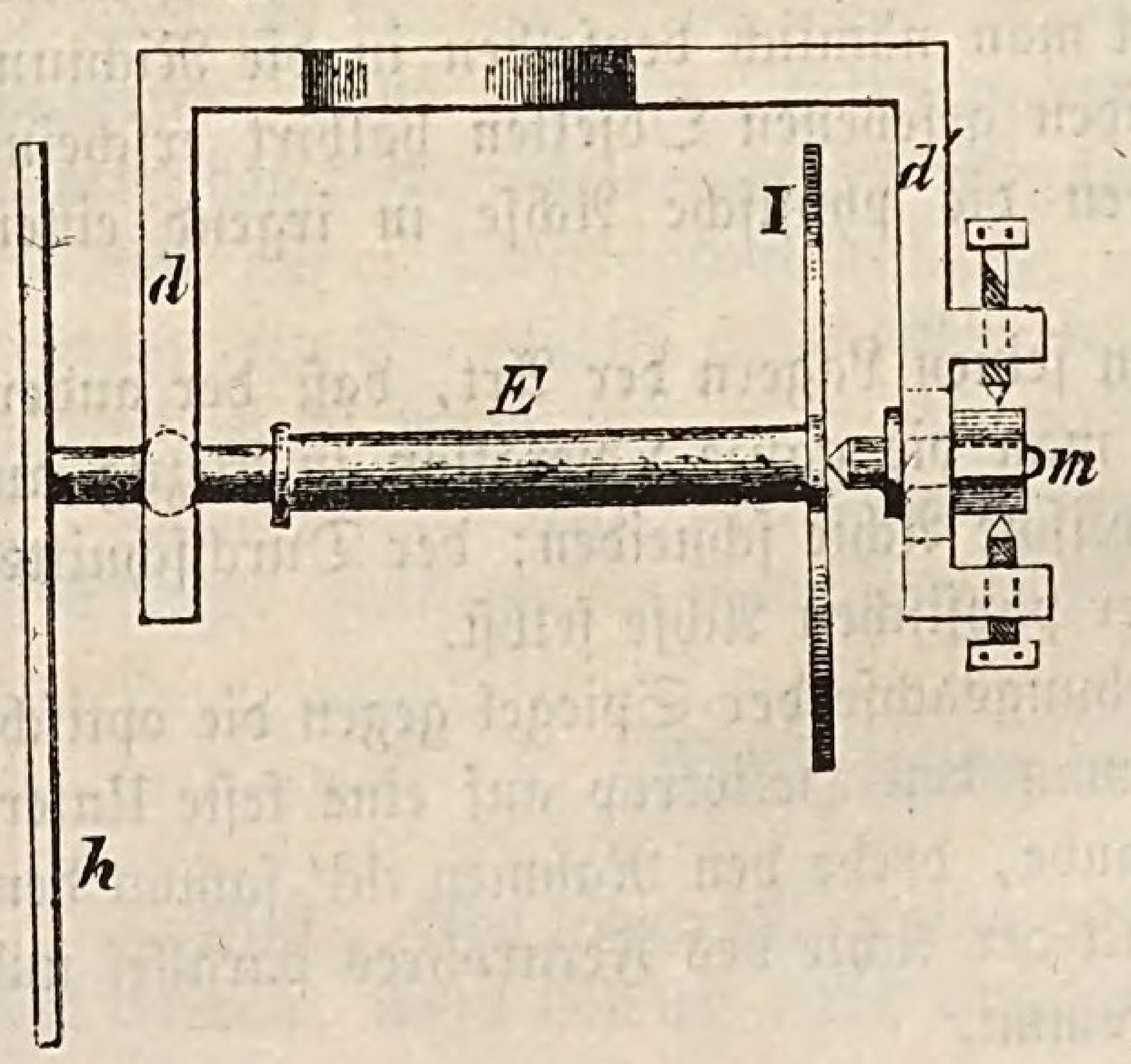
Spielt die Blase nicht scharf ein, so ist die Hälfte des Ausweichens an der Fußschraube, die andere an der Achse E zu korrigiren. Der Grund dieser Regel ist folgender: Die Ringe des Rohres, mit welchen es in den Lagern ruhet, als gleich vorausgesetzt, so liegt die physische Achse vor und nach der Umlegung in einer und derselben Linie, die wir in der Fig. 240 durch AB vorstellen wollen.



Ist nun EF der Hebel h in der Lage gegen das Okular, EF' nachdem er von demselben gewendet worden ist, EG die Spiegelachse, diese gegen die des Fernrohres unter dem Winkel EBA geneigt, so ist in jedem Falle FEG = F'EG, und nachdem das Rohr die Lager gewechselt hat und die Spiegelachse in die Lage E'G' gekommen ist, der Winkel EBA = E'AB; wird die Lage des Hebels nach der Umlegung durch E'F'' vorgestellt, so ist F''E'G' = F'EG = FEG.

Stellt nun ab, a'b', a''b'' die Tangente zu der Mitte der Blase in den drei Positionen des Hebels vor, so kann, weil EBA kein rechter Winkel ist, EG mit E'G', FE mit E'F'' und ab mit a''b'' nicht parallel sein, somit die Blase in der letzten Position nicht einspielen; und wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, bedarf sowohl die Libelle als auch die Spiegelachse eine Korrektion.

Offenbar ist es dasselbe, als wenn E'F'' die Ebene des Limbus und a''c'', b''d'' die Füße der Libelle wären, nur daß nicht EF, sondern EG oder E'G' wird ihre Lage ändern müssen.



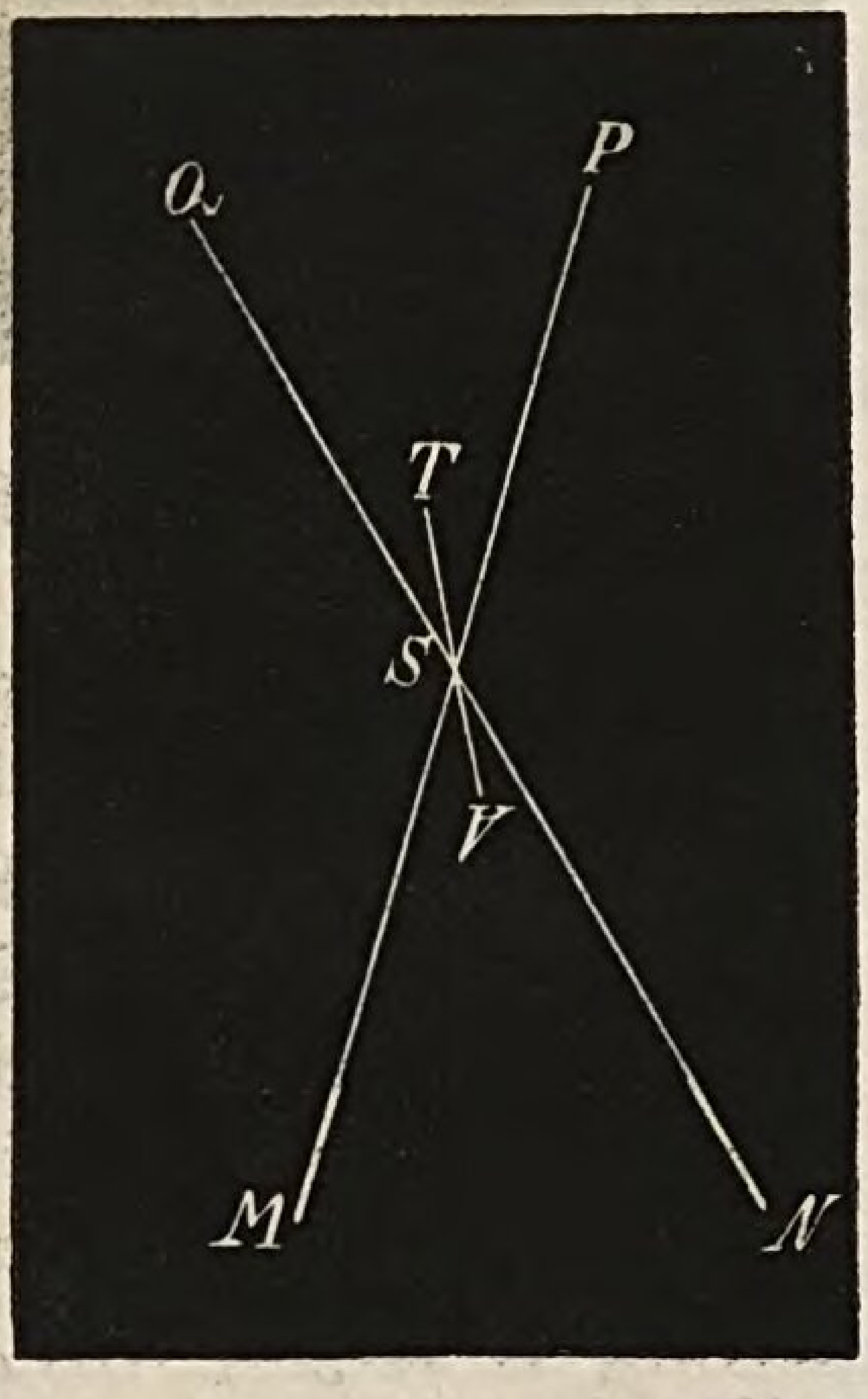
Wie die Drehungsachse der Spiegel auf die physische des Rohres senkrecht gestellt werden könne, ist aus der Fig. 241 ersichtlich; in dieser stellt dd' die vorstehenden Arme, E die Achse der Spiegel, h den Hebel, J die Scheibe vor. Der Arm d' ist ausgeschnitten, in diesem Ausschnitte ist ein Stück verschiebbar, welches nach außen mit einer Schraube, nach innen mit einer Spitze endet, und

mit dieser in die Achse eingreift. Wird nun die Mutter m, so auch das eine der mit dem Arme parallel liegenden Schräubchen gelüftet, das andere entsprechend nachgeschraubt, so wird dadurch die Spitze, also auch die Achse der Spiegel verstellt, sodann aber durch das Anziehen dieser Theile festgehalten.

Ad 4. Bildet die vordere Ebene eines dieser Spiegel mit der Drehungsachse irgend einen Winkel α, und wird sodann der Spiegel an der Achse um 180^0 gewendet, so beträgt der Winkel, unter welchem die Spiegelebene in ihrer gegenwärtigen Stellung gegen die ursprüngliche Lage geneigt ist, 2α; ist jedoch der Spiegel mit der Drehungsachse parallel, so kommt er nach einer Umdrehung von 180^0 in eine Lage, welche jener vor der Drehung wieder parallel ist, die Strahlen werden jedoch nach der entgegengesetzten Seite reflektirt.

Will man demnach untersuchen, ob einer dieser Spiegel mit der Drehungsachse parallel ist, so stelle man zwei mit Kreuzfäden versehene Fernröhre so auf, daß ihre optischen Achsen in einer und zwar nahe horizontalen Ebene liegen, und sich unter einem aber nicht zu spitzen Winkel schneiden.

In der Fig. 242 sei M das eine Rohr auf das Objekt P, N das andere auf Q eingestellt; die Objekte P und Q brauchen kaum 20 Klftr. entfernt, müssen aber gut beleuchtet und leicht zu unterscheiden sein; endlich suche man den Punkt S, in welchem sich beide Visuren schneiden, man sucht nämlich den Punkt auf, in welchem irgend ein kleines Objekt aufgestellt in beiden Fernröhren zugleich sichtbar wird.



Nun nehme man das ganze Stück, was an das Objektivende angeschraubt ist, ab, befestige es auf eine Unterlage, so daß die Drehungsachse der Spiegel nahe horizontal wird und daß den Spiegeln die drehende Bewegung um die Achse nicht benommen ist; diese Unterlage kommt dann im Punkte S so zu stehen, daß die Drehungsachse TV nahe in der Ebene der beiden Visuren liegt und den Winkel, unter welchem sie sich schneiden, beiläufig halbirt.

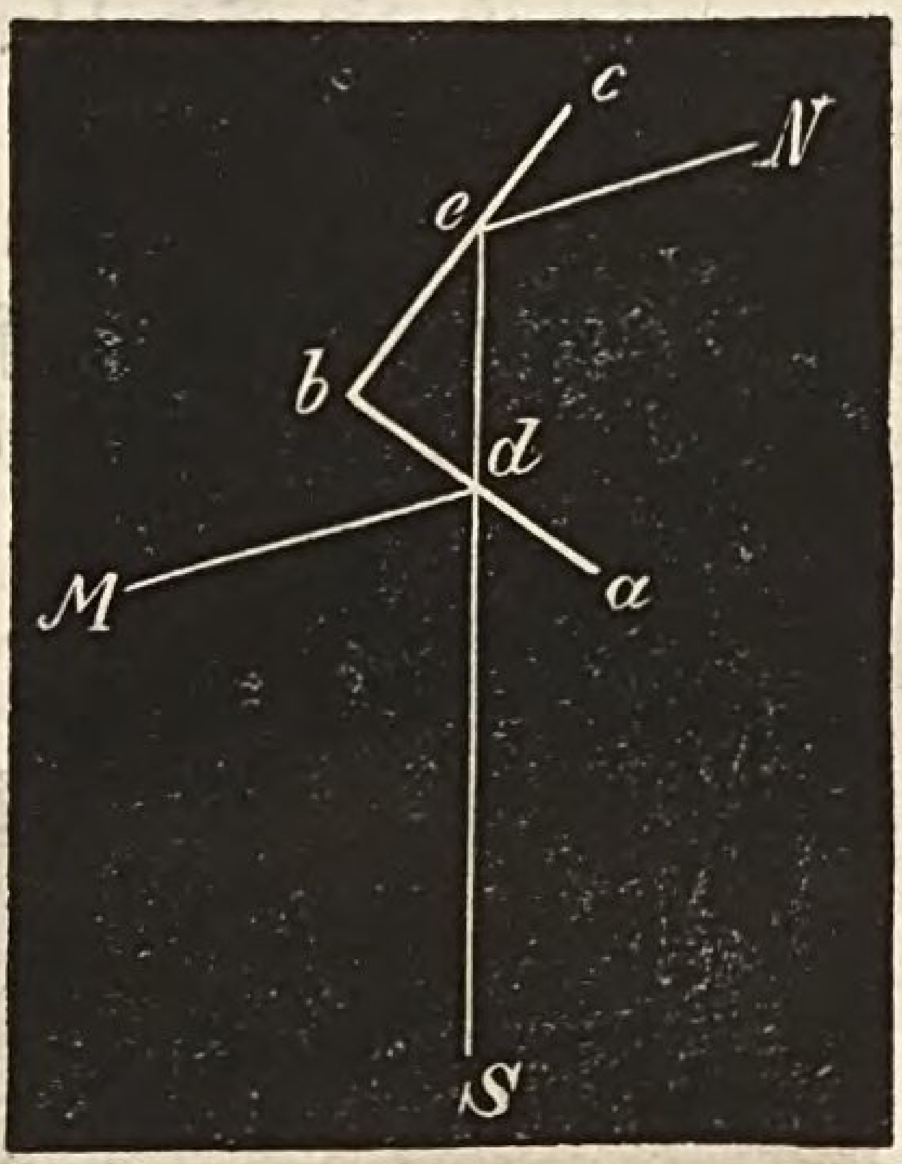
Ist dies geschehen, so wird der zu prüfende Spiegel nach dem Augenmaße senkrecht auf die Ebene der Visuren und durch eine sanfte Drehung sowohl der Unterlage als auch des Spiegels so gestellt, daß die von Q auf die eine spiegelnde Ebene fallenden Strahlen in das Rohr M reflektirt und daselbst im Durchschnitte der Fäden zu einem Bilde vereinigt werden; nach diesem wird derselbe Spiegel um 180^0, nämlich so weit gedreht, daß die von P kommenden in S reflektirten Strahlen an der Achse des Rohres N ein Bild geben. Kann das letztere nicht allein durch ein Drehen des Spiegels um die Achse E zuwege gebracht werden, so muß die Hälfte des Fehlers durch die Unterlage, die andere Hälfte durch die Korrektionsschraube des betreffenden Spiegels beseitigt werden.

Diese Korrektionsschrauben haben ihr Gewinde in der Spiegelrahme, ihnen gegenüber hinter dem Glase liegen Federn, welche das Glas an die Schrauben andrücken.

Ad 5. Man benütze die beiden Spiegel bb als einen künstlichen Horizont, und bestimme mittelst eines Spiegelsextanten die Höhe der Sonne in Bezug auf den einen, sodann auf den andern Spiegel; beide Messungen müssen, schnell aufeinander vorgenommen, gleiche Resultate liefern.

Die zu diesem Zwecke angebrachte Korrektionsschraube drückt auf den neben der Scheibe J gelegenen Spiegel, eine schwache Feder unter dem Glase dreht denselben in der entgegengesetzten Richtung.

Ad 6. Es sei Fig. 243 ba der mittlere, bc der ober ihm liegende Spiegel, beide unter einem rechten Winkel gegeneinander geneigt, der leuchtende Punkt S so weit entfernt, daß die von demselben auf beide Spiegel fallenden Strahlen als parallel betrachtet werden können, Sd der Strahl, welcher auf ab, Se, der auf bc fällt; ad S = bdM, beS = ceN, so wird der erste Strahl in der Richtung dM, der andere in der Richtung eN reflektirt.



Nun ist SdM = 180 — 2adS; daher Mde = 2adS, der Winkel bed = 90 — adS. daher bed + ceN = 180 — 2adS, und

Ned = 2adS;

da nur Mde = Ned ist, so ist dM mit e N parallel.

Ist also dM die Richtung der Achse am Heliotropen, so muß ein zweites Rohr, das die Strahlen, welche auf den Spiegel bc auffallen, erhalten soll, mit der Objektivöffnung gegen die des Heliotropen gewendet und die optischen Achsen beider müssen parallel sein.

Ist nun die letzte Korrektion vorzunehmen, so wird zuerst der Heliotrop auf ein weit entferntes Objekt einvisirt und etwa zwei Klafter hinter ihm ein Hilfsfernrohr (am besten ein Nivellirinstrument) um die halbe Breite des mittleren und des nebenliegenden Spiegels höher gestellt; diese Maße vom Boden bis zur Mitte der Okularlinse genommen; hierauf das Heliotropenrohr herausgehoben, wodurch es möglich wird, das Hilfsrohr auf dasselbe entfernte Objekt einzuvisiren.

Wird nun das Rohr des Heliotropen verkehrt in seine Lager gelegt, so sind die optischen Achsen parallel und die Objektivöffnungen gegen einander gewendet.

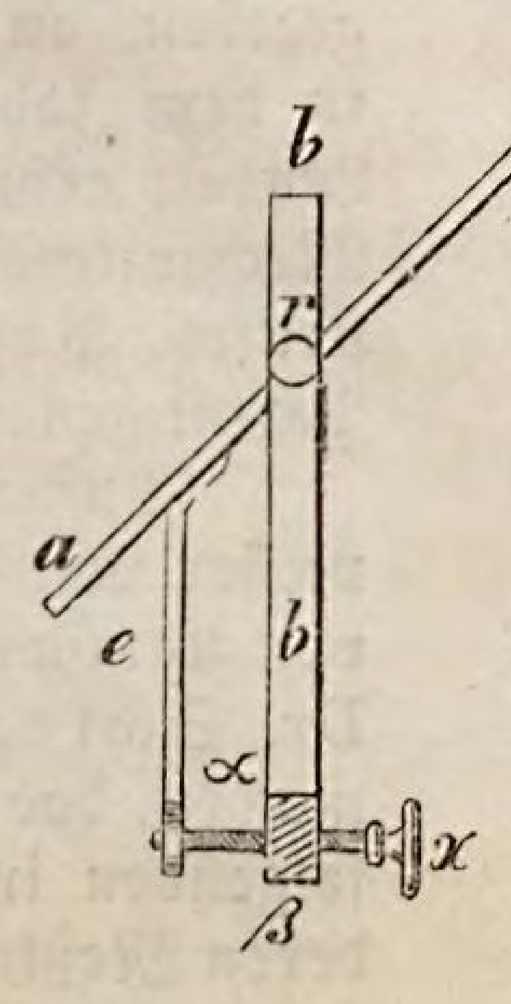
Nun wird die Spiegelachse vertikal gestellt und durch Drehung der Spiegel um diese Achse ein entferntes, nahe im Horizonte gelegenes Objekt aufgesucht, von dem die auf den mittleren Spiegel auffallenden Strahlen in das Rohr des Heliotropen reflektirt und dort zu einem Bilde vereinigt werden.

Erscheint nun dasselbe Objekt vermöge der an den Spiegeln b reflektirten Strahlen im Hilfsrohre, so sind die Spiegel richtig gestellt, wo nicht, so wird das Nöthige durch die Korrektionsschraube verbessert.

Die Art, wie die Korrektion vorgenommen wird, ist aus der Fig. 244 (siehe die Zeichnung anfangs der nächsten Seite) zu entnehmen; aa ist ein Durchschnitt des mittleren Spiegels, r einer der Drehungspunkte zwischen der Fassung

der Spiegel b; e der unterhalb liegende Arm, $\alpha\beta$ der untere Durchschnitt der Spiegelrahme, x die Korrektionsschraube.

Fig. 244.



Der Arm e hat unten einen Schlitz, zwischen diesem liegt der Hals der Schraube, welche ihre Mutter in der Spiegelrahme hat; wird also x gedreht, so nimmt sie mittelst ihres Halses den Arm mit und ändert die Neigung des Spiegels a.

Von der Wirkung des Heliotropen hat Gauß folgende Beispiele angegeben: Die Entfernung vom Lichtenberge bis zum Berge Hill ist 39952 Meter; die des Deisters vom Hill 40605 Meter. Auf diesen beiden Entfernungen sah man das reflektirte Licht immerfort mit bloßem Auge; auf 55122 Meter Distanz war es, wenn die Umstände die Beobachtung irgend begünstigten, gleichfalls sichtbar und einmal, unter besonders günstigen Umständen, sah man das vom Brocken aus reflektirte Licht sogar auf dem Hohenhagen in 69194 Meter Entfernung. Im Fernrohre konnte man das Licht vom Inselsberge auf dem Brocken in 105986 Meter Entfernung sehen und gegen Sonnenuntergang noch sehr scharf darauf pointiren.

§. 210. Vergleicht man die Instrumente ohne und mit Spiegeln hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit, so haben die Spiegelinstrumente eine kompendiöse Gestalt, einfache Bauart, sind leicht transportirt, bedürfen keines Stativs, der Sextant und die beiden Reflexionskreise übertreffen an Genauigkeit mit Ausnahme des Theodoliten alle anderen Winkelmesser und sind um ein billigeres Geld zu haben; ihre Nachtheile sind aber, daß der Gebrauch von der Tageshelle sehr abhängt, und daß mit ihnen nicht unmittelbar die horizontale Projektion eines Winkels gemessen werden kann; daß hier für den Erfindungsgeist ein weites Feld noch offen ist, dürften die in diesem Werke aufgenommenen Spiegelwerkzeuge hinlänglich nachweisen *).

---

*) Das erste Spiegelinstrument war der Sextant; als Erfinder desselben wird allgemein der ehemalige Vizepräsident der königlichen Londoner Gelehrtengesellschaft Ritter von Hadley angegeben, der es in der Phil. Transact. für das Jahr 1731 zuerst bekannt machte; der verstorbene Direktor der Wiener Sternwarte von Littrow aber führt wiederholt an (zuerst in seiner 1821 herausgegebenen Astronomie und später in der Uebersetzung der Geschichte induktiver Wissenschaften von Whewell), daß man im Jahre 1742 in Hadley's Papieren eine Schrift von Newtons eigener Hand fand, in welcher dieser dasselbe Instrument als von ihm erfunden beschreibt; demnach wäre der Spiegelsextant nicht von Hadley, sondern von Newton erfunden.

Der Form nach hatte man zwar Sextanten schon zur Zeit des Brahe, wie untern andern aus dem Werke: Cosmographia blaviana, Amsterdam 1662, wo die Instrumente des eben genannten Astronomen sehr schön abgebildet sind, zu ersehen ist; doch ein Instrument mit Spiegeln, dies war zu jener Zeit etwas ganz neues, und erst durch die Erfindung des Spiegelsextanten ist die Bahn gebrochen worden, auf der man zur Konstruktion der übrigen Spiegelinstrumente gekommen ist.

Höschel hat den Spiegelzirkel 1783, später Sattler bekannt gemacht, Douglas seinen Reflektor 1805 erfunden, das katoptrische Winkelrohr und das Spiegellineal in ihrer ursprünglichen Einrichtung sind Erfindungen des verstorbenen k. k. Generals Ritter von Fallon, dem Spiegellineale hat Professor Winkler

in Marienbrunn im Jahre 1809 die oben beschriebene verbesserte Einrichtung gegeben, an das Winkelrohr ein bewegliches Okular anzubringen, hat Stampfer in dem Jahre 1840 angegeben. Der Winkelspiegel ist von Adams (Vater) in London erfunden, das §. 180 beschriebene Exemplar ist aus der Werkstätte des Mechanikers Kraft; Schmalkalder hat die erste Boussole in London 1813 konstruirt, Pistor und Martins haben im Jahre 1844 auf ihre Erfindung ein Patent genommen.

Außer den hier beschriebenen Instrumenten wollen wir nach auf den Distanzmesser von Martins, Dosensextanten von Breithaupt, Spiegelwinkelmesser von Katasterdirektor Lüpken, auf das Linsen- und Prismen-Porrhometer von Dr. Schlaginweit, und die Spiegelscheibe vom Grafen Teleki aufmerksam machen, das erstere findet man in Grunerts Archiv 19. Theil, 2. Heft; die zwei folgenden in dem Werke: Die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Meßkunst von Dr. Schneitler. Leipzig, Teubner 1852; die Spiegelscheibe hat der Erfinder 1812 im Drucke bekannt gemacht.

Ende des ersten Theiles.

Druck von L. C. Zamarski, Universitäts-Buchdruckerei (vormals J. P. Sollinger) in Wien.